МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения
(*первый курс, второй семестр*)

Брест 2008

УДК 517.9

В соответствии с действующей программой для студентов-заочников 1 курса экономических специальностей составлены индивидуальные задания к контрольной работе и дано решение типового варианта. Приведены основные теоретические сведения из курса высшей математики, рассмотрено достаточное количество примеров.

Составители: Лебедь. С. Ф., доцент, к.ф.-м.н.
Тузик Т.А., доцент

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой изучения курса высшей математики для студентов-заочников является *самостоятельная работа* с учебниками, учебными пособиями, сборниками задач и упражнений, справочниками. Список основных и наиболее доступных из них приводится в конце пособия.

Изучение любого раздела курса следует *начинать с конспекта установочных лекций*, соответствующих глав учебника, учебного пособия или руководства к решению задач, в которых имеется необходимая теория, приводятся расчетные формулы и решения задач по темам. После этого, по аналогии с решением типового варианта к контрольной работе, можно приступать к решению самой контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (шифра).

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями:

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Контрольную работу желательно выполнять в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. Условия всех задач нужно записывать полностью, а их решения располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
4. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.
5. В случае, если работа «не допущена к защите», студент в этой же тетради должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и представить ее на повторное рецензирование.

В случае необходимости студент может обращаться за консультациями к преподавателю кафедры, проверяющему контрольные работы в группе, лектору потока, либо к преподавателям, проводящим консультации студентов-заочников по графику, утвержденному на кафедре.

ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

II семестр

1. Функции нескольких переменных. Определение и вычисление частных производных.
2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение в приближенных вычислениях.
3. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
4. Производная по направлению. Градиент и его свойства.
5. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума для функции двух переменных. Метод наименьших квадратов.
6. Определение и свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.
7. Замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
8. Определенный интеграл как предел интегральной суммы и его основные свойства.
9. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
11. Вычисление площадей и длин дуг кривых в декартовых координатах, в параметрическом виде, в полярных координатах.
12. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (ДУ) 1-го порядка. ДУ с разделяющимися переменными. Линейные ДУ 1-го порядка.
13. Структура общего решения линейного однородного ДУ 2-го порядка. ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
14. Структура общего решения ЛНДУ 2-го порядка. ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.
15. Числовые ряды. Основные понятия (сумма ряда, сходимость, расходимость). Необходимый признак сходимости ряда.
16. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Признаки Даламбера и Коши.
17. Интегральный признак Коши сходимости ряда. Сходимость обобщенного гармонического ряда (ряда Дирихле).
18. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости знакопеременного ряда.
19. Область сходимости степенного ряда.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задание 1. Найти неопределенные интегралы следующих функций:

1.	а) $\int\left(3x^6+\frac{4}{x}+\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)dx$;	б) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.
2.	а) $\int\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$;	б) $\int(2x-3)\sin 4x\,dx$.
3.	а) $\int\left(7\sqrt{x^5}-\frac{2}{x^5}-3x^4+\frac{4}{x}\right)dx$;	б) $\int(x^2+x)e^x\,dx$.
4.	а) $\int\left(3x^4+\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}\right)dx$;	б) $\int x\sin(2x-3)\,dx$.
5.	а) $\int\left(6x^3-\frac{5}{x}+3\sqrt{x^5}-\frac{7}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(4x+3)\cos 3x\,dx$.
6.	а) $\int\left(2x^5-\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x}+3\sqrt{x}\right)dx$;	б) $\int(3x-1)\cos 2x\,dx$.
7.	а) $\int\left(2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+6x^2-\frac{2}{x^5}\right)dx$;	б) $\int(x-7)e^{2x}\,dx$.
8.	а) $\int\left(6x^5+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^6}\right)dx$;	б) $\int(x-4)\cos 3x\,dx$.
9.	а) $\int\left(4x^5+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(2x-5)e^x\,dx$.
10.	а) $\int\left(3x^8+\frac{4}{x}-\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^5}\right)dx$;	б) $\int\ln(x+2)\,dx$.
11.	а) $\int\left(4x^2-\frac{3}{x}-\sqrt{x^7}-\frac{3}{x^6}\right)dx$;	б) $\int(3x+4)\sin x\,dx$.
12.	а) $\int\left(8x^3+\frac{6}{x^4}-\sqrt[6]{x^5}+\frac{7}{x^3}\right)dx$;	б) $\int(4x-3)\cos 2x\,dx$.
13.	а) $\int\left(5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x}\right)dx$;	б) $\int(3x+5)\sin x\,dx$.
14.	а) $\int\left(3x^5-\frac{4}{x}-\sqrt{x^5}+\frac{10}{x^5}\right)dx$;	б) $\int(8x-2)\cos 4x\,dx$.
15.	а) $\int\left(5x^4-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$;	б) $\int(4x-1)e^{-x}\,dx$.

16.	а) $\int\left(4x^5-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^7}+\frac{6}{x^2}\right)dx$;	б) $\int(x+3)\sin 2x\,dx$.
17.	а) $\int\left(\sqrt[4]{x^5}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^3}+3x^4\right)dx$;	б) $\int(2x+4)\cos 6x\,dx$.
18.	а) $\int\left(8x^5-\frac{4}{x^4}+\frac{3}{x}-\sqrt[4]{x^5}\right)dx$;	б) $\int(x-6)\sin\frac{x}{2}\,dx$.
19.	а) $\int\left(\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^5}-2x^6\right)dx$;	б) $\int(3x+2)\cos 6x\,dx$.
20.	а) $\int\left(\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}\right)dx$;	б) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.
21.	а) $\int\left(8x^3-\frac{4}{x}-\frac{6}{x^4}+\sqrt[9]{x^2}\right)dx$;	б) $\int(4x-5)\,e^{x/2}\,dx$.
22.	а) $\int\left(4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}-\frac{3}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(6x+1)\cos\frac{x}{2}\,dx$.
23.	а) $\int\left(7x^4+\frac{4}{x}-\sqrt[6]{x^5}+\frac{8}{x^6}\right)dx$;	б) $\int(2x-8)\sin x\,dx$.
24.	а) $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^5}-5x^4\right)dx$;	б) $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$.
25.	а) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{4}{x^5}+6\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}\right)dx$;	б) $\int(8-x)\,e^{-2x}\,dx$.
26.	а) $\int\left(9x^5-\frac{6}{x}-\frac{5}{x^4}+\sqrt[5]{x^7}\right)dx$;	б) $\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{4}\,dx$.
27.	а) $\int\left(\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x}-2\sqrt{x^3}+5x^4\right)dx$;	б) $\int\left(x-\frac{1}{4}\right)\cos\frac{x}{8}\,dx$.
28.	а) $\int\left(4\sqrt[4]{x^3}-\frac{6}{x}-\frac{4}{x^5}-3x^7\right)dx$;	б) $\int\ln(x+4)\,dx$.
29.	а) $\int\left(10x^4+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(2x+3)\,e^{-4x}\,dx$.
30.	а) $\int\left(5x^3+\frac{6}{x^3}-\sqrt[3]{x^8}-\frac{6}{x^5}\right)dx$;	б) $\int(x+2)\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Задание 2. Дана функция $z=ax^3+bx^2y+cxy^2-2axy+3by+c$, точка A $(x_0;y_0)$, вектор $\vec{a}=(l;m)$. Найти:

1) эластичности $E_x(z)$ и $E_y(z)$ в точке A $(x_0;y_0)$;
2) матрицу Гессе функции z в точке A и вычислить ее определитель;
3) градиент функции z в точке A;
4) производную функции z в точке A по направлению вектора $\vec{a}=(l;m)$.

