МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические рекомендации и варианты контрольных работ
по курсу «Высшая математика» для студентов технических
специальностей заочной формы обучения

Брест 2002

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты двух контрольных работ по разделам “Линейная алгебра”, “Аналитическая геометрия”, “Дифференциальное исчисление” курса “Высшая математика”, изучаемым студентами технических специальностей заочной формы обучения в первом семестре, даны решения типовых вариантов и некоторые методические рекомендации полезные для успешного выполнения контрольных работ.

СОДЕРЖАНИЕ

Организационно-методические указания

В контрольную работу №1 "Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и введение в математический анализ" включены семь заданий: два задания по теме 1 "Элементы линейной алгебры ", три задания по теме 2 "Основы аналитической геометрии ", два задания по теме 3 "Введение в математический анализ ".

Контрольная работа №2 "Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных" состоит из трех заданий по теме 4 "Дифференциальное исчисление функций одной переменной" и двух заданий по теме 5 "Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных".

В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта. Контрольная работа должна выполнятся студентом в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Условия задач необходимо записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта. Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

Каждую контрольную работу надо выполнять в отдельной тетради, оставляя поля.

Вопросы программы курса "Высшая математика"
1 семестр

Тема 1. Элементы линейной алгебры.

Определители.

Понятие определителей 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей. Теоремы замещения и аннулирования. Разложение определителя по элементам строки. Понятие определителя n-го порядка.

Матрицы.

Виды матриц. Линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Обратная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Понятие ранга.

Системы линейных уравнений

Векторно-матричная запись линейных систем. Теорема Кронекера-Капелли (без доказательств). Решение невырожденных линейных систем: формулы Крамера, метод Гаусса, матричный метод. Решение однородных линейных систем. Жордановы исключения.

Векторы в R^3.

Основные понятия. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость между векторами. Базис. Проекция вектора на ось и ее свойства. Декартова система координат. Координаты вектора. Радиус-вектор точки.

Скалярное и векторное произведения векторов.

Скалярное произведение векторов в R^3 и его свойства. Длина вектора, угол между векторами. Условие ортогональности векторов. Ориентация тройки векторов. Векторное произведение и его свойства. Условие коллинеарности векторов. Приложения скалярного и векторного произведения векторов.

Смешанное произведение векторов.

Смешанное произведение векторов и его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Преобразование координат на плоскости. Полярная система координат.

Линейные преобразования в R^3.

Понятие линейного преобразования. Примеры. Матрица линейного преобразования. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Канонический вид матрицы линейного преобразования.

Тема 2. Основы аналитической геометрии.

Прямая на плоскости.

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. Понятие уравнение линии на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

Кривые второго порядка.

Коническое уравнение окружности. Конические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Характеристики и свойства кривых второго порядка.

Плоскость в пространстве R^3.

Понятие уравнения поверхности в пространстве. Плоскость как поверхность первого порядка. Виды уравнений плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве R^3.

Понятие уравнения линии в пространстве R^3. Различные виды уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка.

Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка. Метод сечений. Квадратичная форма в R^3, матрица квадратичной формы. Упрощение уравнения линии 2-го порядка на плоскости.

Линейные пространства.

Определение линейного пространства и подпространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис пространства. Координаты вектора. Матрица системы векторов. Матрица перехода от оного базиса к другому.

Тема 3. Введение в математический анализ.

Понятие функции.

Множества и логические символы, операции над множествами. Функция, область определения функции. Образ и прообраз функции. График функции. Элементарные функции и их классификация. Гиперболические функции. Сложная и обратная функции.

Числовая последовательность и ее предел.

Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Существование предела монотонной и ограниченной последовательности. Число e.

Предел функции в точке.

Понятие предела функции в точке. Предел функции в бесконечности. Свойства функций, имеющих предел. Односторонние пределы.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Бесконечно малые функции и их свойства. Бесконечно большие функции и их свойства. Типы неопределенностей. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательные пределы.

Непрерывность функции в точке.

Определение непрерывности функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Сравнение функций.

Сравнение функций. Символы "o" и "O". Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные функции. Главная часть функции. Приложение эквивалентных функций к вычислению пределов.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Производная функции.

Геометрический и механический смыслы производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Производные элементарных функций.

Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическая производная. Дифференцирование параметрически заданной функции.

Дифференциал функции.

Дифференцируемость функции в точке. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке. Дифференциал функции, его геометрический и механический смыслы. Инвариантность формы дифференциала. Приложения дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков

Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Бином Ньютона.

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ферма. Теорема Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.

Формула Тейлора.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Разложение по формуле Маклорена функций e^x , sinx, cosx, ln(1+x), $(1+x)^n$

Исследование функций с помощью производной.

Условия монотонности функции. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функции. Глобальный экстремум.

Исследование функций с помощью производной.

Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема построение графика функции.

Приложения дифференциального исчисления.

Понятие векторной функции. Предел и производная векторной функции. Уравнения касательной и нормальной плоскости к годографу. Методы хорд, касательных и простой итерации.

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных.

Понятие связности и открытости множества. Область, замыкание области. Определение функции двух переменных. Геометрическая интерпретация. Предел и непрерывность функции двух переменных в точке. Свойства функций нескольких переменных, непрерывных в точке и замкнутой области.

Дифференцируемость функций двух переменных.

Частные производные и их геометрический смысл. Дифференцируемость функций двух переменных в точке. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Дифференциал функций нескольких переменных. Приложения дифференциала.

Дифференцирование сложной функций.

Производная и дифференциал сложной функции. Дифференцирование неявных функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Экстремум функции двух переменных.

Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции двух переменных. Глобальный экстремум.

Условный экстремум.

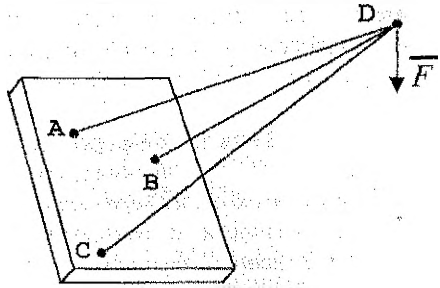
Понятие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа. Метод наименьших квадратов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 1

"ЭЛЕМЕНТЫ ВЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ"

Задание 1. В задачах 1.1-1.30 дана пространственная система, состоящая из трех стержней, шарнирно закрепленных в нижних концах A,B,C, не лежащих на одной прямой и соединенных общим шарниром в точке D, к которой приложена сила $\overline{F}$.

$\overline{AD} = \overline{a}$
$\overline{BD} = \overline{b}$
$\overline{CD} = \overline{c}$
$\overline{F} = \overline{d}$



Убедитесь, что система статически определима и определите продольные напряжения в стержнях. Сделать чертеж.

1.1. $\overline{a} = (5,4,1)$, $\overline{b} = (-3,5,2)$, $\overline{c} = (2,-1,3)$, $\overline{d} = (7,23,4)$.

1.2. $\overline{a} = (2,-1,4)$, $\overline{b} = (-3,0,-2)$, $\overline{c} = (4,5,-3)$, $\overline{d} = (0,11,-14)$.

1.3. $\overline{a} = (-1,1,2)$, $\overline{b} = (2,-3,-5)$, $\overline{c} = (-6,3,-1)$, $\overline{d} = (28,-19,-7)$.

1.4. $\overline{a} = (1,3,4)$, $\overline{b} = (-2,5,0)$, $\overline{c} = (3,-2,-4)$, $\overline{d} = (13,-5,-4)$.

1.5. $\overline{a} = (1,-1,1)$, $\overline{b} = (-5,-3,1)$, $\overline{c} = (2,-1,0)$, $\overline{d} = (-15,-10,5)$.

1.6. $\overline{a} = (3,1,2)$, $\overline{b} = (-7,-2,-4)$, $\overline{c} = (-4,0,3)$, $\overline{d} = (16,6,15)$.

1.7. $\overline{a} = (-3,0,1)$, $\overline{b} = (2,7,-3)$, $\overline{c} = (-4,3,5)$, $\overline{d} = (-16,33,13)$.

1.8. $\overline{a} = (5,1,2)$, $\overline{b} = (-2,1,-3)$, $\overline{c} = (4,-3,5)$, $\overline{d} = (15,-15,24)$.

1.9. $\overline{a} = (0,2,-3)$, $\overline{b} = (4,-3,-2)$, $\overline{c} = (-5,-4,0)$, $\overline{d} = (-19,-5,-4)$.

1.10. $\overline{a} = (3,-1,2)$, $\overline{b} = (-2,3,1)$, $\overline{c} = (4,-5,-3)$, $\overline{d} = (-3,2,-3)$.

1.11. $\overline{a} = (5,3,1)$, $\overline{b} = (-1,2,-3)$, $\overline{c} = (3,-4,2)$, $\overline{d} = (-9,34,-20)$.

1.12. $\overline{a} = (3,1,-3)$, $\overline{b} = (-2,4,1)$, $\overline{c} = (1,-2,5)$, $\overline{d} = (1,12,-20)$.

1.13. $\overline{a} = (6,1,-3)$, $\overline{b} = (-3,2,1)$, $\overline{c} = (-1,-3,4)$, $\overline{d} = (15,6,-17)$.

