МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА

Методические указания для магистрантов и аспирантов

Брест 2016

УДК 517.518.122(07)
В24

В настоящих методических указаниях рассматривается интеграл Лебега, его основные свойства. Также приведены некоторые теоретические сведения о функции ограниченной вариации, рассмотрен ряд примеров.

Данное издание предназначено для магистрантов и аспирантов изучающих экономику и финансы. Некоторые утверждения приведены с доказательствами. Остальные доказательства можно найти в учебниках, список которых приведен в конце указаний.

Составители: Липская Н.А., старший преподаватель
Яблонский О.Л., доцент
Жук А.И., доцент

Рецензент:

ситет», 2016

ВВЕДЕНИЕ

Понятие интеграла Римана, известное из элементарного курса анализа, применимо лишь к таким функциям, которые или непрерывны, или имеют «не слишком много» точек разрыва. Для измеримых функций, которые могут быть разрывны всюду, где они определены (или вообще могут быть заданы на абстрактном множестве, так, что для них понятие непрерывности просто не имеет смысла), римоновская конструкция интеграла становится непригодной. Вместе с тем, для таких функций имеются аналоги в теории измерений: это интегралы Лебега и Стилтьеса.

Данные методические указания предназначены для магистрантов и аспирантов, изучающих экономику и финансы. Некоторые утверждения приведены с доказательствами. Остальные доказательства можно найти в учебниках, список которых приведен в конце.

I. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА

1.1. Мера Лебега

На числовой прямой возьмем отрезок $[a,b]$. Подмножества этого отрезка одного из видов $\alpha < x < \beta$, $\alpha \le x \le \beta$, $\alpha \le x < \beta$, $\alpha < x \le \beta$ называем промежутком с концами α, β (промежуток пуст, если $\alpha > \beta$).

Определение 1.1. *Мерой* промежутка $|\alpha,\beta|$ считаем его длину, т. е. число $m(|\alpha,\beta|) = \beta - \alpha$ (если промежуток пуст, то его мера равна нулю).

Определение 1.2. Подмножество D отрезка $[\alpha,\beta]$ называется *элементарным*, если оно является объединением конечного числа непересекающихся промежутков B_k.

Определим меру элементарного множества следующим образом:

$$m(D) = \sum_k m(B_k).$$

Определение 1.3. *Верхней мерой* $\mu^*(A)$ множества $A \in [a,b]$ называется число

$$\inf_{A \subset D} m(D),$$

где *нижняя грань берется по всевозможным элементарным множествам* D, содержащим A.

Определение 1.4. *Нижней мерой* $\mu_*(A)$ множества A называется число

$$b - a - \mu^*([a,b] \setminus A).$$

Определение 1.5. Множество A называется *измеримым в смысле Лебега*, если

$$\mu^*(A) = \mu_*(A).$$

Определение 1.6. Общее значение $\mu(A)$ верхней и нижней мер для измеримого множества A называется его *лебеговой мерой*.

Для измеримости множества A необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало элементарное множество D, так что

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon,$$

где $A \Delta B$ — симметрическая разность множеств A и D. Т. е. измеримыми являются те и только те множества, которые могут быть с любой степенью точности аппроксимированы элементарными множествами.

Свойства меры Лебега и измеримых по Лебегу множеств:

1. Объединение и пересечение счетного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами.

2. (σ*–аддитивность*) Если последовательность $\{A_n\}$ непересекающихся измеримых множеств такова, что $A = \bigcup_n A_n$, то

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

3. Всякое счетное множество измеримо, и его мера равна нулю.

Выше рассмотрены те множества на прямой, которые являются подмножествами отрезка $[a, b]$. Избавиться от этого ограничения можно следующим образом: представим всю прямую как объединение отрезков $E_n = \{n \le x \le n+1\}$, n — целое.

Определение 1.7. *Множество* A называется *измеримым* , если его пересечение $A_n = A \bigcap E_n$ с каждым из этих отрезков измеримо.

Определение 1.8. Если ряд $\sum_n \mu(A_n)$ сходится, то его сумму называют *мерой множества* A. В противном случае говорят, что множество A имеет *бесконечную меру*.