Вар.	a	b	c	x_0	y_0	l	m
1	1	1	3	4	1	4	3
2	2	1	2	2	1	4	-3
3	2	3	1	1	2	-4	3
4	4	2	3	-1	3	-4	-3
5	3	2	4	-1	-2	3	4
6	2	4	3	1	-1	-3	4
7	3	2	1	1	-2	3	-4
8	1	2	3	3	1	-3	-4
9	4	2	3	1	3	4	3
10	1	4	1	2	1	-3	4
11	4	1	2	1	2	5	12
12	2	4	3	2	1	5	-12
13	3	2	4	1	3	-5	12
14	3	1	2	3	1	-5	-12
15	1	4	2	-2	1	12	5
16	3	1	1	-2	-2	12	-5
17	3	2	5	3	1	-12	-5
18	1	2	3	2	1	-12	5
19	3	2	4	1	3	5	12
20	2	1	3	2	2	12	5
21	1	4	2	2	3	8	6
22	1	3	2	2	4	-8	6
23	4	2	3	4	2	-8	-6
24	3	2	1	4	3	8	-6
25	3	4	2	4	1	6	8
26	1	2	1	1	3	-6	8
27	1	2	3	3	4	-6	-8
28	3	2	2	1	1	4	3
29	1	4	2	2	2	5	12
30	3	3	1	1	3	6	8

Задание 3. Производится два вида товаров, цены которых соответственно равны p_1 и p_2. Функция затрат, связанных с производством этих товаров, имеет вид $C = ax^2 + bxy + cy^2$, где x и y соответственно количества товаров первого и второго видов. *Требуется:*

1) составить функцию прибыли и найти ее максимальное значение;
2) проверить известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0,45	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,05	0,10	0,15	0,20
b	0,50	0,20	0,30	0,20	0,10	0,50	0,10	0,20	0,20	0,30
c	0,25	0,10	0,15	0,20	0,15	0,20	0,35	0,15	0,20	0,15
p_1	18	16	70	24	19	34	28	18	16	32
p_2	12	10	60	11	7	23	58	22	24	27

Вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	0,25	0,30	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
b	0,20	0,30	0,20	0,10	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,30
c	0,15	0,20	0,25	0,20	0,04	0,35	0,45	0,15	0,20	0,55
p_1	48	48	17	11	14	24	33	20	37	19
p_2	28	45	41	9	7	30	45	14	29	17

Вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,17	0,35	0,10	0,12
b	0,20	0,20	0,10	0,20	0,02	0,20	0,20	0,30	0,20	0,10
c	0,10	0,10	0,06	0,50	0,25	0,10	0,15	0,10	0,35	0,25
p_1	9	14	10	9	18	11	21	31	6	6
p_2	7	10	4	17	13	5	16	14	12	19

Задание 4. Найти общее или частное (если указано начальное условие) решение следующих дифференциальных уравнений *первого* порядка:

Вар.	
1.	а) $(x-e^{-2x})\,dx+(y+e^{2y})\,dy=0$; б) $y'-y\,tg\,x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0)=2$.
2.	а) $xyy'-y^2=4$; б) $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$, $y(1)=\dfrac{7}{6}$.
3.	а) $x\,dy-(y+1)\,dx=0$, $y(2)=5$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.
4.	а) $y'=2\sqrt{y}\ln x$, $y(e)=1$; б) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$.
5.	а) $y'tgx-y=4$; б) $xy'-2y=x$, $y(1)=1$.
6.	а) $4(yx^2+y)\,dy+\sqrt{5+y^2}\,dx=0$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^3$, $y(1)=\dfrac{3}{2}$.
7.	а) $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$; б) $x^2y'-2xy=1$, $y(1)=5$.
8.	а) $(x^2+x)y'=2y+1$; б) $xy'-3y=x^3+x$, $y(1)=3$.
9.	а) $(\sin 2x+x)\,dx+(\cos 2y+y)\,dy=0$; б) $xy'+3y=x^3-2x$, $y(1)=2$.
10.	а) $(3+e^x)yy'=e^x$; б) $xy'-3y=3-4x-x^2$, $y(1)=3$.
11.	а) $y'=\dfrac{y+1}{x}$; б) $xy'+2y=2+3x+x^2$, $y(1)=3$.
12.	а) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$; б) $xy'-2y=x^3+x$; $y(1)=4$.

13.	а) $(2x-\sin 4x)\,dx+(4y-e^{2y})\,dy=0$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=x^2-2x+3,\;\; y(1)=-5$.
14.	а) $y'\cos^2 x=y\ln y,\;\; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$; б) $xy'+2y=x^3+x^2$.
15.	а) $xyy'-y^2=9$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=-x^2+2x-3,\;\; y(1)=4$.
16.	а) $(x+1)\,dy-(y+2)\,dx=0$; б) $y'+\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^2,\;\; y(0)=\dfrac{6}{5}$.
17.	а) $(e^{3x}-3x^2)\,dx-(\sin 2y-4y^3)\,dy=0$; б) $xy'-4y=x^3+2x^2-3x,\;\; y(1)=2$.
18.	а) $xy'+4y=8x-2,\;\; y(1)=0{,}1$; б) $(4+e^x)yy'=e^x$.
19.	а) $y'=\dfrac{y+1}{x+3}$; б) $xy'-3y=x^3-2x^2+5x,\;\; y(1)=-3$.
20.	а) $x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{9+x^2}\,dy=0$; б) $xy'+3y=5x+4,\;\; y(1)=6$.
21.	а) $(x^2-e^{-4x})\,dx-(3y^5+\sin 3y)\,dy=0$; б) $y'-\dfrac{2y}{x+2}=e^{3x}(x+2)^2,\;\; y(0)=4$.
22.	а) $xyy'-y^2=16$; б) $xy'-3y=x^4-2x^3+5x,\;\; y(1)=5$.
23.	а) $x\,dy-(y+3)\,dx=0,\;\; y(2)=13$; б) $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{4x-5}{x^2}$.
24.	а) $6(x^2y+y)\,dy-\sqrt{4+y^2}\,dx=0$; б) $x^2y'-2xy=1,\;\; y(1)=5$.
25.	а) $yy'\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}=0$; б) $xy'-3y=4x^3+2x^2+x,\;\; y(1)=6$.
26.	а) $(x+3)y'=y-4,\;\; y(2)=14$; б) $xy'+2y=\dfrac{2+3x+x^2}{x^2}$.
27.	а) $x\sqrt{4+y^2}\,dx-y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$; б) $xy'-4y=x^3-2x^2+3x,\;\; y(1)=-5$.
28.	а) $y'\cos^2 x=y\ln y,\;\; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$; б) $y'+\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^4}$.
29.	а) $(x+1)\,dy=(y+6)\,dx$; б) $y'+\dfrac{3y}{x+1}=(x+1)^2,\;\; y(2)=\dfrac{3}{2}$.
30.	а) $(4x^3-e^{-2x})\,dx-(e^{2y}-\sin 3y)\,dy=0$; б) $xy'+5y=10x-4,\;\; y(1)=1$.