1.14. $\bar{a}=(4,2,3)$, $\bar{b}=(-3,1,-8)$, $\bar{c}=(2,-4,5)$, $\bar{d}=(-12,14,-31)$.

1.15. $\bar{a}=(-2,1,3)$, $\bar{b}=(3,-6,2)$, $\bar{c}=(-5,-3,-1)$, $\bar{d}=(31,-6,22)$.

1.16. $\bar{a}=(1,3,6)$, $\bar{b}=(-3,4,-5)$, $\bar{c}=(1,-7,2)$, $\bar{d}=(-2,17,5)$.

1.17. $\bar{a}=(7,2,1)$, $\bar{b}=(5,1,-2)$, $\bar{c}=(-3,4,5)$, $\bar{d}=(26,11,1)$.

1.18. $\bar{a}=(3,5,4)$, $\bar{b}=(-2,7,-5)$, $\bar{c}=(6,-2,1)$, $\bar{d}=(6,-9,22)$.

1.19. $\bar{a}=(5,3,2)$, $\bar{b}=(2,-5,1)$, $\bar{c}=(-7,4,-3)$, $\bar{d}=(36,1,15)$.

1.20. $\bar{a}=(11,1,2)$, $\bar{b}=(-3,3,4)$, $\bar{c}=(-4,-2,7)$, $\bar{d}=(-5,11,-15)$.

1.21. $\bar{a}=(9,5,3)$, $\bar{b}=(-3,2,1)$, $\bar{c}=(4,-7,4)$, $\bar{d}=(-10,-13,8)$.

1.22. $\bar{a}=(7,2,1)$, $\bar{b}=(3,-5,6)$, $\bar{c}=(-4,3,-4)$, $\bar{d}=(-1,18,-16)$.

1.23. $\bar{a}=(1,2,3)$, $\bar{b}=(-5,3,-1)$, $\bar{c}=(-6,4,5)$, $\bar{d}=(-4,11,20)$.

1.24. $\bar{a}=(-2,5,1)$, $\bar{b}=(3,2,-7)$, $\bar{c}=(4,-3,2)$, $\bar{d}=(-4,22,-13)$.

1.25. $\bar{a}=(3,1,2)$, $\bar{b}=(-4,3,-1)$, $\bar{c}=(2,3,4)$, $\bar{d}=(14,14,20)$.

1.26. $\bar{a}=(3,-1,2)$, $\bar{b}=(-2,4,1)$, $\bar{c}=(4,-5,-1)$, $\bar{d}=(-5,11,1)$.

1.27. $\bar{a}=(4,5,1)$, $\bar{b}=(1,3,1)$, $\bar{c}=(-3,-6,7)$, $\bar{d}=(19,33,0)$.

1.28. $\bar{a}=(1,-3,1)$, $\bar{b}=(-2,-4,3)$, $\bar{c}=(0,-2,3)$, $\bar{d}=(-8,-10,13)$.

1.29. $\bar{a}=(5,7,-2)$, $\bar{b}=(-3,1,3)$, $\bar{c}=(1,-4,6)$, $\bar{d}=(14,9,-1)$.

1.30. $\bar{a}=(-1,4,3)$, $\bar{b}=(3,2,-4)$, $\bar{c}=(-2,-7,1)$, $\bar{d}=(6,20,-3)$.

Задание 2. В задачах 2.1-2.30 проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее двумя способами:

1. Методом Гаусса;
2. Матричным методом (с помощью обратной матрицы).

2.1. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+4 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x-3y-z=1 \\ 2x+y+z=-7 \\ 2x-y-3z=5 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1 \\ 2x+y-z=3 \\ x-2y-3z=4 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y+3z=5 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-z=-4 \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 3x+y+2z=-4 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ x-y-2z=6 \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x+5y-z=-1 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-4y+z=0 \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4 \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ 3x-2y+6z=0 \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 5x-y+3z=4 \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7 \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 3x+y-3z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y-3z=-1 \\ 3x+3y+z=3 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-7 \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ 4x+y-3z=3 \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 2x-y+5z=1 \\ x-3y+z=-2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-y-z=1 \\ 5x-3y+z=5 \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ 2x+y+3z=4 \\ x-2y+5z=3 \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 4x-3y-2z=2 \\ 3x+y-z=2 \\ 2x+5y+3z=5 \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 3x+y+z=4 \\ 2x+3y-2z=5 \\ x-4y-2z=-3 \end{cases}$

Задание 3. В задачах 3.1-3.30 даны вершины треугольника ABC: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Найдите:

1. Проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$;
2. Площадь треугольника ABC;
3. Уравнение стороны AB;
4. Уравнение высоты CH;
5. Уравнение медианы AM;
6. Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
7. Расстояние от точки C до прямой AB;
8. Сделать чертеж.

3.1. A(-2;4), B(3;1), C(10;7).
3.2. A(-5;7), B(0;-10), C(4;12).
3.3. A(-12;-1), B(7;-12), C(11;20).
3.4. A(-10;9), B(2;0), C(6;22).
3.5. A(0;2), B(12;-7), C(16;15).
3.6. A(-9;6), B(3;-3), C(7;19).
3.7. A(1;0), B(13;-9), C17;13).
3.8. A(-4;10), B(8;1), C(12;13).
3.9. A(2;5), B(14;-4), C(18;18).
3.10. A(-1;4), B(11;-5), C(15;17).
3.11. A(-2;7), B(10;-2), C(8;12).
3.12. A(-6;8), B(6;-1), C(4;13).
3.13. A(3;6), B(15;-3), C(13;11).
3.14. A(-10;5), B(2;-4), C(0;10).
3.15. A(-4;12), B(8;3), C(6;17).
3.16. A(-3;10), B(9;1), C(7;15).
3.17. A(4;1), B(16;-8), C(14;6).
3.18. A(-7;4). B(5;-5), C(3;9).
3.19. A(0;3), B(12;-6), C(10;8).
3.20. A(-5;9), B(7;0), C(5;14).
3.21. A(-3;5), B(-2;-8), C(1;5).
3.22. A(4;-3), B(-1;-4), C(2;6).
3.23. A(-2;1), B(-4;-3), C(5;4).
3.24. A(3;-2), B(-1;-6), C(5;3).
3.25. A(2;1), B(-3;-3), C(2;-8).
3.26. A(3;2), B(-1;-6), C(4;-4).
3.27. A(4;2), B(-1;-5), C(3;-5).
3.28. A(-3;1), B(-6;-6), C(2;-5).
3.29. A(3;4), B(-1;3), C(-2;-5).
3.30. A(-2;4), B(3;3), C(-2;-6).

Задание 4. В задачах 4.1 - 4.30 даны четыре точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Найдите:

1. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
2. Угол между прямыми A_1A_2 и A_1A_4 (в градусах);
3. Составьте уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4. Составьте уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.

4.1. $A_1(5;-1;-4)$, $A_2(9;3;-6)$, $A_3(7;10;-14)$, $A_4(5;1;-3)$.

4.2. $A_1(1;-4;0)$, $A_2(5;0;-2)$, $A_3(3;7;-10)$, $A_4(1;-2;1)$.

4.3. $A_1(-3;-6;2)$, $A_2(1;-2;0)$, $A_3(-1;5;-8)$, $A_4(-3;-4;3)$.

4.4. $A_1(-1;1;-5)$, $A_2(3;5;-7)$, $A_3(1;12;-15)$, $A_4(-1;3;-4)$.

4.5. $A_1(-4;2;-1)$, $A_2(0;6;-3)$, $A_3(-2;13;-11)$, $A_4(-4;-4;0)$.

4.6. $A_1(0;4;3)$, $A_2(4;8;1)$, $A_3(2;15;-7)$, $A_4(0;6;4)$.

4.7. $A_1(-2;0;-2)$, $A_2(2;4;-4)$, $A_3(0;11;-12)$, $A_4(-2;2;-1)$.

4.8. $A_1(3;3;-3)$, $A_2(7;7;-5)$, $A_3(5;14;-13)$, $A_4(3;5;-2)$.

4.9. $A_1(4;-2;5)$, $A_2(8;2;3)$, $A_3(6;9;-5)$, $A_4(4;0;6)$.

4.10. $A_1(-5;0;1)$, $A_2(-4;-2;3)$, $A_3(6;2;11)$, $A_4(3;4;9)$.

4.11. $A_1(1;-4;0)$, $A_2(2;-6;2)$, $A_3(12;-2;10)$, $A_4(9;0;8)$.

4.12. $A_1(-1;-2;-8)$, $A_2(0;-4;-6)$, $A_3(10;0;2)$, $A_4(7;2;0)$.

4.13. $A_1(0;2;-10)$, $A_2(1;0;-8)$, $A_3(11;4;0)$, $A_4(8;6;-2)$.

4.14. $A_1(3;1;-2)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(14;3;8)$, $A_4(11;5;6)$.

4.15. $A_1(-8;3;-1)$, $A_2(-7;1;1)$, $A_3(3;5;9)$, $A_4(0;7;7)$.