Таким образом, построена лебегова мера на прямой. Аналогично может быть построена лебегова мера на плоскости или вообще на любом конечном евклидовом пространстве. В каждом из этих случаев мера строится по одному и тому же принципу: исходя из меры для некоторой системы простейших множеств определяют меру вначале для конечных объединений таких множеств, а потом распространяют ее на более широкий класс множеств — на множества, измеримые по Лебегу. Определения и свойства измеримых множеств сохраняются в пространствах любой размерности.

1.2. Измеримые по Лебегу функции

Определение 2.1. Функция $f : [a, b] \to R$ называется *измеримой по Лебегу*, если $\forall c \in R$ измеримо по Лебегу множество

$$\{x \mid f(x) < c\}.$$

Определение 2.2. Функция $f(x)$ называется *простой*, если она измерима и принимает не более чем счетное число значений.

Функция $f(x)$, принимающая конечное число различных значений $y_1, \ldots, y_n$, измерима тогда и только тогда, когда все множества $A_n = \{x \mid f(x) = y_n\}$ измеримы.

Свойства измеримых функций:

1. Для любой измеримой функции $f:[a,b]\to R$ найдется последовательность простых функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x)\to f(x), n\to\infty, \forall x\in[a,b]$. Если, кроме этого, $f(x)\geq 0$, то найдется последовательность простых функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x)\uparrow f(x), n\to\infty, \forall x\in[a,b]$.

2. Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций измеримо при условии, что знаменатель не равен нулю.

3. Если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то $f(x)$ также измерима.

Определение 2.3. Говорят, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на E, если оно выполнено на E всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль.

Определение 2.4. Последовательность функций $f_n:[a,b]\to R$ называется *сходящейся почти всюду* к функции $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

для почти всех $x\in[a,b]$ (т. е. множество тех точек x, в которых равенство, рассмотренное выше, не выполняется, имеет меру нуль).

4. Пусть $f(x)$ — измеримая функция. Тогда $\forall\delta>0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, что

$$\mu\{x\mid f(x)\neq\varphi(x)\}<\delta,$$

т. е. измеримая функция совпадает с непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

1.3. Интеграл Лебега

Введем понятие интеграла Лебега сначала для функций, названных выше простыми, т. е. для измеримых функций, принимающих не более чем счетное число значений.

Пусть $f(x)$ — некоторая простая функция, принимающая значения $y_1,\ldots,y_n,\ldots;\ y_i\neq y_j$, при $i\neq j$, и пусть A — некоторое измеримое подмножество X.

Определим интеграл от функции $f(x)$ по множеству A равенством $\int_A f(x)d\mu=\sum_n y_n\mu(A_n)$, где $A_n=\{x\mid x\in A, f(x)=y_n\}$, если ряд справа сходится абсолютно. В этом случае простая функция $f(x)$ называется *интег-*

рируемой или *суммируемой* (по мере μ) на множестве A. Требование абсолютной сходимости ряда $\sum_n y_n\mu(A_n)$ возникает из следующих соображений. Так как нет естественной нумерации множеств A_n, то при изменении нумерации происходит перестановка членов ряда и, если нет абсолютной сходимости, сумма ряда может измениться. Так как интеграл не должен зависеть от случайно выбранной нумерации множеств A_n, то в определении требуется, чтобы ряд $\sum_n y_n\mu(A_n)$ сходился абсолютно.

Распространим определения интеграла на существенно более широкий класс функций с помощью предельного перехода.

Определение 3.1. Функция $f(x)$ *интегрируема (суммируема) на множестве* A, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к $f(x)$.

Определение 3.2. Величина

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu$$

называется *интегралом Лебега*, от функции $f(x)$ по мере μ.

Это определение корректно, т. к. предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n\}$.

Основные свойства интеграла Лебега:

1. $\int_A d\mu = \mu(A)$.

2. $\forall k\in R \quad \int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$, причем из существования интеграла в правой части вытекает существование интеграла в левой.

3. (*Аддитивность*)
$\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$, причем из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой.

4. Ограниченная и измеримая на множестве A функция $f(x)$ интегрируема на A.