Задание 5. Найти общее или частное (если указаны начальные условия) решение следующих дифференциальных уравнений второго порядка:

Вар.	
1.	а) $y''+4y=0$; б) $y''-10y'+25y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-4$; в) $y''+3y'+2y=0$; г) $y''+y'=(2x-1)e^{x}$.
2.	а) $y''-y'-2y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=7$; б) $y''+25y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$; г) $y''-2y'+5y=10\cos 2x$.
3.	а) $y''-3y'=0$; б) $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=5$; в) $y''-4y'+13y=0$; г) $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$.
4.	а) $y''+7y'=0$; б) $y''-6y'+5y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-2$; в) $y''+2y'+5y=0$; г) $y''-12y'+36y=5\sin 3x$.
5.	а) $y''-10y'+25y=0$; б) $y''+y'-2y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-2$; в) $y''-2y'+10y=0$; г) $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$.
6.	а) $y''+9y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$; б) $y''+2y'+17y=0$; в) $y''-y'-12y=0$; г) $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.
7.	а) $y''+y'-6y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=-1$; б) $y''+8y'+16y=0$; в) $y''-4y'+20y=0$; г) $y''+49y=2\cos 3x-5\sin 3x$.
8.	а) $y''-12y'+36y=0$; б) $y''-4y'+5y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$; в) $y''+2y'-3y=0$; г) $y''+6y'+10y=74e^{3x}$.
9.	а) $y''+3y'=0$; б) $y''-5y'+4y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-2$; в) $y''+16y=0$; г) $y''-3y'+2y=3\cos x+7\sin x$.
10.	а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''-6y'+9y=0,\ y(0)=-3,\ y'(0)=2$; в) $y''+4y'+5y=0$; г) $y''+100y=72e^{2x}$.
11.	а) $y''-2y'+10y=0$; б) $y''-6y'+9y=(48x+8)e^{2x}$ в) $4y''-8y'+3y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=3$; г) $y''+8y'+16y=0$;
12.	а) $y''-3y'-10y=0,\ y(0)=7,\ y'(0)=-3$; б) $y''+16y=0$; в) $y''+10y'+25y=0$; г) $y''-5y'+6y=3\cos x+19\sin x$.
13.	а) $9y''+6y'+y=0$; б) $y''-4y'-21y=0,\ y(0)=-4,\ y'(0)=6$; в) $y''+y=0$; г) $y''+36y=2+3x-x^2$;
14.	а) $y''-6y'+9y=0,\ y(0)=5,\ y'(0)=2$; б) $y''+4y'+8y=0$; в) $y''+6y'-7y=0$; г) $y''-y=-4\cos x-2\sin x$.
15.	а) $y''-10y'+21y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$; б) $y''-2y'+2y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$; г) $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x$.

16.	а) $y''+6y'+9y=0$; б) $y''+10y'+29y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=-3$; в) $y''-8y'+7y=0$; г) $y''+6y'+13y=-5\sin 2x$.
17.	а) $y''+2y'+26y=0$; б) $y''+4y=3\sin 3x-2\cos 3x$. в) $y''+y'-12y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=-5$; г) $y''-14y'+49y=0$;
18.	а) $y''-7y'-8y=0$; б) $y''+4y'+4y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=-4$; в) $y''+4y'+13y=0$; г) $y''-4y'+29y=7\sin 5x$.
19.	а) $y''-3y'-4y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=3$; б) $y''+6y'+13y=0$; в) $y''+14y'+49y=0$; г) $y''-4y'+5y=2e^{-3x}$.
20.	а) $y''-8y'+16y=0$; б) $y''-10y'+16y=0,\ y(0)=-7,\ y'(0)=3$; в) $y'+25y=0$; г) $y''+16y=8\cos 4x$.
21.	а) $y''-3y'-18y=0$; б) $y''+2y'+5y=0, y(0)=-3, y'(0)=6$; в) $y''-16y'+64y=0$; г) $y''+9y=(2x-5)e^{3x}$.
22.	а) $y''-2y'-15y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-5$; б) $y''-6y'+34y=0$; в) $y''-18y'+81y=0$; г) $y''-12y'+40y=3e^{6x}$.
23.	а) $y''+6y'+25y=0$; б) $y''+2y'+y=0,\ y(0)=5,\ y'(0)=-4$; в) $y''+4y'-12y=0$; г) $y''+4y=2\sin 2x+3\cos 2x$.
24.	а) $y''-6y'+8y=0,\ y(0)=-4,\ y'(0)=3$; б) $4y''+4y'+y=0$; в) $y''+10y'+26y=0$; г) $y''+2y'+y=4e^{2x}$.
25.	а) $y''+81y=0,\ y(0)=9,\ y'(0)=-8$; б) $y''-81y=0$; в) $y''+18y'+81y=0$; г) $y''-8y'+12y=3x^2+5x-1$.
26.	а) $y''-18y'+82y=0$; б) $y''-5y'+4y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-5$; в) $y''-4y'+4y=0$; г) $y''+8y'+25y=13e^{5x}$.
27.	а) $y''-3y'-4y=0,\ y(0)=-3,\ y'(0)=-4$; б) $y''-6y'+10y=0$; в) $y''-20y'+100y=0$; г) $y''-9y'+20y=3e^{-2x}$.
28.	а) $y''+8y'+25y=0,\ y(0)=-10,\ y'(0)=13$; б) $9y''+3y'-2y=0$; в) $y''-18y'+81y=0$; г) $y''+2y'+37y=5x^2-1$.
29.	а) $6y''+7y'-3y=0,\ y(0)=7,\ y'(0)=-6$; б) $4y''-4y'+y=0$; в) $y''+100y=0$; г) $6y''-y'-y=9e^{2x}$.
30.	а) $y''+12y'+36y=0,\ y(0)=8,\ y'(0)=-10$; б) $y''-36y=0$; в) $y''-12y'+40y=0$; г) $2y''+7y'+3y=4\cos 3x$.

Задание 6. Исследовать сходимость числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$:

Вар.	а) u_n	б) u_n	Вар.	а) u_n	б) u_n
1.	$\dfrac{2^n \cdot n!}{n^3}$	$\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$	**5.**	$\dfrac{3n^2+4}{2^n}$	$\dfrac{n}{n^4+1}$
2.	$\dfrac{3^n \cdot \sqrt{n}}{n!}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$	**6.**	$\dfrac{7n+1}{5^n}$	$\dfrac{n}{5n^3+2}$
3.	$\dfrac{4^n}{(n+2)!}$	$\dfrac{2n+1}{n^4+3}$	**7.**	$\dfrac{3n+2}{(n+1)!}$	$\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$
4.	$\dfrac{n^3+1}{4^n}$	$\dfrac{1}{(n+4)\sqrt{n}}$	**8.**	$\dfrac{(n+2)^4}{6^n}$	$\dfrac{n}{n^3+3}$
9.	$\dfrac{n(n+2)}{4^n}$	$\dfrac{n^2+n}{n^4+1}$	**20.**	$\dfrac{3^{n+1}}{7^n \cdot n^4}$	$\dfrac{4n+1}{n^3+2}$
10.	$\dfrac{5^n}{\sqrt{n} \cdot n!}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$	**21.**	$\dfrac{3^{n-1}}{5^n \cdot n^2}$	$\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$
11.	$\dfrac{4^n \cdot n^4}{n!}$	$\dfrac{3n+2}{n^3+6}$	**22.**	$\dfrac{3^n\sqrt{n+1}}{(n+2)!}$	$\dfrac{2n+7}{\sqrt{n^5+3}}$
12.	$\dfrac{2^n}{5^n(2n+1)}$	$\dfrac{n^2}{n^3+5}$	**23.**	$\dfrac{n^3+3}{5^n}$	$\dfrac{1}{4n+\sqrt{n}}$
13.	$\dfrac{4n+3}{6^n}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	**24.**	$\dfrac{5^n}{4^n(6n+5)}$	$\dfrac{n+2}{n^3+3}$
14.	$\dfrac{3^{n+1}}{(n+2)!}$	$\dfrac{n}{n^3+2}$	**25.**	$\dfrac{2^{n+1}}{n \cdot (n+2)!}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$
15.	$\dfrac{3n+7}{8^n}$	$\dfrac{5n+1}{n^4\sqrt{n}}$	**26.**	$\dfrac{n^2+7n}{6^n}$	$\dfrac{3n+2}{n\sqrt{n}+1}$
16.	$\dfrac{n+7}{(n+1)!}$	$\dfrac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}$	**27.**	$\dfrac{\sqrt[3]{n} \cdot 6^n}{(n+1)!}$	$\dfrac{n}{(2n+1)(3n+2)}$
17.	$\dfrac{4^n}{7^n(3n+1)}$	$\dfrac{n+1}{\sqrt{n^6+5}}$	**28.**	$\dfrac{n^3+4}{2^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^6+8}}$
18.	$\dfrac{n^2+3n+1}{4^n}$	$\dfrac{1}{6n+\sqrt{n}}$	**29.**	$\dfrac{n^2+3n+2}{7^n}$	$\dfrac{n+5}{(n+3)^3}$
19.	$\dfrac{5n+3}{6^n}$	$\dfrac{n+6}{n^4+1}$	**30.**	$\dfrac{2^n\sqrt{n}}{(n+3)!}$	$\dfrac{1}{n^6\sqrt{n}}$