4.16. $A_1(2;-1;-4)$, $A_2(3;-3;-2)$, $A_3(13;1;6)$, $A_4(10;3;4)$.

4.17. $A_1(-4;5;-5)$, $A_2(-3;3;-3)$, $A_3(7;7;5)$, $A_4(4;9;3)$.

4.18. $A_1(-2;-3;2)$, $A_2(-1;-5;4)$, $A_3(9;-1;12)$, $A_4(6;1;10)$.

4.19. $A_1(-3;4;-3)$, $A_2(-2;2;-1)$, $A_3(8;6;7)$, $A_4(5;8;5)$.

4.20. $A_1(-3;-2;4)$, $A_2(-4;2;-7)$, $A_3(5;0;3)$, $A_4(-1;3;0)$.

4.21. $A_1(2;-2;1)$, $A_2(-3;0;-5)$, $A_3(0;-2;-1)$, $A_4(-3;4;2)$.

4.22. $A_1(5;4;1)$, $A_2(-1;-2;-2)$, $A_3(3;-2;2)$, $A_4(-5;5;4)$.

4.23. $A_1(3;6;-2)$, $A_2(0;2;-3)$, $A_3(1;-2;0)$, $A_4(-7;6;6)$.

4.24. $A_1(1;-4;1)$, $A_2(4;4;0)$, $A_3(-1;2;-4)$, $A_4(-9;7;8)$.

4.25. $A_1(4;6;-1)$, $A_2(7;2;4)$, $A_3(-2;0;-4)$, $A_4(3;1;-4)$.

4.26. $A_1(0;6;-5)$, $A_2(8;2;5)$, $A_3(2;6;-3)$, $A_4(5;0;-6)$.

4.27. $A_1(-2;4;-6)$, $A_2(0;-6;1)$, $A_3(4;2;1)$, $A_4(7;-1;-8)$.

4.28. $A_1(-4;-2;-5)$, $A_2(1;8;-5)$, $A_3(0;4;-4)$, $A_4(9;-2;-10)$.

4.29. $A_1(3;4;-1)$, $A_2(2;-4;2)$, $A_3(5;6;0)$, $A_4(11;-3;-12)$.

4.30. $A_1(2;0;1)$, $A_2(3;-3;1)$, $A_3(4;2;5)$, $A_4(-3;7;4)$.

__Задание 5.__ В задачах 5.1 - 5.30 дана функция $r = f(\varphi)$ на отрезке $0 \le \varphi \le 2\pi$. Требуется:

1. Построить график функции в полярной системе коор-динат по точкам, давая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$.
2. Найти уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой сов-падает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью и по уравнению определить, какая это будет линия?

5.1. $r = -2\cos\varphi$

5.2. $r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$

5.3. $r = 2(1-\cos\varphi)$

5.4. $r = 4\sin\varphi$

5.5. $r = \dfrac{4}{2+3\cos\varphi}$

5.6. $r = 3(1+\sin\varphi)$

5.7. $r = \dfrac{5}{1+\sin\varphi}$

5.8. $r = \dfrac{4}{1+\cos\varphi}$

5.9. $r = 3(\cos\varphi+1)$

5.10. $r = \dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$

5.11. $r = 3\sin\varphi$

5.12. $r = \dfrac{5}{6+3\cos\varphi}$

5.13. $r = \dfrac{1}{2+\cos\varphi}$

5.14. $r = 7(1-\sin\varphi)$

5.15. $r = 4\sqrt{2}\sin\varphi$

5.16. $r = \dfrac{4}{2\cos\varphi - 3\sin\varphi}$

5.17. $r = -4\sin\varphi$

5.18. $r = \dfrac{2}{1-2\cos\varphi}$

5.19. $r = \dfrac{2}{2+\sin\varphi}$

5.20. $r = \dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}$

5.21. $r = 10\sin\varphi$

5.22. $r = \dfrac{3}{2-3\cos\varphi}$

5.23. $r = \dfrac{4}{3+\cos\varphi}$

5.24. $r = 2\sin^2\varphi/2$

5.25. $r = 2\cos^2\varphi/2$

5.26. $r = \dfrac{5}{3+4\cos\varphi}$

5.27. $r = \dfrac{2}{\sin^2\varphi/2}$

5.28. $r = \dfrac{3}{1+2\cos\varphi}$

5.29. $r = \dfrac{4}{2-\cos\varphi}$

5.30. $r = \dfrac{2}{2+3\sin\varphi}$

Задание 6. В задачах 6.1 - 6.30 найти указанные пределы не пользуясь правилом Лопиталя.

6.1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$;

6.2. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$;

6.3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$;

6.4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+3}{2x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$;

6.5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+1}{3x^3-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+4}$;

6.6. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-8}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2-x^2}{4x^2-3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$;

6.7. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-x+1}{3x^3+x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$;

6.8. а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\arcsin 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-1}{4x+2}\right)^{1-2x}$;

6.9. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$;

6.10. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x \cdot ctg 5x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$;

6.11. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x-1}{5x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xtgx}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$;

6.12. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x-1}{5x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg 3x}{\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{4x-3}\right)^{4x+1}$;

6.13. а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 3x}{5\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{2x+5}\right)^{1-3x}$;

6.14. а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+3x-7}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg 4x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{4x+1}\right)^{2x-3}$;

6.15. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{3x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 5x}{tg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{3x-2}\right)^{6x+1}$;

6.16. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-4x+3}{3x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (4-3x)^{x/(x-1)}$;

6.17. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} (5-2x)^{x/(x-2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6-6\cos 6x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{2x-3}$;

6.18. а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x+5}{8x^3-4x+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-3}$;

6.19. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)^2}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+3x-5}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{arctg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+9}\right)^{2-x}$;

6.20. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x-1}{1-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$;

6.21. а) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x}-3}{7-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x-x^3}{3x^3-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{2\arcsin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{x}$;

6.22. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^3}{4x^3+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x}{4x+1}\right)^{2x}$;

6.23. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{3x+1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-x^3}{5x^3+2x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2}{arctg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{2x}$;

6.24. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+1}{4x^3-x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+8}{4x-9}\right)^{3x}$;

6.25. а) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-4}\right)^{2x}$;

6.26. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-3x+1}{1-5x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 8x}{x\sin x}$;   г) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{2x/(x^2-4)}$;

6.27. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-1-x^3}{5x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;   г) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-8)^{2/(x-3)}$;

6.28. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x+x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} 3x\cdot ctg3x$;   г) $\lim\limits_{x\to 1} (7x-6)^{x/(x-1)}$;

6.29. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-3x-1}{1-x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+5x-9}{7x^2-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 3x}{x^2 tg4x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x-1}$;

6.30. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2-3x}{x-\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-1}{x^3+4x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arcsin x}{tg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{3x-1}$

Задание 7. В задачах 7.1 - 7.30 задана функция y=f(x). Найти:

1. Точки разрыва функции;
2. Односторонние пределы в точках разрыва, установить характер точки разрыва.
3. Сделать чертеж.

7.1. $y=\begin{cases}-2x; & x<-1\\ x^2+1; & -1\le x<2\\ x-1; & x\ge 2\end{cases}$;

7.2. $y=\begin{cases}x+2; & x<-2\\ 4-x^2; & -2\le x\le 1\\ 3-2x; & x>1\end{cases}$;

7.3. $y=\begin{cases}3-x; & x<-2\\ x^2-5; & -2\le x<3\\ 7-2x; & x\ge 3\end{cases}$;

7.4. $y=\begin{cases}-3x; & x\le 1\\ x^2-4; & 1<x\le 3\\ 2x-5; & x>3\end{cases}$;

7.5. $y=\begin{cases}2x+1; & x<-1\\ x^2; & -1\le x\le 2\\ 6-x; & x>2\end{cases}$;

7.6. $y=\begin{cases}2-x; & x<0\\ \sin x; & 0\le x<\pi\\ x-\pi; & x>\pi\end{cases}$;

7.16. $y=\begin{cases}-x; & x\le 0\\ \sin x; & 0<x\le\pi\\ x-2; & x>\pi\end{cases}$;

7.17. $y=\begin{cases}-(x+1); & x\le -1\\ (x+1)^2; & -1<x\le 0\\ x; & x>0\end{cases}$;

7.18. $y=\begin{cases}-x^2; & x\le 0\\ tgx; & 0<x\le\pi/4\\ 2; & x>\pi/4\end{cases}$;

7.19. $y=\begin{cases}-2x; & x\le 0\\ x^2+1; & 0<x\le 1\\ 2; & x>1\end{cases}$;

7.20. $y=\begin{cases}-2x; & x\le 0\\ \sqrt{x}; & 0<x\le 4\\ 1; & x>4\end{cases}$;

7.21. $y=\begin{cases}x+1; & x<0\\ x^2+1; & 0\le x\le 2\\ 3; & x>2\end{cases}$;

7.7. $y=\begin{cases} x+1; & x\le 0 \\ \cos x; & 0<x\le \pi/2; \\ 2; & x>\pi/2 \end{cases}$

7.8. $y=\begin{cases} 2x; & x<0 \\ \sin x; & 0\le x\le \pi; \\ -3; & x>\pi \end{cases}$