5. (*Монотонность*)
Если $f(x)\ge 0$, то

$$\int_A f(x)d\mu \ge 0.$$

(*в предположении, что интеграл существует*).

6. Если $\mu(A)=0$, то $\int\limits_A f(x)d\mu=0$.

Если $f(x)=g(x)$ почти всюду, то $\int\limits_A f(x)d\mu=\int\limits_A g(x)d\mu$, причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

7. Если функция f измерима и функция φ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)|\le\varphi(x)$, то $f(x)$ также интегрируема на A.

8. Интегралы $\int\limits_A f(x)d\mu$, $\int\limits_A |f(x)|d\mu$ существуют или не существуют одновременно.

9. (*σ – аддитивность интеграла Лебега*) Если $A=\bigcup\limits_n A_n$; $A_i\bigcap A_j=\varnothing$ при $i\ne j$, то

$$\int\limits_A f(x)d\mu=\sum_n\int\limits_{A_n} f(x)d\mu,$$

причем из существования интегралов левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

10. (*Абсолютная непрерывность интеграла Лебега*)

Если $f(x)$ — суммируемая на множестве A функция, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, что $\left|\int\limits_\varepsilon f(x)d\mu\right|<\varepsilon$ для всякого измеримого $\varepsilon\subset A$ такого, что $\mu(\varepsilon)<\delta$.

11. Если последовательность $\{f_n\}$ на A сходится к $f(x)$ и при всех n $|f_n(x)|\le\varphi(x)$, где φ интегрируема на A, то предельная функция $f(x)$ интегрируема на A и

$$\int\limits_A f_n(x)d\mu\to\int\limits_A f(x)d\mu.$$

12. Если $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и

$$(R)\int\limits_a^b f(x)dx=(L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu.$$

II. ФУНКЦИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Определение 2.1. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, называется *функцией ограниченной вариации*, если существует такая постоянная C, что, каково бы ни было разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \le C. \qquad (2.1)$$

Всякая монотонная функция имеет ограниченную вариацию, так как для нее сумма, стоящая в (2.1) слева, не зависит от выбора разбиения и всегда равна $\left|f(b) - f(a)\right|$.

Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации.

Определение 2.2. Точная верхняя грань сумм (2.1) по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a,b]$ называется *полной вариацией* (*или полным изменением*) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $V_a^b[f]$. Таким образом,

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right|.$$

Определение 2.3. Функция $f(x)$, заданная на всей прямой, называется *функцией ограниченной вариации*, если величины $V_a^b[f]$ ограничены в совокупности. При этом $\lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} V_a^b[f]$ называется *полной вариацией* функции $f(x)$ на прямой $-\infty < x < \infty$ и обозначается $V_{-\infty}^{\infty}[f]$.

Примером функций ограниченной вариации являются функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Определение 2.4. Конечная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, удовлетворяет *условию Липшица*, если существует такая постоянная K, что для любых двух точек x и y из $[a,b]$ справедливо

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le K\left|x - y\right|.$$

Если функция $f(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$ имеет производную $f'(x)$ и последняя ограничена, то, как видно из формулы Лагранжа

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y), \quad (x < z < y),$$

функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le K(x_{k+1}-x_k),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le K(b-a)$$

и, стало быть, $f(x)$ — функция ограниченной вариации.

Примером непрерывной функции *бесконечной полной вариации* служит функция

$$f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x}\quad (0<x\le 1, f(0)=0).$$

Если за точки деления отрезка [0,1] принять точки

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

то легко проверить, что

$$V=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},\text{, откуда } V_0^1[f]=+\infty.$$

Основные свойства функций ограниченной вариации:

1. Всякая функция ограниченной вариации ограничена.

Доказательство. Пусть при $a\le x\le b$ справедливо

$$V=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le V_a^b[f],\text{ откуда } |f(x)|\le|f(a)|+V_a^b[f].$$

2. Если $\alpha\in R$, то

$$V_a^b[\alpha f]=|\alpha|V_a^b[f].$$

Это сразу следует из определения $V_a^b[f]$.

3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации, то $f+g, f-g, f\cdot g$ также являются функциями ограниченной вариации и

$$V_a^b[f+g]\le V_a^b[f]+V_a^b[g]. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации и, сверх того, $g(x) > c > 0, c$ — некоторое число, то частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть функция ограниченной вариации.