Задание 7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$:

Вар.	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{n}{3^n}$	$\frac{2n+1}{n^3+4}$	$\frac{2^n \cdot n}{4^n}$	$\frac{n}{(2n-1)^2}$	$\frac{n+1}{4^n}$
x_0	1	-4	2	5	-1

Вар.	6	7	8	9	10
a_n	$\frac{n+5}{n^3+3}$	$\frac{3n+4}{(n+6)^3}$	$\frac{n}{(3n+1)\cdot 4^n}$	$\frac{2n-1}{3^n \cdot (n+1)}$	$\frac{n+3}{2^n}$
x_0	3	-3	-4	3	-6

Вар.	11	12	13	14	15
a_n	$\frac{4n+1}{n^3+5}$	$\frac{n}{(n+2)\cdot 3^n}$	$\frac{n^2+3}{3^n\sqrt{n}}$	$\frac{8n+5}{n\cdot 4^n}$	$\frac{n}{4n^2-3}$
x_0	-2	-4	1	-5	2

Вар.	16	17	18	19	20
a_n	$\frac{n}{(3n+1)\cdot 5^n}$	$\frac{2n-1}{4^n}$	$\frac{2n+1}{n^2+4}$	$\frac{n}{(6n+1)^2}$	$\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$
x_0	4	-3	5	3	-1

Вар.	21	22	23	24	25
a_n	$\frac{3n+2}{n\cdot 5^n}$	$\frac{n+4}{n\cdot(n^3+1)}$	$\frac{5n+3}{n\cdot 4^n}$	$\frac{2n+5}{(n+1)\cdot 4^n}$	$\frac{n}{n^3-2}$
x_0	-4	2	5	1	-5

Вар.	26	27	28	29	30
a_n	$\frac{3n^2-2}{n^4+1}$	$\frac{3n+2}{6^n\sqrt{n}}$	$\frac{5n+1}{3^n}$	$\frac{n}{7^n(3n-1)}$	$\frac{2n+7}{3^n\sqrt{n}}$
x_0	-2	-4	3	4	-3

Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 1.

При нахождении неопределенных интегралов следует использовать таблицу интегралов основных элементарных функций, свойства интегралов и формулу интегрирования по частям. Найти неопределенные интегралы:

1. $$\int\left(18x^5+\frac{10}{x}-\sqrt[5]{x^3}-\frac{12}{x^4}\right)dx=18\int x^5dx+10\int\frac{dx}{x}-\int x^{3/5}dx-$$

$$-12\int x^{-4}dx=\frac{18}{6}\cdot x^6+10\ln|x|-\frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1}-12\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=$$

$$=3x^6+10\ln|x|-\frac{5}{8}x^{8/5}+\frac{3}{x^3}+C=3x^6+10\ln|x|-\frac{5}{8}x\cdot\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^3}+C.$$

2. $$\int\frac{\ln x}{x^6}dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x, & du=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x}\\ dv=\dfrac{dx}{x^6}, & v=\displaystyle\int\frac{dx}{x^6}=\frac{x^{-5}}{-5}=-\frac{1}{5x^5}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{5x^5}\cdot\ln x-$$

$$-\int\left(-\frac{1}{5x^5}\right)\cdot\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{5x^5}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^6}=-\frac{\ln x}{5x^5}-\frac{1}{25x^5}+C=-\frac{5\ln x+1}{25x^5}+C.$$

3. $$\int(8x+6)\sin 3x\,dx=\left|\begin{matrix}u=8x+6, & du=(8x+6)'dx=8\,dx\\ dv=\sin 3x\,dx, & v=\displaystyle\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{8x+6}{3}\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 8\,dx=-\frac{8x+6}{3}\cos 3x+\frac{8}{3}\int\cos 3x\,dx=$$

$$=-\frac{8x+6}{3}\cos 3x+\frac{8}{9}\sin 3x+C.$$

4. $$\int(3x-4)e^{-x/5}dx=\left|\begin{matrix}u=3x-4, & du=(3x-4)'dx=3dx\\ dv=e^{-x/5}dx, & v=\displaystyle\int e^{-\frac{1}{5}x}dx=-5e^{-x/5}\end{matrix}\right|=$$

$$=-5e^{-x/5}\cdot(3x-4)-\int\left(-5e^{-x/5}\right)\cdot 3dx=-5(3x-4)e^{-x/5}+$$

$$+15\int e^{-x/5}dx=(-15x+20)e^{-x/5}-75e^{-x/5}+C=(-15x-55)e^{-x/5}+C=$$

$$=-5(3x+11)e^{-x/5}+C.$$

5. $\int \ln(x+8)\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x+8), & du = \dfrac{1}{x+8}dx \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{vmatrix} = x \cdot \ln(x+8) - \int \dfrac{x}{x+8}\,dx =$

$= x \cdot \ln(x+8) - \int \dfrac{(x+8)-8}{x+8}\,dx = x \cdot \ln(x+8) - \int\left(1 - \dfrac{8}{x+8}\right)dx =$

$= x \cdot \ln(x+8) - \int dx + 8\int \dfrac{dx}{x+8} = x \cdot \ln(x+8) - x + 8\ln(x+8) + C =$

$= (x+8)\ln(x+8) - x + C, \qquad x+8>0.$

Замечание 1. При интегрировании *неправильных алгебраических дробей* вида $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ надо предварительно выделить целую и дробные части.

6. $\int \dfrac{6x+15}{2x+1}dx = \int \dfrac{(6x+3)+12}{2x+1}dx = \int \dfrac{3(2x+1)+12}{2x+1}dx = \int\left(3 + \dfrac{12}{2x+1}\right)dx =$

$= \int 3dx + \int \dfrac{12\,dx}{2x+1} = 3x + 6\ln|2x+1| + C.$

Задание 2. Пусть: $a=2;\ b=5;\ c=3;\ x_0=2;\ y_0=1;\ l=2;\ m=3.$

Тогда $\quad z = 2x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 4xy + 15y + 3,\ A(2;1),\ \vec{a} = (2;3).$

1. Находим *частные производные* первого и второго порядка $z = f(x,y)$. При дифференцировании функции z по x переменная y временно считается постоянной; при дифференцировании z по y переменная x считается постоянной.