7.9. $y=\begin{cases} x^2; & x\le 0 \\ \cos x; & 0<x\le \pi; \\ -1; & x>\pi \end{cases}$

7.10. $y=\begin{cases} x^2-1; & x<0 \\ \cos x; & 0\le x<\pi/2 \quad; \\ x-\pi/2; & x>\pi/2 \end{cases}$

7.11. $y=\begin{cases} x+4; & x<-1 \\ x^2+2; & -1\le x\le 1; \\ 2x; & x>1 \end{cases}$

7.12. $y=\begin{cases} x+2; & x\le -1 \\ x^2+1; & -1<x\le 1; \\ 3-x; & x>1 \end{cases}$

7.13. $y=\begin{cases} -x; & x\le 0 \\ -(x-1)^2; & 0<x\le 2; \\ x-3; & x>2 \end{cases}$

7.14. $y=\begin{cases} \cos x; & x\le 0 \\ x^2+1; & 0<x<1; \\ x; & x\ge 1 \end{cases}$

7.15. $y=\begin{cases} -x; & x\le 0 \\ x^2; & 0<x\le 2; \\ x+1; & x>2 \end{cases}$

7.22. $y=\begin{cases} 3x-4; & x<0 \\ x^2-1; & 0\le x\le 2; \\ 3; & x>2 \end{cases}$

7.23. $y=\begin{cases} 2; & x<0 \\ x^2+1; & 0\le x\le 1; \\ 3x-1; & x>1 \end{cases}$

7.24. $y=\begin{cases} 3x+1; & x\le 0 \\ 2x^2-1; & 0<x\le 2; \\ 4x-3; & x>2 \end{cases}$

7.25. $y=\begin{cases} 2x+1; & x\le 0 \\ 1; & 0<x\le 2 \quad; \\ -x^2+4; & x>2 \end{cases}$

7.26. $y=\begin{cases} \sin x; & x\le 0 \\ x^2; & 0<x\le 1 \quad; \\ 2x-3; & x>1 \end{cases}$

7.27. $y=\begin{cases} \cos x; & x<0 \\ x^2+1; & 0\le x\le 1; \\ 1-2x; & x>1 \end{cases}$

7.29. $y=\begin{cases} 1-x^2; & x<0 \\ 2x-3; & 0\le x\le 2; \\ 1; & x>2 \end{cases}$

7.28. $y=\begin{cases} x^2+1; & x<0 \\ x+1; & 0\le x\le 2; \\ 1-3x; & x>2 \end{cases}$

7.30. $y=\begin{cases} 2x-4; & x<0 \\ -2x; & 0\le x\le 2. \\ x^2-8; & x>2 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ”

Задание 1. Найти производные y' данных функций:

1.01 а) $y=2x^3-\frac{3}{x^2}+2\sqrt[3]{x}+3$,

б) $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$,

в) $x-y+e^y \operatorname{arctg} x=0$

1.02 а) $y=\frac{3}{x}-2\sqrt[3]{x^5}+4x^2+3$,

б) $y=\ln tg\frac{2x+1}{4}$,

в) $y^2x=e^{\frac{y}{x}}$

1.03 а) $y=3x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}+x^3-1$,

б) $y=e^x\cdot\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$,

в) $x^4+y^4=x^2y^2$

1.04 а) $y=5x^3-\frac{8}{x^3}+x^3\sqrt{x}+2$,

б) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$,

в) $x-y^2+tg(x^2y)=0$

1.05 а) $y=4x^5-\frac{8}{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}+5$,

б) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

в) $x^3+3xy^2+2y^2-5x=1$

1.06 а) $y=\frac{2}{x}-3x^2+\sqrt[3]{x^7}+2$,

б) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,

в) $y^2=x^2-x\ln y+3$

1.07 а) $y=\sqrt[3]{x^7}+3x^2-\frac{4}{x}+2$,

б) $y=\operatorname{arctg}\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$

в) $x^2\ln y-y^2\ln x=1$

1.08 а) $y=\frac{9}{x^2}-\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{x}+3x^2$,

б) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$,

в) $y^2=\frac{y-x}{x+y}$

1.09 а) $y=\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x}-\sqrt[5]{x}-x^3$,

б) $y=-ctg^2\frac{x}{2}-2\ln\sin\frac{x}{2}$,

в) $y^2\sin x=\cos(x-y)$

1.10 а) $y=\frac{8}{x^3}+x^2\sqrt{x}-\frac{4}{x}+x^2$,

б) $y=tg^3 tgx+3tgtgx$,

в) $xe^{-\frac{1}{2}y}+ye^{-\frac{1}{2}x}=2$

1.11 а) $y=\frac{6}{x^4}+5x^2-\sqrt[3]{x^2}+4$,

б) $y=\frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$,

в) $e^{xy}+x^2+y^3=2$

1.12 а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3x}+2$,

б) $y=\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$,

в) $e^x+e^y-2e^{xy}=1$

1.13 а) $y=4x^5-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[5]{x^2}-1$,

б) $y=e^{-x}-\cos e^{-x}\cdot\sin e^{-x}$,

в) $\ln y=arctg\dfrac{y}{x}$

1.14 а) $y=4-\dfrac{1}{x^6}+3x\sqrt[3]{x^5}+7x^2$,

б) $y=\dfrac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$,

в) $\sqrt{x^2+y^2}=arctg\dfrac{y}{x}$

1.15 а) $y=x^2-8x^2\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}+2$,

б) $y=arctg\dfrac{2x^4}{1-x^8}$,

в) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$

1.16 а) $y=6+3x^2-\dfrac{2}{x^3}+5\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,

б) $y=2^{-\sqrt{x^2-2x+3}}$,

в) $\dfrac{y}{x}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}=x$

1.17 а) $y=4x^3+\dfrac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x^4}$,

б) $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$,

в) $\sin^2(2x-y^2)=3x+2$

1.18 а) $y=\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^3}-2x^6-x^2\sqrt{x}$,

б) $y=\dfrac{arctgx}{x}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

в) $x^2-3xy+y^2+x-5y=0$

1.19 а) $y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^5}+x^2$,

б) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$,

в) $y^2\cos x=\sin(3x^2)+y$

1.20 а) $y=3\sqrt{x}-\sqrt[7]{x^2}+2x^4-6$,

б) $y=arctg\sqrt{4x^2-1}$,

в) $y^2+x^2-\cos(x^2\cdot y^2)=2$

1.21 а) $y=1-x^3-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{8}{x^3}$,

б) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$,

в) $tg\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x+1$

1.22 а) $y=4-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x^2-\dfrac{9}{x^2}$,

б) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$,

в) $x^2+e^y-x\cdot\ln y=0$

1.23 а) $y=x^{-3}+2x\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{3}{x}+4$,

б) $y=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\sin x)$,

в) $x^4-xy^2+y^3-4y+5=0$.

1.24 а) $y=2-2x^{-2}+3\sqrt[3]{x^2}+4x$,

б) $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$,

в) $xy=arctg\dfrac{x}{y}$

1.25 а) $y=5-2x^{-5}+\sqrt[7]{x^5}+3x$,

б) $y=3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$

в) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=1$

1.26 а) $y=x^2+2x^{-4}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}+7$,

б) $y=\ln tg\left(\dfrac{1}{4}e^{2\sin x}\right)$,

в) $\dfrac{x}{y}=tg(x^2-y)$

1.27 а) $y = 8x^{-3} - \frac{2}{x} - \frac{7}{x^3} + x\sqrt[7]{x^2}$,

б) $y = 3^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$,

в) $e^x \sin y - e^y \cos x = 1$

1.28 а) $y = 9x^3 + \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4} - 4\sqrt{x}$,

б) $y = 2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2 + 4x - x^2}$,

в) $\frac{y}{x} = arctg\frac{y}{x}$

1.29 а) $y = 3 - 3x^5 + 7x^{-7} + \sqrt[5]{x}$,

б) $y = \ln\frac{x\ln x - 1}{x\ln x + 1}$,

в) $x\sqrt{y} + y^3\cos x = 3$

1.30 а) $y = -\frac{4}{x+1} + (x-3)^2 + 1 + \sqrt[3]{x^5}$,

б) $y = \frac{1}{3}\sin^3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sin^5\sqrt{x} + \frac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$

в) $(x - y)^2 + \cos y^2 = 4$

Задание 2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

2.01. $y = \frac{4x}{4 + x^2}$

2.02. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

2.03. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

2.04. $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$

2.05. $y = (x-1)\cdot e^{3x+1}$

2.06. $y = (2 + x^2)\cdot e^{-x^2}$

2.07. $y = \frac{2x^2 + 4x + 2}{2 - x}$

2.08. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$

2.09. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

2.10. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$

2.11. $y = e^{2x - x^2}$

2.12. $y = \ln(4 - x^2)$

2.13. $y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$

2.14. $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$

2.15. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

2.16. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$

2.17. $y = -\frac{x^2}{(x+2)^2}$

2.18. $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$

2.19. $y = x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

2.20. $y = x^2\cdot e^{\frac{2}{x}}$

2.21. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

2.22. $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

2.23. $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$

2.24. $y = \ln(x^2 - 2x + 6)$

2.25. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$

2.26. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

2.27. $y = (x-1)\cdot e^{4x+2}$

2.28. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

2.29. $y = \sqrt{2x^2 - x^4}$

2.30. $y = x^3\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Задание 3. Найти уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\vec{r}=\vec{r}(t)t$ в точке t_0.