Доказательство. Действительно, для каждого разбиения отрезка $[a,b]$ имеем

$$\sum_k \left|f(x_k)+g(x_k)-f(x_{k-1})-g(x_{k-1})\right| \le \sum_k \left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| + \sum_k \left|g(x_k)-g(x_{k-1})\right|,$$

откуда, поскольку всегда $\sup(A+B) \le \sup A + \sup B$, получаем требуемое неравенство. Для разности доказательство аналогично.

Пусть $p(x) = f(x)\cdot g(x)$. Положим $A = \sup\{|f(x)|\}$, $B = \sup\{|g(x)|\}$.

Тогда

$$\left|p(x_{k+1})-p(x_k)\right| \le \left|f(x_{k+1})g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_{k+1})\right| +$$
$$+\left|f(x_k)g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_k)\right| \le B\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right| + A\left|g(x_{k+1})-g(x_k)\right|,$$

откуда $V_a^b[p] < BV_a^b[f] + AV_a^b[g]$, что и требовалось доказать.

Свойства 1 и 2 означают, что линейная комбинация функций ограниченной вариации (определенных на данном отрезке $[a,b]$) есть снова функция ограниченной вариации. Иными словами, функции ограниченной вариации образуют линейное пространство (в отличие от множества монотонных функций, которые линейного пространства не образуют).

4. Если $a < b < c$, то

$$V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f] \tag{2.3}$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим сначала такое разбиение отрезка $[a,c]$, в котором b служит одной из точек деления, скажем, $x_r = b$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{r}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| + \sum_{k=r+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| \le \tag{2.4}$$
$$\le V_a^b[f] + V_b^c[f].$$

Возьмем теперь произвольное разбиение отрезка $[a,c]$. Ясно, что если к его точкам деления добавить еще одну, именно точку b, то $\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$ от такого добавления не уменьшится. Следовательно, неравенство (2.4) выполнено для любого разбиения отрезка $[a,c]$, поэтому

$$V_a^c[f] \le V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{2.4*}$$

С другой стороны, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие разбиения отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, что

$$\sum_i \left|f(x_i') - f(x_{i-1}')\right| > V_a^b[f] - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_j \left|f(x_j'') - f(x_{j-1}'')\right| > V_b^c[f] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Соединив эти два разбиения, мы получим разбиение отрезка $[a,c]$, для которого

$$\sum_k \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| = \sum_i \left|f(x_i') - f(x_{i-1}')\right| + \sum_j \left|f(x_j'') - f(x_{j-1}'')\right| >$$
$$> V_a^b[f] + V_b^c[f] - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, отсюда следует, что

$$V_a^c[f] \geq V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{2.5}$$

Из (2.4*) и (2.5) следует (2.3).

Так как полное изменение любой функции на любом отрезке неотрицательно, то из свойства 3 сразу следует свойство 4.

5. Функция

$$v(x) = V_a^x[f] -$$

монотонно неубывающая.

6. Если $f(x)$ непрерывна в точке x^* слева, то и $v(x)$ непрерывна в этой точке слева.

Доказательство. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0$ так, что $\left|f(x^*) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, как только $x^* - \delta < x \leq x^*$. Далее выберем разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x^*,$$

так, что

$$V_a^x[f] - \sum_{k=1}^n \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

При этом мы можем считать, что

$$x^* - x_{n-1} < \delta$$

(иначе мы добавили бы еще одну точку разбиения, отчего разность, стоящая в (2.6) слева, могла бы только уменьшиться), поэтому

$$\left|f(x^*)-f(x_{n-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$V_a^x[f]-\sum_{k=1}^{n-1}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|<\varepsilon.$$

Но тогда, тем более,

$V_a^{x^*}[f]-V_a^{x_{n-1}}[f]<\varepsilon$, т.е. $v(x^*)-v(x_{n-1})<\varepsilon$.

Так как $v(x)$ — монотонно неубывающая функция, то отсюда следует, что $v(x^*)-v(x)<\varepsilon$ для всех x таких, что $x_{n-1}\le x\le x^*$. А это и означает непрерывность функции $v(x)$ в точке x^* слева.