$z'_x = 6x^2 + 10xy + 3y^2 - 4y;\ \ z'_y = 5x^2 + 6xy - 4x + 15;$

$z''_{xx} = 12x + 10y;\ \ z''_{xy} = 10x + 6y - 4;\ \ z''_{yy} = 6x.$

Вычислим значения функции и ее производных в точке А (2;1).

$z(A) = 2\cdot 2^3 + 5\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^1 - 4\cdot 2\cdot 1 + 15\cdot 1 + 3 = 16 + 20 + 6 - 8 +$
$+ 15 + 3 = 52,$

$z'_x(A) = (6x^2 + 10xy + 3y^2 - 4y)\Big|_A = 6\cdot 2^2 + 10\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 4\cdot 1 =$
$= 24 + 20 + 3 - 4 = 43,$

$z'_y(A) = (5x^2 + 6xy - 4x + 15)\Big|_A = 5\cdot 4 + 6\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 15 = 20 + 12 -$
$- 8 + 15 = 39,$

$z''_{xx}(A) = (12x + 10y)\big|_A = 24 + 10 = 34,$

$z''_{xy}(A) = (10x + 6y - 4)\big|_A = 20 + 6 - 4 = 22,$

$z''_{yy}(A) = (6x)\big|_A = 12.$

Эластичности функции z по переменным x и y в точке A равны:

$$E_x(z(A)) = \frac{x}{z}\cdot z'_x\Big|_A = \frac{2}{52}\cdot 43 = 1,65;$$

$$E_y(z(A)) = \frac{y}{z}\cdot z'_y\Big|_A = \frac{1}{52}\cdot 39 = 0,75.$$

При $x = 2$ эластичность функции z положительна, $E_x(z(A)) = 1,65$. Это значит, что если x возрастет на один процент, то есть станет $x = 2,02$, то функция увеличится приблизительно на 1,65%. При увеличении $y = 1$ на один процент функция z возрастет примерно на 0,75%.

2. Составим матрицу Гессе функции z в точке A и вычислим ее определитель

$$H(A) = \begin{pmatrix} z''_{xx}(A) & z''_{xy}(A) \\ z''_{xy}(A) & z''_{yy}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 22 \\ 22 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\det H(A) = \begin{vmatrix} 34 & 22 \\ 22 & 12 \end{vmatrix} = 34\cdot 12 - 22^2 = 408 - 484 = -76.$$

3. *Градиент* функции z в точке A – это вектор

$$grad\, z = (z_x'(A);\, z_y'(A)) = z_x'(A)\cdot\vec{i} + z_y'(A)\cdot\vec{j}.$$

В данном случае $grad\, z(A) = 43\cdot\vec{i} + 39\cdot\vec{j} = (43;39)$.

4. *Производная* функции $z = f(x,y)$ в точке A *по направлению* вектора $\vec{a} = (l;m)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z(A)}{\partial\vec{a}} = z'_x(A)\cdot\cos\alpha + z'_y(A)\cdot\cos\beta,$$

где направляющие косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ вектора $\vec{a}$ соответственно равны:

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}};\quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

Для вектора $\vec{a} = (2;3)$ в силу предыдущих формул получим

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,555;\quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{4+9}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,832.$$

Тогда

$$\frac{\partial z(A)}{\partial\vec{a}} = 43\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} + 39\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{86+117}{\sqrt{13}} = \frac{203}{\sqrt{13}} = 56,302.$$

Так как производная положительна, то в направлении вектора $\vec{a}$, при прохождении через точку A функция z возрастает.

Задание 3. $a=0{,}25;\ b=0{,}10;\ c=0{,}40;\ p_1=13;\ p_2=26.$

1. Стоимость всего товара равна $P=p_1x+p_2y=13x+26y$, а затраты на производство этих товаров составляют $C=0{,}25x^2+0{,}10xy+0{,}40y^2$. Следовательно, функция прибыли имеет вид $П(x,y)=P-C=13x+26y-(0{,}25x^2+0{,}10xy+0{,}40y^2)$.

Исследуем функцию прибыли на локальный экстремум. Находим частные производные $П'_x(x,y)$ и $П'_y(x,y)$ и приравниваем их нулю. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} П'_x(x,y)=13-0{,}5x-0{,}1y=0, \\ П'_y(x,y)=26-0{,}1x-0{,}8y=0. \end{cases}$$

Решаем эту систему

$$\begin{cases} 0{,}5x+0{,}11y=13, \\ 0{,}1x+0{,}8y=26. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+y=130, \\ x+8y=260. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=130-5x, \\ x+8(130-5x)=260. \end{cases}$$

$-39x=260-8\cdot130,\quad 39x=780,\quad x=20,\quad y=30.$

Точка А (20;30) – *стационарная точка* функции $П(x,y)$. Покажем, что при *x = 20*, *y = 30* прибыль будет максимальной.

Находим $П''_{xx}=-0{,}5$; $П''_{xy}=-0{,}1$; $П''_{yy}=-0{,}8$. Составим *матрицу Гессе* для функции $П(x,y)$ в точке А

$$H(A)=\begin{pmatrix} П''_{xx} & П''_{xy} \\ П''_{xy} & П''_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det H(A)=0{,}5\cdot0{,}8-0{,}1^2=0{,}40-0{,}01=0{,}39>0$ и элементы матрицы *Н(А)*, стоящие на главной диагонали, отрицательны, то точка А является точкой максимума функции $П(x,y)$.

$П_{\max}(20;30)=13\cdot20+26\cdot30-(0{,}25\cdot20^2+0{,}1\cdot20\cdot30+0{,}4\cdot30^2)=$
$=260+780-(100+60+360)=520$ (ден. ед.).

Таким образом, чтобы при заданных ценах p_1 и p_2 получить наибольшую прибыль, надо произвести 20 единиц товара первого вида и 30 единиц товара второго вида.

2. Предельная стоимость товара первого вида равна p_1 = 13 (ден. ед.), а предельные издержки на его производство составляют $C'_x(A)=0{,}5\cdot20+0{,}1\cdot30=10+3=13$ (ден. ед.). Предельная стоимость товара второго вида p_2 =26, а затраты на производство $C'_y(A)=0{,}1\cdot20+0{,}8\cdot30=2+24=26$ (ден. ед.).

Таким образом, по двум видам товаров их предельная цена совпадает с предельными затратами на их производство.

Задание 4. Найти общее или частное решение дифференциальных уравнений.

Пример 1. Проинтегрировать ДУ

$$y'\cdot\sin^2 x=y\ln y \Leftrightarrow \sin^2 x\cdot\frac{dy}{dx}=y\ln y \Leftrightarrow \sin^2 x\cdot dy=y\ln y\,dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства

$$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dy}{y\ln y} \Leftrightarrow \int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{dy}{y\ln y} \Leftrightarrow \int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\int\frac{dx}{\sin^2 x} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ln|\ln y|=-ctgx+C$ - *общий интеграл исходного ДУ, где*

Пример 2. Найти *частное решение* ДУ $(2x+1)\,dy-(y+4)\,dx=0$, удовлетворяющее условию $y(4)=11$.

Разделяем переменные

$$(2x+1)\,dy=(y+4)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y+4}=\frac{dx}{2x+1} \Rightarrow \int\frac{d(y+4)}{y+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y+4|=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\ln|C|, \quad 0\neq C-\forall const \Rightarrow \ln|y+4|=$$

$=\ln\left|C\cdot\sqrt{2x+1}\right| \Rightarrow y+4=C\sqrt{2x+1} \Rightarrow y=C\sqrt{2x+1}-4$ - *общее решение* данного уравнения.