3.01. $\vec{r}=(t-\sin t)\cdot\vec{i}+(1-\cos t)\cdot\vec{j}+2\sin t\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{2};$

3.02. $\vec{r}=6t\cdot\vec{i}+3t^2\cdot\vec{j}+t^3\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.03. $\vec{r}=2\sin t\cdot\vec{i}+3tgt\cdot\vec{j}+2\cos t\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4};$

3.04. $\vec{r}=3cht\cdot\vec{i}+3sht\cdot\vec{j}+3at\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.05. $\vec{r}=e^t\cdot\vec{i}+e^{-t}\cdot\vec{j}+\sqrt{2}\cdot t\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.06. $\vec{r}=2\sin^2 t\cdot\vec{i}+2\cos^2 t\cdot\vec{j}+\sin 2t\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4};$

3.07. $\vec{r}=\ln(t-3)\cdot\vec{i}-t\cdot\vec{j}+(t^2-16)\cdot\vec{k},\quad t_0=4;$

3.08. $\vec{r}=(2-t)\cdot\vec{i}+\sqrt{25-t^2}\cdot\vec{j}+t^2\cdot\vec{k},\quad t_0=4;$

3.09. $\vec{r}=e^t\cdot\vec{i}+(1+t^2)\cdot\vec{j}+arctgt\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.10. $\vec{r}=e^t\cos t\cdot\vec{i}+e^t\sin t\cdot\vec{j}+e^t\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.11. $\vec{r}=(t-\sin t)\cdot\vec{i}+(1-\cos t)\cdot\vec{j}+4\sin\frac{t}{2}\cdot\vec{k},\quad t_0=\pi;$

3.12. $\vec{r}=(t^3-3)\cdot\vec{i}+(t^2+2)\cdot\vec{j}+\ln t\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.13. $\vec{r}=(t^3+8t)\cdot\vec{i}+t^2\cdot\vec{j}+(5t^5+3t)\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.14. $\vec{r}=2t\cdot\vec{i}-3t\cdot\vec{j}+\ln tgt\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4};$

3.15. $\vec{r}=4t\cdot\vec{i}+\ln t\cdot\vec{j}+t^2\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.16. $\vec{r}=\ln\cos t\cdot\vec{i}+\ln\sin t\cdot\vec{j}+\sqrt{2}\cdot t\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{4};$

3.17. $\vec{r}=(\cos t+t\sin t)\cdot\vec{i}+(\sin t-t\cos)\cdot\vec{j}+t\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{2};$

3.18. $\vec{r}=(t^2+1)\cdot\vec{i}+\cos t\cdot\vec{j}+e^t\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.19. $\vec{r}=(t+1)^2\cdot\vec{i}+t^3\cdot\vec{j}+\sqrt{t^2+1}\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.20. $\vec{r}=(3t-t^3)\cdot\vec{i}+3t^2\cdot\vec{j}+(3t+t^2)\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.21. $\vec{r}=\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\vec{i}+\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\vec{j}+\ln\sin t\cdot\vec{k},\quad t_0=\frac{\pi}{2};$

3.22. $\vec{r}=ch^2t\cdot\vec{i}+sht\cdot cht\cdot\vec{j}+sh^2t\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.23. $\vec{r}=e^t\sin t\cdot\vec{i}+\vec{j}+e^t\cos t\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.24. $\vec{r}=(1+3t+2t^2)\cdot\vec{i}+(2-2t+5t^2)\cdot\vec{j}+(1-t^2)\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.25. $\vec{r}=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}+cht\cdot\vec{k},\quad t_0=0;$

3.26. $\vec{r}=\sqrt{5-t^2}\cdot\vec{i}-(2t-t^2)\cdot\vec{j}+(5-2t^2)\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.27. $\vec{r}=t^2\cdot\vec{i}+(t^3-2)\cdot\vec{j}+t^6\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.28. $\vec{r}=\sqrt{t^3+3}\cdot\vec{i}-\ln(2t-1)\cdot\vec{j}+t^3\cdot\vec{k},\quad t_0=1;$

3.29. $\vec{r} = 2tgt \cdot \vec{i} + 3\cos t \cdot \vec{j} + 3\sin t \cdot \vec{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{4};$

3.30. $\vec{r} = e^{t+1} \cdot \vec{i} - (t^2 - 3t + 1) \cdot \vec{j} + \sqrt{2t+6} \cdot \vec{k}, \quad t_0 = -1;$

Задание 4. Исследовать на экстремум следующие функции:

4.01 $z = -\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1;$

4.02 $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$

4.03 $z = x^2 + y^2 + xy + 6x - 9y;$

4.04 $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y;$

4.05 $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20;$

4.06 $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2;$

4.07 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

4.08 $z = -3x^2 - 3y^2 + 6(x - y);$

4.09 $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y;$

4.10 $z = xy + x^2 + y^2 - 3x - 6y;$

4.11 $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y;$

4.12 $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5;$

4.13 $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10;$

4.14 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$

4.15 $z = y^3 - 6xy - x^2 + 5;$

4.16 $z = 2y^3 - x^2 + 2xy + 4;$

4.17 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$

4.18 $z = 2x^3 + xy^2 + 3x^2 - y^2 + 1;$

4.19 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y;$

4.20 $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y);$

4.21 $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2);$

4.22 $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1;$

4.23 $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y;$

4.24 $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y - 3;$

4.25 $z = x^3 + y^3 - 3xy;$

4.26 $z = x^2 - 2xy + 4y^3;$

4.27 $z = e^{2x}(x^2 + y^2 + 2y) + 3;$

4.28 $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y};$

4.29 $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y);$

4.30 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y + 5;$

Задание 5:

5.01 – 5.10. Выпуск некоторым предприятием промышленной продукции (Y) по годам семилетки (X) характеризуется следующими данными:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y (усл.ед.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

По методу МНК построить эмпирическую формулу $y = ax + b$, отражающую рост объема продукции за семилетку, и определить прогноз объема выпуска на восьмой год. Сделать чертеж.

Необходимые числовые данные приведены в табл. 1.

Таблица1.

Вариант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
01	16,00	26,06	36,51	47,16	57,01	67,32	78,21
02	1,29	4,77	8,63	12,05	14,97	19,00	23,31
03	2,29	6,16	11,63	16,81	19,96	25,64	29,31
04	7,05	11,12	16,39	20,06	26,35	30,40	34,97
05	10,73	10,68	11,93	12,08	12,13	12,48	13,54
06	12,18	12,81	13,00	14,07	14,97	15,69	15,96
07	11,04	12,05	12,16	13,57	13,00	14,59	15,63
08	13,14	14,35	14,51	16,17	16,38	18,19	18,62
09	14,34	15,14	16,64	17,04	17,15	18,84	20,14
10	11,77	13,18	13,99	14,78	16,21	17,93	19,38

5.11 – 5.20. При различных значениях признака (X) было семь раз измерено значение признака (Y) . Полученные результаты приведены в таблице:

X	0,30	0,91	1,52	2,13	2,74	3,35	3,96
Y (усл.ед.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Предполагая, что теоретически зависимость между значениями признаков выражается функцией $y = ax + b$, по методу МНК найти параметры a и b.

Каково значение признака Y при x = *4,25?*

Необходимые числовые данные приведены в табл. 2.

Таблица2.

Вариант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
11	3,29	3,41	3,72	4,25	4,36	4,58	5,23
12	1,51	1,62	2,25	2,46	2,57	2,97	3,42
13	4,00	3,65	3,78	3,17	3,06	2,74	2,75
14	3,82	3,55	3,17	3,00	2,52	2,55	2,19
15	4,19	4,26	4,44	5,01	5,19	5,36	5,74
16	4,12	4,33	4,45	4,86	4,97	5,29	5,52
17	3,82	4,23	5,14	5,75	6,06	6,87	7,48
18	4,74	4,54	5,22	5,73	6,59	7,07	7,95
19	5,83	5,02	4,71	4,00	3,19	2,58	2,17
20	2,38	2,52	3,17	3,59	3,81	4,06	4,69

5.21 – 5.30. На химическом производстве в течении семи рабочих смен получены следующие данные о зависимости выхода продукта $Y(кг/ч)$ от температуры реакции:

X	32	45	51	64	73	80	83
Y (усл.ед.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Предполагая, что зависимость между выходом продукта и температурой реакции линейная $(y = at + b)$, найти по методу МНК параметры a и b.

Каков ожидаемый выход продукта при $t = 90C^o$?

Необходимые числовые данные приведены в табл.3.

Таблица3.