Если $f(x)$ непрерывна в точке x^* справа, то, как показывают аналогичные рассуждения, и $v(x)$ непрерывна в этой точке справа. Следовательно, если $f(x)$ непрерывна в некоторой точке (или на всем отрезке $[a,b]$), то непрерывна и $v(x)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция на $[a,b]$ ограниченной вариации и $v(x)$ — ее полное изменение на $[a,x]$. Рассмотрим разность

$$\varphi=v-f.$$

Эта разность представляет собой монотонно неубывающую функцию. Действительно, пусть $x'\le x''$. Тогда

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=\left[v(x'')-v(x')\right]-\left[f(x'')-f(x')\right]. \qquad (2.7)$$

Но всегда

$$\left|f(x'')-f(x')\right|\le v(x'')-v(x')=V_{x'}^{x''}[f],$$

поэтому правая, а значит, и левая части равенства (2.7) неотрицательны. Итак, поскольку

$$f=v-\varphi,$$

то справедлива

<u>**Теорема 2.1.**</u> Всякая функция ограниченной вариации может быть представлена как разность двух монотонно неубывающих функций. При этом если функция ограниченной вариации непрерывна, то монотонно неубывающие функции также непрерывны.

Обратное утверждение также верно: всякая функция, представимая в виде разности двух монотонных, имеет ограниченную вариацию.

Всякая функция ограниченной вариации имеет почти всюду конечную производную.

Примеры. *1).* Представить данную функцию в виде разности двух монотонно неубывающих.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=a\in(0;1),\\ 0, & x\in[0;1]\setminus\{a\}.\end{cases}$$

Решение:

Надо построить «вариацию с переменным верхним пределом» $f_1(x)=V_0^x[f]$. Это можно сделать, пользуясь свойством 3. Тогда получим $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;a),\\ 1, & x=a,\\ 2, & x\in(a;1],\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;a),\\ 0, & x=a,\\ 2, & x\in(a;1].\end{cases}$$

2). Представить в виде разности монотонно неубывающих функций функцию $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0;2\pi]$. Найти полную вариацию функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0;2\pi]$.

Решение:

Разобьем отрезок $[a,b]$ на промежутки монотонности функции $\sin x$: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right];\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$. После этого получим

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 2-\sin x, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\\ 4+\sin x, & x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right],\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 2-2\sin x, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\\ 4, & x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right].\end{cases}$$

И, следовательно $V_0^{2\pi}[\sin x]=4$.

Пусть $x_1,\dots,x_n,\dots$ — конечное или счетное множество точек на $[a,b]$. Поставим в соответствие каждой из этих точек x_n два числа g_n и h_n так, что $\sum\limits_n\left(|g_n|+|h_n|\right)<\infty$.

Предположим, кроме того, что если $x_n=a$, то $g_n=0$, а если $x_n=b$, то $h_n=0$. Положим

$$\psi(x) = \sum_{x_n \le x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n. \qquad (2.8)$$

Определение 2.5. *Функциями скачков* называются любые функции вида (2.8).

Полная вариация функции $\psi(x)$ равна, очевидно,

$$\sum_n \left(|g_n| + |h_n|\right).$$

Точками разрыва функции (2.8) служат те x_n, для которых хотя бы одно из чисел g_n и h_n отлично от нуля; при этом

$$\psi(x_n) - \psi(x_n - 0) = g_n, \quad \psi(x_n + 0) - \psi(x_n) = h_n.$$

Теорема 2.2. Всякая функция $f(x)$ ограниченной вариации, определенная на $[a,b]$, может быть представлена, и притом единственным образом, в виде

$$f = \varphi + \psi,$$

где φ — непрерывна, а ψ — функция скачков.

Доказательство.

Пусть последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ состоит из всех точек, являющихся точками разрыва первого рода функции $f(x)$.