Определим постоянную С так, чтобы выполнялось начальное условие $y(4)=11$. $11=C\sqrt{2\cdot4+1}-4,\ \ 11=3C-4,\ \ 3C=15,\ \ C=5$. Получаем *частное решение* данного уравнения в виде $y=5\sqrt{2x+1}-4$.

Пример 3. Найти *частное решение* ДУ $y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x}-4x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=4$.

Находим общее решение исходного уравнения с помощью замены $y=u(x)\cdot v(x),\ \ y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. Подставляем эту замену в уравнение

$$u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{3u\cdot v}{x}=\frac{2}{x}-4x,$$

$$u'\cdot v+u\left(v'+\frac{3v}{x}\right)=\frac{2}{x}-4x.$$

Функции $v(x)$ и $u(x)$ определяем из условий

$$\begin{cases} v'+\dfrac{3v}{x}=0, \\ u'v=\dfrac{2}{x}-4x. \end{cases}$$

$$v'+\frac{3v}{x}=0 \ \Rightarrow\ \frac{dv}{dx}=-\frac{3v}{x} \ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{3\,dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-3\ln|x| \ \Rightarrow$$

$$=\ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x^3}\right| \ \Rightarrow\ v=\frac{1}{x^3}.$$

$$u'\cdot v=\frac{2}{x}-4x,\ \ u'\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{2}{x}-4x,\ \ u'=2x^2-4x^4,\ \ du=(2x^2-4x^4)\,dx,$$

$$u=\int(2x^2-4x^4)\,dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5+C.$$

Общее решение ДУ имеет вид

$$y=u\cdot v,\ \ y=\frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5+C\right),$$

$$y=\frac{C}{x^3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}x^2,\ \ C-\forall const.$$

Определим C из начального условия $y(1)=4$.

$$4=C+\frac{2}{3}-\frac{4}{5},\quad C=4-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{60-10+12}{15}=\frac{62}{15}.$$

Искомое *частное решение* имеет вид $y=\dfrac{62}{15x^3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}x^2$.

Задание 5. Найти *общее решение* следующих ЛОДУ:

1) $y''+y'-56y=0$; 3) $y''+16y'+64y=0$.

2) $y''-16y'+68y=0$;

Найти *общее решение* ПНДУ:

4) $y''-4y'+3y=5xe^{-x}$, 7) $y''-6y'+10y=3\cos x-4\sin x$,

5) $y''-4y'+3y=(8x-4)e^{x}$, 8) $y''+25y=\cos 5x$.

6) $y''-6y'+9y=4e^{3x}$,

Решение. ***Пример1.*** $y''+y'-56y=0$.

С помощью замены $y=e^{kx}$ приходим к характеристическому уравнению

$k^2+k-56=0,\ \ D=1-4\cdot(-56)=1+224=225,$

$k_{1,2}=\dfrac{-1\pm15}{2},\ \ k_1=\dfrac{-1-15}{2}=-8,\ \ k_2=\dfrac{-1+15}{2}=7.$

Общее решение ДУ есть:

$y=C_1e^{-8x}+C_2e^{7x}$, где $C_1,\ C_2\ -\forall\, const.$

Если надо выделить *частное решение*, удовлетворяющее начальным условиям, например, $y(0)=5;\ y'(0)=-10$, то находим $y'(x)$,

$$y'(x)=-8C_1e^{-8x}+7C_2e^{7x}.$$

Далее составляем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases}y(0)=5,\\ y'(0)=-10.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=5,\\ -8C_1+7C_2=-10.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=5-C_1,\\ -8C_1+35-7C_1=-10.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_2=5-C_1,\\ -15C_1=-45.\end{cases}\Rightarrow C_1=3,\ \ C_2=2.$$

Частное решение имеет вид $y=3e^{-8x}+2e^{7x}$.

Пример 2. $y''-16y'+68y=0$.

$k^2-16k+68=0,\ \ (k-8)^2+4=0,\ \ (k-8)^2=-4,$

$k-8=\pm\sqrt{-4}=\pm2i,\ \ k_{1,2}=8\pm2i,\ \ \alpha=8,\ \ \beta=2.$

Общее решение данного уравнения запишется в виде:

$y=C_1e^{8x}\cos2x+C_2e^{8x}\sin2x$, где $C_1,C_2-\forall\, const.$

Пример 3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

$k^2 + 16k + 64 = 0, \quad (k+8)^2 = 0, \quad k_{1,2} = -8.$

Общее решение

$y = C_1 e^{-8x} + C_2 x e^{-8x}$, где $C_1, C_2 - \forall\, const.$

Пример 4. $y'' - 4y' + 3y = 5xe^{-x}$. Общее решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y = \bar{y}(x) + y_*(x)$, где $\bar{y}(x)$ - общее решение соответствующего однородного решения, $y_*(x)$ - частное решение неоднородного.

$\bar{y}(x) = ? \quad y'' - 4y' + 3y = 0, \quad k^2 - 4k + 3 = 0,$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}, \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = 3.$$

$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 - \forall\, const.$

$y_*(x) = ?, \; f(x) = 5xe^{-x}, \; P_1(x) = 5x, \; \alpha = -1, \; \alpha \neq k_1, \; \alpha \neq k_2.$

Будем искать $y_*(x)$ в виде $y_*(x) = (ax+b)e^{-x}$, где a и b – неопределенные пока коэффициенты, подлежащие вычислению. Найдем

$y_*'(x) = ae^{-x} + (ax+b)e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(a - ax - b),$

$y_*''(x) = -e^{-x}(a - ax - b) + e^{-x}(-a) = -e^{-x}(a - ax - b + a) =$

$= -e^{-x}(2a - ax - b).$

Подставим y_*, y_*', y_*'' в исходное уравнение

$$y_*'' - 4y_*' + 3y_* = 5xe^{-x}.$$

Получим

$-e^{-x}(2a - ax - b) - 4e^{-x}(a - ax - b) + 3e^{-x}(ax+b) = 5xe^{-x}.$

Сокращаем на e^{-x} и приводим подобные

$-2a + ax + b - 4a + 4ax + 4b + 3ax + 3b = 5x,$

$8ax - 6a + 8b = 5x.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{r|l} x & 8a = 5, \\ x^0 & -6a + 8b = 0. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{8}, \\ b = \dfrac{6}{8}a = \dfrac{3}{4}a = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{8} = \dfrac{15}{32}. \end{cases}$$

Частное решение имеет вид $y_*(x) = \left(\dfrac{5}{8}x + \dfrac{15}{32}\right)e^{-x}.$

Общее решение исходного ДУ есть

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \left(\frac{5}{8}x + \frac{15}{32}\right)e^{-x}, \quad C_1, C_2 - \forall const.$$

Пример 5. $y''-4y'+3y=(8x-4)e^x$.

$y=\bar{y}(x)+y_*(x)$.

$\bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}$, т.к. соответствующее однородное ДУ осталось тем же.

Ищем частное решение $y_*(x)$; $f(x)=(8x-4)e^x$, $P_1(x)=8x-4$, $\alpha=1=k_1$, поэтому

$y_*(x)=x(ax+b)e^x=(ax^2+bx)e^x$,

$y_*'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx)e^x=e^x(ax^2+2ax+bx+b)$,

$y_*''(x)=e^x(ax^2+2ax+bx+b+2ax+2a+b)=e^x(ax^2+4ax+bx+2a+2b)$.