Вариант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
21	15,3	39,3	52,7	76,0	94,8	89,5	114,8
22	34,7	50,2	54,3	63,0	75,5	81,3	87,8
23	32,3	30,8	26,8	22,3	16,8	10,3	8,8
24	48,7	50,0	53,0	53,9	53,4	53,5	55,2
25	69,0	75,5	79,6	90,3	94,3	96,8	100,3
26	143,6	140,7	142,3	139,2	135,4	132,1	130,4
27	56,9	65,3	70,1	82,5	87,7	97,3	100,7
28	65,8	71,6	75,2	83,7	92,4	94,6	95,4
29	126,4	125,5	120,7	117,8	113,1	115,2	112,0
30	58,4	61,6	69,3	71,2	76,8	75,6	80,8

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КР№1

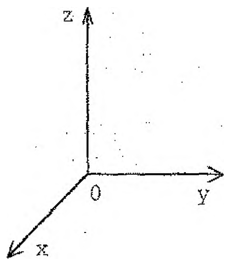
«Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и введение в математический анализ»

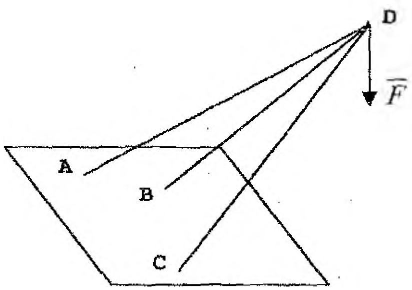
Задание 1. Смотрите условие в соответствующих заданиях.

$$\bar{a} = (3;-1;0);\ \ \bar{b} = (2;3;1);\ \ \bar{c} = (-1;4;3);\ \ \bar{d} = (2;3;7)$$

Решение:

Погрузим данную пространственную систему из трех стержней в прямоугольную декартову систему координат:





Вычислим: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot3+(-1)\cdot1\cdot(-1)+2\cdot4\cdot0-(-1)\cdot3\cdot0-$

$-4\cdot1\cdot3-2\cdot(-1)\cdot3=27+1-12+6=22\neq0$

Следовательно, система статически определима и векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис. Тогда вектор $\bar{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\bar{d}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{b}+\gamma\cdot\bar{c} \qquad (1)$$

или $(2,3,7)=\alpha\cdot(3,-1,0)+\beta\cdot(2,3,1)+\gamma\cdot(-1,4,3)$.

Из последнего равенства получим систему:

$$\begin{cases}3\alpha+2\beta-\gamma=2\\ -\alpha+3\beta+4\gamma=3\\ \beta+3\gamma=7\end{cases} \qquad (2)$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим: $\Delta=22\neq0$, система (2) имеет единственное решение.

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 3 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 3\end{vmatrix}=66;\quad \Delta_\beta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 4\\ 0 & 7 & 3\end{vmatrix}=-44;\quad \Delta_\gamma=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{vmatrix}=66;$$

$$\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}=\frac{66}{22}=3;\qquad \beta=\frac{\Delta_\beta}{\Delta}=-\frac{44}{22}=-2;\qquad \gamma=\frac{\Delta_\gamma}{\Delta}=3.$$

$\bar{d}=3\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}$. Под действием силы $\bar{F}$, стержни AD и CD растягиваются в 3 раза, а стержень BD сжимается в 2 раза.

Задание 2. (Текст условия см. в заданиях).

$$\begin{cases}2x+3y+2z=9\\ x+2y-3z=14\\ 3x+4y+z=16\end{cases} \qquad (1)$$

Решение:

а) (метод Гаусса). По данной системе составим матрицу и проведем необходимые элементарные преобразования строк

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 9\\ 1 & 2 & -3 & 14\\ 3 & 4 & 1 & 16\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 9\\ 0 & -1 & 8 & -19\\ 0 & 1 & 4 & -5\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 9\\ & -1 & 8 & -19\\ & & 12 & -24\end{pmatrix}$$

Первая строка записана без изменений во всех преобразованиях. Вторая строка второго преобразования получена из первой строки вычитанием удвоенных элементов второй строки первого преобразования. Третья строка второго преобразования получена вычитанием из утроенной первой строки, удвоенной третьей строки первого преобразования. Третья строка третьего преобразования получена сложением второй и третьей строк второго преобразования.

Последней матрице третьего преобразования соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ -y+8z=-19 \\ 12z=-24 \end{cases} \qquad (2)$$

Получением системы (2) из (1) завершен прямой ход метода Гаусса. Из (2), двигаясь снизу вверх, реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z=-\frac{24}{12}=-2; \quad y=8z+19=19-16=3; \quad x=\frac{1}{2}(9-2z-3y)=\frac{1}{2}(9+4-9)=2.$$

Итак: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases}$ - решение системы (1), следовательно система (1) совместна.

б) Матричный метод решения.

По системе (1) составим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \chi=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \text{ тогда (1) имеет вид } A\cdot X=B \qquad (3)$$

Решение матричного уравнения (3):

$X=A^{-1}\cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица для А. Матрицу A^{-1} находим по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$ где а) $\Delta\neq 0$ - определитель матрицы А;

б) A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы А.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ откуда}$$

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ -18 + 14 + 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$.

<u>Задание 3.</u> Даны вершины треугольника ABC: A(4;3), B(-3;3), C(2;7).

Решение:

1) $Пр_{\overline{BC}}\overline{AB} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|}$ (из скалярного произведения $(\overline{AB} \cdot \overline{BC})$). Находим

$\overline{AB} = (-7;0)$; $\overline{BC} = (5;4)$. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = (-7) \cdot 5 + 0 \cdot 4 = -35$.

$|\overline{BC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$. $Пр_{\overline{BC}}\overline{AB} = -\dfrac{35}{\sqrt{41}}$.

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{BA} \times \overline{BC}\right|$ (из векторного произведения $\overline{BA} \times \overline{BC}$).

$\overline{BA} = (7;0)$; $\overline{BC} = (5;4)$. $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 28\ \bar{k}$.

$\left|\overline{BA} \cdot \overline{BC}\right| = \left|28 \cdot \bar{k}\right| = 28 \cdot \left|\bar{k}\right| = 28,\ \left|\bar{k}\right| = 1.$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$

3) Используя формулу уравнения прямой, проходящей через две точки:

$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$, где $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$. Тогда: $\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}$;

$6(x-4) = 7(y-3)$, $6x - 7y - 3 = 0$ - уравнение прямой AB.

4) Для полученного уравнения прямой AB: $K_{AB} = \frac{6}{7}$; так как $CH \perp AB$, то

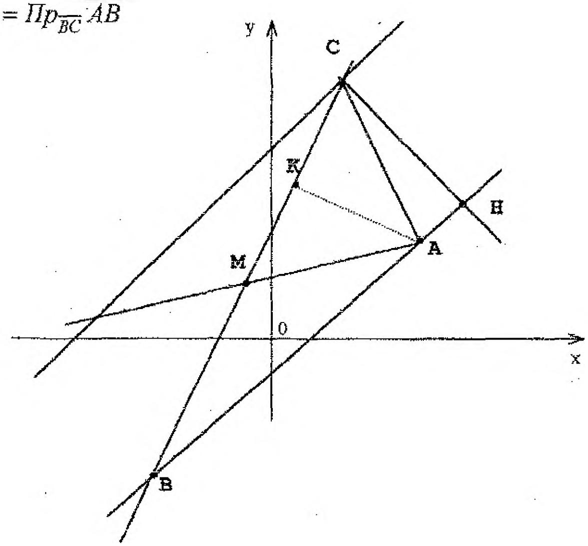
$K_{CH} \cdot K_{AB} = -1$ (условие перпендикулярности).

$K_{CH} \cdot \frac{6}{7} = -1 \Rightarrow K_{CH} = -\frac{7}{6}$. Тогда по формуле уравнения прямой через точку $A(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом K: $y - y_0 = K(x - x_0)$,

получим: $y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2)$ или $7x + 6y - 56 = 0$ - уравнение высоты CH.

5) Решение задачи проиллюстрировано на чертеже.

$KB = Пр_{\overline{BC}}\overline{AB}$



Задание 4. Даны четыре точки: $A_1(4;7;8)$, $A_2(-1;13;0)$, $A_3(2;4;9)$, $A_4(1;8;9)$.

Решение:

1) Найдем объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ по формуле:

$V_{пир}=\frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3})\cdot\overline{A_1A_4}\right|$; $\overline{A_1A_2}=(-5;6;-8)$; $\overline{A_1A_3}=(-2;-3;1)$;

$\overline{A_1A_4}=(-3;1;1)$.

$$(\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3})\cdot\overline{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-5 & 6 & -8\\ -2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=20-6+88=102.$$

$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 102=17$ (куб. ед.).