Введем в рассмотрение $\forall x_n$:

$$g_n = f(x_n) - f(x_n - 0);$$
$$h_n = f(x_n + 0) - f(x_n);$$
$$\psi(x) = \sum_{x_n \le x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n.$$

Разность $\varphi = f - \psi$ есть непрерывная функция. Действительно, для произвольной точки x^* имеем

$$\varphi\left(x^* - 0\right) = f\left(x^* - 0\right) - \psi\left(x^* - 0\right), \quad \varphi\left(x^* + 0\right) = f\left(x^* + 0\right) - \psi\left(x^* + 0\right),$$

откуда

$$\varphi\left(x^* + 0\right) - \varphi\left(x^* - 0\right) = f\left(x^* + 0\right) - f\left(x^* - 0\right) - \psi^* = 0,$$

(где ψ^* – скачок функции ψ в точке x^*). Следовательно, φ действительно непрерывная функция.

Пример. Представить данную функцию в виде суммы непрерывной и функции скачков.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2 + x, & x \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Функция $f(x)$ имеет скачок 2 при $x=0$. Значит, функция скачков имеет вид

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2, & x\geq 0.\end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(x)=f(x)-\psi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geq 0,\end{cases}$$

которая является непрерывной.

Теорема 2.3. (*Замена переменной*) Пусть $f(x)$ – функция, заданная на отрезке $[a,b]$, $\varphi(x)$ –

1) строго возрастающая;

2) непрерывная на $[a,b]$, причем $\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$.

Тогда функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция $g(x)\equiv f(\varphi(x))$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, и при этом $V_a^b[f]=V_a^b[g]$.

Доказательство.

Заметим, что область значений функции $\varphi(x)$ есть отрезок $[a,b]$: в силу монотонности и условия $\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$.

Рассмотрим произвольное разбиение T. Имеем

$$V_T[g]=\sum_{i=1}^{n}\left|f(\varphi(x_i))-f(\varphi(x_{i-1}))\right|. \tag{2.9}$$

Заметим, что точки $\varphi(x_i)$ образуют некоторое новое разбиение $\varphi(T)$ отрезка $[a,b]$. Поэтому равенство (2.9) можно продолжить:

$$V_T[g]=\sum_{i=1}^{n}\left|f(\varphi(x_i))-f(\varphi(x_{i-1}))\right|=V_{\varphi(T)}[f]\leq V_a^b[f].$$

Следовательно,

$V_a^b[g]\leq V_a^b[f]$.

Теперь заметим, что в силу условий, наложенных на функцию $\varphi(x)$, она имеет обратную, обладающую теми же свойствами. Поэтому проведя аналогичные рассуждения можно получить оценку $V_a^b[f]\leq V_a^b[g]$, что и доказывает требуемые утверждения.

III. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА

Вводя понятие меры Лебега, мы исходили из длины промежутка. Можно ввести понятие меры более общим способом.

Пусть $F(x)$ — некоторая неубывающая, непрерывная справа функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Положим $m((\alpha,\beta))=F(\beta)-F(\alpha+0)$, $m([\alpha,\beta])=F(\beta+0)-F(\alpha)$, $m((\alpha,\beta])=F(\beta+0)-F(\alpha+0)$, $m([\alpha,\beta))=F(\beta)-F(\alpha)$. Далее, повторяя все рассуждения, приведенные при определении меры Лебега, можно построить некоторую меру μ_F с теми же свойствами, что и мера Лебега. Класс множеств измеримых относительно μ_F будет, вообще говоря, зависеть от выбора функции $F(x)$, но при любом выборе $F(x)$ все счетные объединения и пересечения открытых множеств будут μ_F измеримыми.

Определение 3.1. Меры, полученные с помощью той или иной функции $F(x)$, называются *мерами Лебега-Стилтьеса*, а саму функцию $F(x)$ называют *производящей функцией* этой меры.

В частности, если $F(t)\equiv t$, то мера Лебега-Стилтьеса совпадает с мерой Лебега.

Пусть μ_F — мера на отрезке $[a,b]$, порожденная монотонной функцией F. Для этой меры обычным образом определяется класс суммируемых функций и вводится понятие интеграла Лебега

$$\int_a^b f(x)d\mu_F.$$

Определение 3.2. Такой интеграл, взятый по мере μ_F, отвечающей функции F, называется *интегралом Лебега-Стилтьеса* и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dF(x).$$

Выделим некоторые частные случаи.