Подставим выражения для y_*, y_*', y_*'' в левую часть исходного уравнения

$e^x(ax^2+4ax+bx+2a+2b)-4e^x(ax^2+2ax+bx+b)+3(ax^2+bx)=$

$=(8x-4)e^x$.

Сокращая на e^x и приводя подобные, будем иметь

$$-2ax+a-b=4x-2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{c|l} x & -2a=4, \\ x^\circ & a-b=-2. \end{array}\Bigg\}\Rightarrow\begin{cases} a=-2, \\ b=a+2=0. \end{cases}$$

Частное решение $y_*(x)=-2x^2e^x$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}-2x^2e^x,\ C_1,C_2-\forall const.$$

Пример 6. $y''-6y'+9y=4e^{3x}$.

$$y=\bar{y}(x)+y_*(x).$$

$\bar{y}(x)=?$ $y''-6y'+9y=0$, $k^2-6k+9=0$,

$(k-3)^2=0$, $k_{1,2}=3\Rightarrow\bar{y}(x)=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

$y_*=?$ $f(x)=4\cdot e^{3x}$, $P_0(x)=4$, $\alpha=3=k_1=k_2\Rightarrow$

$\Rightarrow y_*(x)=x^2\cdot a\cdot e^{3x}$.

$y_*'=2xae^{3x}+3ax^2e^{3x}=ae^{3x}=ae^{3x}(2x+3x^2)$,

$y_*''=ae^{3x}(6x+9x^2+2+6x)=ae^{3x}(9x^2+12x+2)$,

$y_*''-6y_*'+9y_*=4e^{3x}$,

$ae^{3x}(9x^2+12x+2)-6ae^{3x}(2x+3x^2)+9ae^{3x}\cdot x^2=4e^{3x}$.

Сокращая на e^{3x} и приводя подобные, получим $2a=4$, $a=2$.

Следовательно,

$y_*(x)=2x^2e^{3x}$, $y(x)=e^{3x}(C_1+C_2x+2x^2)$, $C_1,C_2-\forall const$.

Пример 7. $y'' - 6y' + 10y = 3\cos x - 4\sin x$.

$y = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

$\overline{y}(x) = ?\quad y'' - 6y' + 10y = 0,\quad k^2 - 6k + 10 = 0,$

$D = 36 - 40 = -4,\quad k_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2},\quad i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица.*

$k_{1,2} = 3 \pm i,\ \alpha = 3,\ \beta = 1.$

$\overline{y}(x) = C_1 e^{3x}\cos x + C_2 e^{3x}\sin x,\ \ C_1, C_2 - \forall\, const.$

$y_*(x) = ?\ \ f(x) = 3\cos x - 4\sin x \Rightarrow y_*(x) = a\cos x + b\sin x$, a и b – пока неопределенные числа.

$y_*'(x) = -a\sin x + b\cos x,\ \ y_*''(x) = -a\cos x - b\sin x.$

$y_*'' - 6y_*' + 10y_* = 3\cos x - 4\sin x,$

$-a\cos x - b\sin x + 6a\sin x - 6b\cos x + 10a\cos x + 10b\sin x = 3\cos x - 4\sin x.$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$.

$$\begin{array}{l|l} \cos x & -a - 6b + 10a = 3, \\ \sin x & -b + 6a + 10b = -4. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} 9a - 6b = 3, \\ 6a + 9b = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 1, \\ 6a + 9b = -4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+2b}{3}, \\ 6\cdot\dfrac{1+2b}{3} + 9b = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+2b}{3}, \\ 2 + 4b + 9b = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+2b}{3}, \\ 13b = -6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{1}{39}, \\ b = -\dfrac{6}{13}. \end{cases}$$

Частное решение $\quad y_*(x) = \dfrac{1}{39}\cos x - \dfrac{6}{13}\sin x.$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$y = C_1 e^{3x}\cos x + C_2 e^{3x}\sin x + \dfrac{1}{39}\cos x - \dfrac{6}{13}\sin x,\ \ C_1, C_2 - \forall\, const.$

Пример 8. $y'' + 25y = \cos 5x$.

$y = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

$\overline{y}(x) = ?\ \ y'' + 25y = 0,\ \ k^2 + 25 = 0,\ \ k^2 = -25,$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i;\ \ \alpha = 0,\ \ \beta = 5.$

$\bar{y}(x) = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x, \quad C_1, C_2 - \forall\, const.$

$y_*(x) = ? \quad f(x) = 1 \cdot \cos 5x + 0 \cdot \sin 5x \Longrightarrow y_* = x(a \cos 5x + b \sin 5x),$

a и *b* – *const*

$y_*' = (a \cos 5x + b \sin x) + 5x(-a \sin 5x + b \cos 5x),$

$y_*'' = 5(-a \sin 5x + b \cos 5x) + 5(-a \sin 5x + b \cos 5x) + 25x(-a \cos 5x -$

$- b \sin 5x).$

Выражения для y_*, y_*'' подставляем в исходное уравнение $y_*'' + 25 y_* = \cos 5x.$

$10(-a \sin 5x + b \cos 5x) - 25x(a \cos 5x + b \sin 5x) + 25x(a \cos 5x + b \sin 5x) =$

$= \cos 5x.$

$10(-a \sin 5x + b \cos 5x) = \cos 5x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin 5x$ и $\cos 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cos 5x & 10b = 1, \\ \sin 5x & -10a = 0. \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}1, \\ a = 0. \end{cases}$$

Частное решение $y_*(x) = 0{,}1x \sin 5x.$

Общее решение

$y(x) = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + 0{,}1x \sin 5x, \quad C_1, C_2 - \forall const.$

Задание 6.

Примеры. Исследовать сходимость числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$:

а) $u_n = \dfrac{3^n}{(n^2+1)\cdot n!}$; б) $u_n = \dfrac{1}{(n+3)\ln^4(n+3)}$; в) $u_n = \dfrac{7_n + 1}{(n+3)\sqrt{n+3}}$;

г) $u_n = \dfrac{3n^2 + 4n + 7}{n^5 + 6}$.

Решение.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n^2+1)\cdot n!} = \dfrac{3}{2\cdot 1} + \dfrac{3^2}{5\cdot 2} + \dfrac{3^3}{10\cdot 6} + \dfrac{3^4}{17\cdot 24} + \ldots$

Здесь $u_n = \dfrac{3^n}{(n^2+1)\cdot n!}$; $\qquad u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{((n+1)^2+1)\cdot(n+1)!} = \dfrac{3^{n+1}}{(n^2+2n+2)\cdot(n+1)!}$,

n! = (эн-факториал) = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; $(n+1)! = n!(n+1).$

Здесь удобно применить признак Д'Аламбера.

Решение.