2) Для нахождения угла между прямыми (A_1A_2) и (A_1A_4), найдем угол между направляющими векторами этих прямых, т.е. векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$.

$$\cos\varphi=\cos(\overline{A_1A_2}\quad\overline{A_1A_4})=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_4}\right|};$$

$$\cos\varphi=\frac{-5\cdot(-3)+6\cdot1-8\cdot1}{\sqrt{25+36+64}\cdot\sqrt{9+1+1}}=\frac{13}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{11}}\approx 0.3502,\text{ тогда }\ \varphi\approx 69^\circ 30'.$$

3) Уравнение плоскости по трем точкам, не лежащим на одной прямой:

$A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_3)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ находим в виде:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$ Для нашего случая имеем:

$$\begin{vmatrix}x-4 & y-7 & z-8\\ -5 & 6 & -8\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель по элементам первой строки, получим:

$-18(x-4)+21(y-7)+27(z-8)=0$ или $6(x-4)-7(y-7)-9(z-8)=0$

$6x-7y-9z+97=0$ - уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Составим уравнение прямой A_4M перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$, для этого направляющий вектор прямой приравняем к нормальному вектору плоскости $A_1A_2A_3$, т.е. $\overline{S}=\overline{n}=(6;-7;-9)$.

Уравнение A_4M имеет вид: $\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}$.

Задание 5. $r=\dfrac{3}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$ (смотрите условие в задании)

Решение:

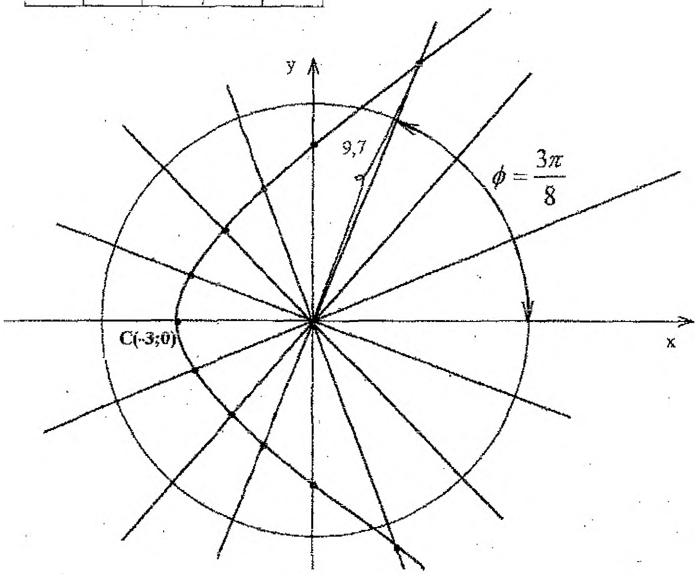
Упростим (если возможно) задание функции: $\sin^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)$, тогда

$$r=\frac{3}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}=\frac{6}{1-\cos\varphi} \quad (1)$$

Составим таблицу, в которой укажем значения φ через промежуток π/8, начиная от φ=0 и соответствующие им значения функции (1): (π/8≈22°30')

φ_i	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$
r_i	∞	78,8	20,1	9,7	6	4,3	3,5	3,1	3,1	3,5	4,3	6

φ_i	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
r_i	9,7	20,1	78,8	∞



Построив найденные точки $M_i(\varphi_i;r_i)$ и соединив их плавной линией, получим достаточно точный график искомой кривой.

Используя формулы

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \ge 0 \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$ и подставив их в (1), получим:

$r(1-\cos\varphi) = 6$ или $r - r\cos\varphi = 6$; $r - x = 6$; $r = x + 6$; обе части его возведем в квадрат:

$r^2 = (x+6)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 12x + 36$; $y^2 = 12(x+3)$ - уравнение параболы.

Вершина: С(-3;0); Р=6; О(0;0) – фокус параболы; Р- параметр параболы (расстояние от фокуса до директриссы).

<u>Задание 6.</u> Найти пределы:

Решение:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{7x^2-x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^2}}{7-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A}{x^n} = 0 \\ \text{n} > 0;\ \text{A} = \text{const}\end{matrix}\right| = \frac{2}{7}$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{2}$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2 2x\cdot\cos 2x}{2x\cdot\sin 2x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

При решении примера использована обобщенная форма I замечательного предела $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$; при $f(x) = 2x$; а также теорема о пределе непрерывной функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}=(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to 2}(1+(3x-6))^{\frac{2x}{x^2-4}}=$

$$=\lim_{x\to 2}\left((1+(3x-6))^{\frac{1}{3x-6}}\right)^{\frac{(3x-6)2x}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left((1+(3x-6))^{\frac{1}{3x-6}}\right)^{\frac{6x(x-2)}{(x-2)(x+2)}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left((1+(3x-6))^{\frac{1}{3x-6}}\right)^{\frac{6x}{x+2}}=\left(\lim_{x\to 2}(1+(3x-6))^{\frac{1}{3x-6}}\right)^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x}{x+2}}=e^3$$

При вычислении этого предела использована обобщенная форма II замечательного предела: $\lim\limits_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$ и теорема о пределе сложной показательно-степенной функции: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)^{\varphi(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$

Задание 7.

$$y=\begin{cases}-x,\ \text{если } x\le 0\\ \sin x,\ \text{если } 0<x\le\pi\\ x-2,\ \text{если } x>\pi\end{cases}$$

Решение

Так как функции $y=-x$; $y=\sin x$; $y=x-2$ непрерывны при любых $x\in R$, то они непрерывны и на указанных промежутках.

Исследуем точки: $x_1=0$; $x_2=\pi$

а) $x_1=0$; $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(-x)=0$;

$f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}\sin x=0$

Так как $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}f(x)=f(0)=0$, то в т. $x=0$ функция непрерывна.

б) $x_2=\pi$; $\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi-0}\sin x=0$;

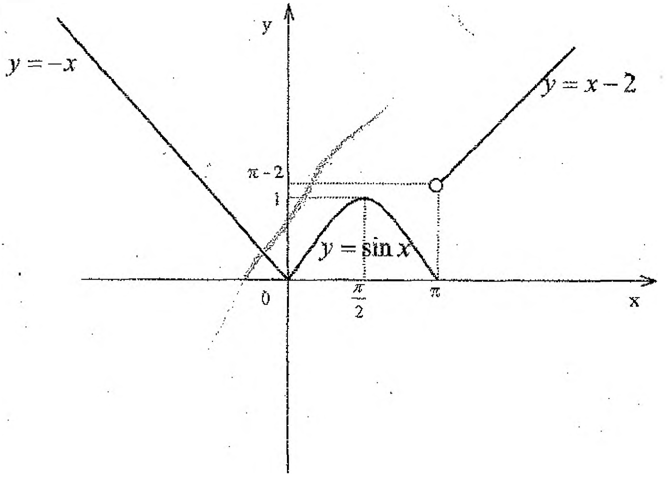
$f(\pi)=\sin\pi=0$ $\lim\limits_{x\to\pi+0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi+0}(x-2)=\pi-2$

условие непрерывности не выполняется, следовательно $x_2=\pi$ - точка разрыва.

Вычислим $h=f(\pi+0)-f(\pi-0)=\pi-2-0=\pi-2\neq 0$ (где h – скачок функции в точке).

Так как $h=\pi-2\neq 0$, то $x_2=\pi$ точка разрыва I рода.

Выполним чертёж



РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КР№2

«Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

<u>Задание 1</u>. Найти производные данных функций

а) $y=10+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4x}+\frac{2}{x\sqrt{x}}$.

Решение

Применяя таблицу производных и известные правила дифференцирования, находим:

$$y'=\left(10+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4x}+\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)'=\left(10+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}+2x^{-\frac{3}{2}}\right)'=$$

$$=x^2+\frac{-1}{4x^2}-2\cdot\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=x^2-\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{\sqrt{x^5}}.$$

б) $y=\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)'=\frac{1}{2}\left(\ln tg\frac{x}{2}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\left(tg\frac{x}{2}\right)'-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\cos x)'\cdot\sin^2 x-\cos x\cdot(\sin^2 x)'}{\sin^4 x}=\frac{1}{2}\cdot ctg\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 x+\cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x}=\frac{1}{4}\cdot ctg\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}+\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin x}+\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}=\frac{1}{2\sin x}\left(1+\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\frac{1}{\sin^3 x}.$$

При нахождении производной воспользовались правилами дифференцирования суммы, дроби, сложной функции и таблицей производных.

в) $x^2+3y^3-\frac{x^2}{y}=0$.

Решение.

Имеем неявно заданную функцию $y=y(x)$. Дифференцируем обе части равенства по x, считая y функцией от x.

$$2x+3\cdot 3y^2\cdot y'-\frac{2xy-x^2y'}{y^2}=0.$$

Применили правила дифференцирования дроби и сложной функции. Выразим из полученного равенства y':

$$2x+9y^2\cdot y'-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}y'=0.$$

$$y'\left(9y^2+\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{2x}{y}-2x.$$

$$y'=\frac{\frac{2x}{y}\cdot(1-y)}{9y^2+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{2x\cdot(1-y)y^2}{y\left(9y^4+x^2\right)}=\frac{2xy\cdot(1-y)}{9y^4+x^2}.$$

Задание 2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\frac{x^2}{x-1}$ и используя результаты исследования, построить график.

Решение.

Для исследования понадобятся первая и вторая производные функции. Найдем их

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Проведем полное исследование функции.

1. Найдем область определения

$D(y)=(-\infty;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

2. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$, то $x=1$ - точка разрыва второго рода. Прямая $x-1=0$ - вертикальная асимптота. В точке $(0;\,0)$ график функции пересекает оси координат.

3. Функция не является четной, нечетной, периодической.