1. Если F — функция скачков, то интеграл $\int_a^b f(x)dF(x)$ сводится к сумме $\sum_i f(x_i)h_i$, где x_i — точки разрыва функции F, а h_i — скачки F в точках x_i.

2. Если F — абсолютно непрерывная функция, то интеграл

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

<u>Определение 3.3.</u> Функция $f(x)$, заданная на некотором отрезке $[a,b]$, называется *абсолютно непрерывной* на нем, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k), $k = \overline{1,n}$, с суммой длин, меньшей δ:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k) - f(a_k)\right| < \varepsilon.$$

<u>Основные свойства абсолютно непрерывных функций:</u>

1. В определении 3.3 можно вместо любой конечной системы интервалов с суммой длин $< \delta$ рассматривать любую конечную или счетную систему интервалов, сумма длин которых $< \delta$.

2. Всякая абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию.

3. Сумма абсолютно непрерывных функций и произведение абсолютно непрерывной функции на число есть абсолютно непрерывные функции.

4. Всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных неубывающих функций.

Понятие интеграла Лебега—Стилтьеса можно естественным образом расширить, перейдя от монотонных функций к произвольным функциям ограниченной вариации. Пусть Φ — такая функция. Представим ее в виде разности двух монотонных функций

$$\Phi = v - g,$$

где v — полная вариация функции Φ на отрезке $[a, x]$. Введем теперь интеграл Лебега-Стилтьеса по Φ, положив, по определению,

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \int_a^b f(x)dv(x) - \int_a^b f(x)dg(x).$$

Если Φ представлена каким-либо иным способом как разность двух монотонных функций, положим,

$$\Phi = w - h,$$

то

$$\int_a^b f(x)dv(x)-\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dw(x)-\int_a^b f(x)dh(x),$$

т. е. для вычисления интеграла Лебега-Стилтьеса по данной функции Ф можно пользоваться любым представлением этой функции в виде разности двух монотонных.

Пусть функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна, а $g(x)$ имеет в этом промежутке, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, которая абсолютно интегрируема в $[a,b]$. При этом пусть функция $g(x)$ в конечном числе точек

$$a=c_0<c_1<\ldots<c_k<\ldots<c_m=b$$

терпит разрыв первого рода. Тогда существует интеграл Стилтьеса и выражается формулой

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right]+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right].$$

<u>*Примеры.*</u> Вычислить интегралы:

а) $(S)\int_{-1}^{3} xdg(x)$, где $g(x)=\begin{cases}0 & \text{ï ðè} \quad x=-1,\\ 1 & \text{ï ðè} \quad -1<x<2,\\ -1 & \text{ï ðè} \quad 2\le x\le 3;\end{cases}$

б) $(S)\int_{0}^{2} x^2dg(x)$, где $g(x)=\begin{cases}-1 & \text{ï ðè} \quad 0\le x<\frac{1}{2},\\ 0 & \text{ï ðè} \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2},\\ 2 & \text{ï ðè} \quad x=\frac{3}{2},\\ -2 & \text{ï ðè} \quad \frac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$

<u>*Решение:*</u>

а) Функция $g(x)$ имеет скачок 1 при $x=-1$ и скачок -2 при $x=2$; в остальных точках $g'(x)=0$. Поэтому

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-2) = -5.$$

б) Скачок 1 при $x=\dfrac{1}{2}$ и -2 при $x=\dfrac{3}{2}$ (значение функции $g(x)$ при $x=\dfrac{3}{2}$ не влияет на результат); в прочих точках $g'(x)=0$.

Имеем:

$$(S)\int_{0}^{2} x^2 dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2) = -\frac{17}{4}.$$

Пример. Вычислить интеграл:

$$(S)\int_{-2}^{2} xdg(x),\ \text{где}\ g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{ï ðè} \quad -2\le x\le -1, \\ 2 & \text{ï ðè} \quad -1<x<0, \\ x^2+3 & \text{ï ðè} \quad 0\le x\le 2. \end{cases}$$

Решение:

Функция $g(x)$ имеет скачки, равные 1, при $x=-1$ и $x=0$. Производная

$$g'(x)=\begin{cases} 1 & \text{ï ðè} \quad -2\le x\le -1, \\ 0 & \text{ï ðè} \quad -1<x<0, \\ 2x & \text{ï ðè} \quad 0<x\le 2. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{-2}^{2} xdg(x) = \int_{-2}^{-1} xdx + 2\int_{0}^{2} x^2dx + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 = 2\frac{5}{6}.$$

IV. ИНТЕГРАЛ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

Пусть Φ — некоторая функция ограниченной вариации, заданная на отрезке $[a,b]$ и $f(x)$ — произвольная функция на этом же отрезке. Рассмотрим некоторое разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

отрезка $[a,b]$ на элементы $[x_{i-1},x_i]$ и, выбрав в каждом из них произвольную точку c_i, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})\right), \left(\Phi(x_n)=\Phi(b)\right). \tag{4.1}$$

<u>Определение 4.1.</u> Если при $\max\Delta x_i \to 0, \left(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\right)$ эти суммы стремятся к некоторому пределу (не зависящему ни от способа дробления промежутка $[a,b]$, ни от выбора точек c_i в каждом из элементов разбиения), то этот предел называется *интегралом Римана-Стилтьеса* от функции $f(x)$ по функции Φ по $[a,b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x).$$

<u>Теорема 4.1.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то ее интеграл Римана-Стилтьеса существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега-Стилтьеса.

<u>Некоторые свойства интеграла Римана- Стилтьеса:</u>

1. Справедлива оценка

$$\left|\int_a^b f(x)d\Phi(x)\right| \le \max|f(x)|V_a^b[\Phi],$$

($V_a^b[\Phi]$ — полная вариация функции Φ на $[a,b]$).

2. Если $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, то

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \int_a^b f(x)d\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)d\Phi_2(x).$$

3. Если $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ — две функции ограниченной вариации на $[a,b]$, совпадающие всюду, кроме конечного или счетного числа внутренних точек этого промежутка, то

$$\int_a^b f(x)d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)d\Phi_2(x)$$

для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$.

Если $\psi(x)$ — функция ограниченной вариации, отличная от нуля лишь в конечном или счетном числе точек, лежащих внутри (a,b), то

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)=0$$

для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна, то интеграл Римана-Стилтьеса $\int_a^b f(x)d\Phi(x)$ не зависит от значений, принимаемых функцией $\Phi(x)$ в ее точках разрыва, лежащих внутри (a,b).

Замечание 4.1. Все сказанное об интеграле Римана-Стилтьеса по конечному промежутку легко переносится на случай, когда интеграл берется по всей прямой или по полупрямой.

Кроме того, мы определили интеграл по отрезку $[a,b]$. Аналогично можно определить интеграл по $(a,b]$, а также интегралы по $[a,b)$ и (a,b).

Определение 4.2. *Функцией Хевисайда* называется функция, определяемая соотношением

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Посчитаем интеграл $\int_a^b f(x)dH(x)$. По определению (4.1) составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(H(x_i)-H(x_{i-1}))$. В силу определения функции Хевисайда эта сумма, очевидно, равна нулю, если отрезок $[a,b]$ не содержит точки нуль, и равна $f(c_i)$, если точка 0 попала на некоторый отрезок $[x_{i-1},x_i]$ (точнее внутрь него или в его конец x_i).

В первом случае интеграл, конечно, равен нулю.

Во втором случае при $\max\Delta x_i \to 0, (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$ точка $c_i \in [x_{i-1},x_i]$ стремится к 0, поэтому, если функция $f(x)$ непрерывна в 0, то пределом рассматриваемых сумм будет величина $f(0)$. Если же $f(x)$ разрывна в 0, то малым изменения значения c_i можно заметно менять значения $f(c_i)$, и, значит, интегральные суммы не будут иметь предела при $\max\Delta x_i \to 0, (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$.

Литература

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.

2. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

4. Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

5. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

6. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высш. шк., 1982. – 272 с.

7. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители:
Липская Наталия Александровна
Яблонский Олег Леонидович
Жук Анастасия Игоревна

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА

Методические указания для магистрантов и аспирантов

Ответственный за выпуск: Липская Н.А.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 09.11.2016 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,5. Заказ № 1123. Тираж 40 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.