4. Исследуем функцию на монотонность.

Первая производная y' равна нулю при $x_1=0$, $x_2=2$ и не существует в точке $x_3=1$. Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы $(-\infty;\,0)$, $(0;\,1)$, $(1;\,2)$, $(2;\,+\infty)$. Внутри каждого из интервалов сохраняется знак производной: $y'>0$ в интервалах $(-\infty;\,0)$ и $(2;\,+\infty)$, $y'<0$ в интервалах $(0;\,1)$ и $(1;\,2)$. Это означает, что функция возрастает в интервалах $(-\infty;\,0)$ и $(2;\,+\infty)$, убывает в интервалах $(0;\,1)$ и $(1;\,2)$.

5. Так как при переходе через точку $x_1=0$ y' меняет знак с «+» на «-», то $x_1=0$ - точка максимума функции, $y_{max}=y(0)=0$. Так как при переходе

через точку $x_2=2$ y' меняет знак с «-» на «+», то $x_2=2$ - точка минимума функции, $y_{min}=y(2)=4$.

6. Вторая производная $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$ не существует в точке $x_3=1$. Так как $y''>0$ на интервале $(1;+\infty)$, то на этом интервале график функции вогнут. На интервале $(-\infty;1)$ $y''<0$ и график функции выпукл. Точек перегиба нет.

7. График функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$, если существуют пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

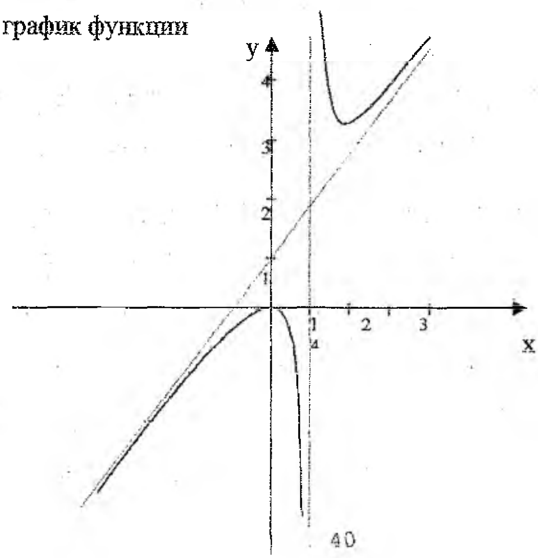
В нашем случае

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1.$$

Таким образом, у графика функции существует одна наклонная асимптота $y=x+1$.

8. Строим график функции



Задание 3. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии

$$\vec{r} = (t^3 + t - 1)\vec{i} + (2t^2 + 3t + 2)\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k}, \quad \text{в точке } t_0 = 1.$$

Решение

Каноническое уравнение касательной к кривой $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

В данном случае $x(t) = t^3 + t - 1$, $y(t) = 2t^2 + 3t + 2$, $z(t) = t^2 + 1$;

$x_0 = x(t_0) = x(1) = 1$, $y_0 = y(t_0) = y(1) = 7$, $z_0 = z(t_0) = z(1) = 2$; $M_0(1; 7; 2)$.

Найдем

$$x'(t) = 3t^2 + 1, \qquad y'(t) = 4t + 3, \qquad z'(t) = 2t;$$

$$x'(t_0) = x'(1) = 4, \quad y'(t_0) = y'(1) = 7, \quad z'(t_0) = z'(1) = 2.$$

Тогда

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-7}{7} = \frac{z-2}{2}$$ - уравнение касательной,

$$4(x-1) + 7(y-7) + 2(z-2) = 0$$ или

$$4x + 7y + 2z - 57 = 0$$ - уравнение нормальной плоскости.

Кривизну пространственной линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вычислим по формуле

$$K = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}.$$

Найдем вектора $\vec{r}' = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ и $\vec{r}'' = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$.

$$\vec{r}' = (3t^2 + 1)\vec{i} + (4t + 3)\vec{j} + 2t\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{r}'' = 6t\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

При $t_0 = 1$ получим

$$\vec{r}' = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{r}'' = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Тогда векторное произведение $\vec{r}'\times\vec{r}''$ равно вектору

$$\vec{r}'\times\vec{r}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 7 & 2\\ 6 & 4 & 2\end{vmatrix}=6\vec{i}+4\vec{j}-26\vec{k}.$$

Вычислим модуль векторного произведения

$$\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|=\sqrt{6^2+4^2+26^2}=\sqrt{36+16+676}=\sqrt{729}=27$$

и модуль вектора $\vec{r}'$

$$\left|\vec{r}'\right|=\sqrt{4^2+7^2+2^2}=\sqrt{16+49+4}=\sqrt{69}.$$

Тогда

$$K=\frac{27}{\left(\sqrt{69}\right)^3}=\frac{27}{69\sqrt{69}}=\frac{9}{23\sqrt{69}}\approx 0{,}047.$$

Задание 4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy+1$.

Решение

Найдем частные производные $z'_x=3x^2-3y$, $z'_y=3y^2-3x$.

Приравнивая их к нулю, получим систему

$$\begin{cases}3x^2-3y=0,\\ 3y^2-3x=0.\end{cases}$$

Решая систему методом исключения, находим

$$\begin{cases}y=x^2,\\ x^4-x=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}y=x^2,\\ x\left(x^3-1\right)=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0.\end{cases}\quad \text{и} \quad \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1.\end{cases}$$

Таким образом, получим две точки $M_1(0;\,0)$ и $M_2(1;1)$, в которых функция может иметь экстремум.

Найдем вторые частные производные $z''_{xx}=6x$, $z''_{yy}=6y$, $z''_{xy}=-3$.

Рассмотрим точку $M_1(0;\,0)$. Вычислим

$$A=z''_{xx}(M_1)=0,\qquad B=z''_{xy}(M_1)=-3,\qquad C=z''_{yy}(M_1)=0.$$

Тогда $\Delta=AC-B^2=-9$. Так как $\Delta<0$, то в точке $M_1(0;\,0)$ экстремума нет.

В точке $M_2(1;1)$, имеем

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6, \qquad B = z''_{xy}(M_2) = -3, \qquad C = z''_{yy}(M_2) = 6.$$

Следовательно $\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 = 27$. Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в точке $M_2(1;1)$ у функции минимум $z_{\min} = z(1;1) = 0$.

Ответ: в точке $M_2(1;1)$ функция имеет минимум, $z_{\min} = 0$.

__Задание 5.__ При различных значениях признака X было 5 раз измерено значение признака Y. Полученные результаты приведены в таблице.

X	1	2	3	4	5
Y	5,5	6,.5	5,0	3,0	3,5

Предполагая, что зависимость между значениями признаков выражается линейной функцией $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов найти параметры a и b. Каково значение признака Y при $x = 6$? Сделать чертеж.

Решение

Наилучшими будут те значения параметров a и b, которые обращают в минимум сумму $\quad S(a, b) = \sum_{i=1}^{5}(ax_i + b - y_i)^2$.

В точке минимума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i + 5b = \sum_{i=1}^{5} y_i \end{cases}$$

Составим расчетную таблицу

x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
1	1	5,5	5,5
2	4	6,5	13,0
3	9	5,0	15,0
4	16	3,0	12,0
5	25	3,5	17,5
15	55	23,5	63

В нашем случае система примет вид

$$\begin{cases} 55a + 15b = 63, \\ 15a + 5b = 23{,}5. \end{cases}$$

Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0,$$

то система имеет единственное решение $a = -0{,}75$ и $b = 6{,}95$, которое можно найти, например, по формулам Крамера.

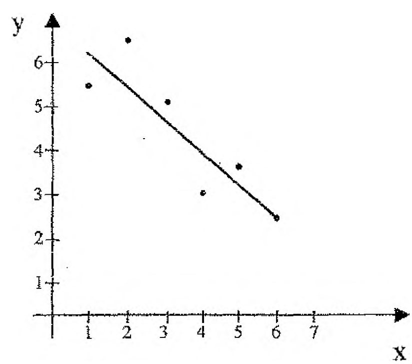
Итак, искомая эмпирическая формула имеет вид

$$y = -0{,}75x + 6{,}95.$$

Вычислим

$$y(6) = -0{,}75 \cdot 6 + 6{,}95 = -4{,}5 + 6{,}95 = 2{,}45.$$

Сделаем рисунок



ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. - Мн.: ВШ, 1984, ч.1.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1985, ч.1.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П.Рябушко). – Мн.: ВШ, ч. 1-3, 1990-1991.
4. Гусак А.А. Высшая математика, том 1. – Мн.: Тетра Системс,1998.
5. Гусак А.А. Высшая математика, том 2. – Мн.: Тетра Системс,1998.
6. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Мн.: Тетра Системс,1998.
7. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. – Мн.: Тетра Системс,1998.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Лизунова Ирина Владимировна,
Мороз Людмила Трофимовна.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Лизунова И.В.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик.Е.В.

Подписано к печати 21.11.2001. Формат 60x84 1/16. Бумага «Чайка».. Усл. п.л. 2,6. Уч. изд. л. 2,75. Тираж 200 экз. Заказ № 113 . Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.