а) Дан степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}\cdot (x-4)^n. \qquad (15)$$

Найдем интервал его *абсолютной сходимости.* Для этого применим к ряду из модулей признак Д'Аламбера

$$|u_n(x)| = \frac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}\cdot |x-4|^n, \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{5n+7}{(n+4)\cdot 7^{n+1}}\cdot |x-4|^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(5n+7)\cdot |x-4|^{n+1}\cdot (n+3)\cdot 7^n}{(n+4)\cdot 7^{n+1}\cdot (5n+2)\cdot |x-4|^n} = \frac{|x-4|}{7}\times$$

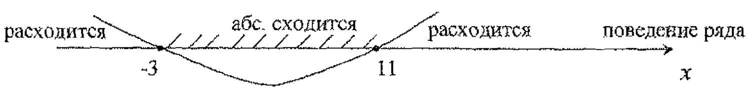
$$\times \lim_{n\to\infty}\frac{(5n+7)(n+3)}{(n+4)(5n+2)} = \frac{|x-4|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{5n^2} = \frac{|x-4|}{7}.$$

Если $\frac{|x-4|}{7}<1 \Leftrightarrow |x-4|<7 \Leftrightarrow -7<x-4<7 \Leftrightarrow -3<x<11$, то ряд (15) *сходится абсолютно.*

Если $\frac{|x-4|}{7}>1 \Leftrightarrow |x-4|>7$ т.е. $\left[\begin{array}{l} x-4>7, \\ x-4<-7, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>11, \\ x<-3, \end{array}\right.$

т.е. $x\in(-\infty;-3)\cup(11;+\infty)$, то ряд (15) расходится.

Если $\frac{|x-4|}{7}=1 \Leftrightarrow |x-4|=7 \Leftrightarrow x=4\pm 7$, то признак Д'Аламбера ответа не дает.



Исследуем поведение ряда (15) на концах интервала сходимости, т.е. при $x=-3$ и $x=11$.

1) $x=-3$. $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n+2}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot u_n, \quad u_n = \frac{5n+2}{n+3}.$

Так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n+3} = 5 \neq 0$, то ряд *расходится.*

2) $x=11$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}(11-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+2)\cdot 7^n}{(n+3)\cdot 7^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n+3}$ -

ряд *расходящийся,* т.к. его общий член не стремится к нулю при $n\to\infty$ (не выполняется необходимый признак сходимости ряда).

Таким образом, *областью сходимости* степенного ряда (15) является интервал $-3<x<11$.

б) Рассматриваем степенной ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2-1}{n^4+3}(x+6)^n$. (16)

Составляем ряд из модулей и применяем признак Д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{n^4+3} \cdot |x+6|^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(4(n+1)^2-1)\cdot|x+6|^{n+1}\cdot(n^4+3)}{((n+1)^4+3)\cdot(n^4-1)\cdot|x+6|^n} = |x+6| \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2\cdot n^4}{n^4\cdot 4n^2} = |x+6|.$$

Если $|x+6|<1 \iff -1<x+6<1 \iff -7<x<-5$, то ряд (16) *сходится абсолютно*.

Если $|x+6|>1$, т.е. $x\in(-\infty;-7)\cup(-5;+\infty)$, то ряд (16) *расходится*.

При $x=-7$ и $x=-5$ нужно дополнительное исследование.

1) $x=-7$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{4n^2-1}{n^4+3}$, (17)

2) $x=-5$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2-1}{n^4+3}$. (18)

Очевидно, что ряд (18) сходится по признаку сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{n^4+3} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2-1)\,n^2}{n^4+3} = 4.$$

Значит, ряд (17) *сходится абсолютно*. Следовательно, *областью сходимости* степенного ряда (16) является отрезок $x\in[-7;-5]$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ДЛЯ ВТОРОГО СЕМЕСТРА

Занятие 6.Функции нескольких переменных.

1.Область определения функции z=f(M).Частные производные, производная по направлению, градиент функции.

Теоретические сведения.

Если каждой точке M из некоторой области D соответствует некоторое число z из множества $E \subset R$, то говорят, что z есть функция от M. Если точка M имеет две координаты $M(x,y)$, то $z = f(x,y)$-функция двух переменных. Функцию трех переменных обычно обозначают так: $u = f(x,y,z)$. $D(f)$ - область определения (существования) функции, $E(f)$ - область значений функции.

Частными производными функции $z = f(x,y)$ по x и по y соответственно называются пределы отношений вида:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y).$$

При нахождении частной производной по одной переменной другие переменные считаются постоянными, поэтому все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Производной функции $u = f(x,y,z)$ **в точке** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **в направлении вектора** $\vec{a} = (l,m,n)$ называется предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\Delta u(M_0)}{|M_0 M|} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{a}}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{M_0 M}$$

Эта производная находится по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial a} = u'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + u'_y(M_0)\cdot\cos\beta + u'_z(M_0)\cdot\cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы.

Градиентом функции $u = u(x,y,z)$ называется вектор с координатами $grad u = (u'_x, u'_y, u'_z)$.

Частные производные по x и y от частных производных $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ называются **частными производными функции второго порядка** и обозначаются $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$.

Аудиторные задания.

1. Найти и изобразить области определения следующих функций:

$a)\ z=\sqrt{y^2-2x+4},\qquad b)\ z=\ln x+\ln\cos y.$

2. Найти частные производные $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{xx}, z''_{yx}, z''_{yy}$:

$a)\ z=(5x^2+xy-1)(2y-4x+3),\qquad b)\ z=x^3y+\cos x-3tgx\cdot\ln y+5,$

$c)\ z=\sin^2 x\cos 3y,\qquad d)\ z=\ln(2x^2-4y+6),$

$e)\ z=xe^{-xy},\qquad f)\ z=\dfrac{3y+2}{x^3-xy-4}.$

3. Найти полный дифференциал функции, если:

$a)\ z=\ln tg\dfrac{y}{6x},\quad b)\ u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

4. Найти производную функции $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$ в точке $M_0(1;\ 2)$ в направлении вектора $\overline{M_0M_1}$, где $M_1(4;\ 6)$. Найти градиент функции в точке M_1.

5. Найти производную функции $u=x^2-3yz+7$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению к точке $M_2(7;\ 4;\ 8)$. Найти $grad\,u(M_1)$.

Индивидуальные задания.

1. Найти частные производные и полный дифференциал функции.

1.1 $z=ctg(xy^2).$	2.1 $z=\cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}.$	3.1 $z=tg\dfrac{2x-y^2}{x}.$	4.1 $z=\ln(3x^2-y^4).$

2. Найти производную функции в точке M_0 в направлении вектора $\overline{M_0M_1}$; градиент функции в точке M_0.

1.2 $u=\ln(x+\dfrac{y}{2z}),$ $M_0(1;2;1), M_1(-2;3;5).$	3.2 $u=z\sin(x-y),$ $M_0(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\sqrt{3}), M_1(\pi,\dfrac{\pi}{6},2\sqrt{3}).$
2.2 $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z},$ $M_0(-1;1;2), M_1(8;-1;-4).$	4.2 $u=8\cdot\sqrt[5]{x^3+y^2+z},$ $M_0(3;2;1), M_1(5;8;4).$

Решение типового варианта.

1. Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $z=tg(x^3+5y)$.

2. Дана функция $u=x+y^2-z^3$ и точка $M_0(1;2;-1)$. Найти производную функции в точке M_0 в направлении вектора $\overline{M_0M_1}$, где $M_1(3;\ -4;\ 2)$.

Решение.

1. При дифференцировании данной функции по переменной x вторая переменная y считается постоянной. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$z'_x = \frac{1}{\cos^2(x^3+5y)}\cdot(x^3+5y)'_x = \frac{1}{\cos^2(x^3+5y)}\cdot 3x^2;$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos^2(x^3+5y)}\cdot(x^3+5y)'_y = \frac{1}{\cos^2(x^3+5y)}\cdot 5.$$

Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле

$$dz = z'_x\cdot dx + z'_y\cdot dy = \frac{3x^2dx+5dy}{\cos^2(x^3+5y)}.$$

2. Находим частные производные функции в точке M_0:

$u'_x = 1,\quad u'_x(1,\,2,-1)=1.$

$u'_y = 2y,\quad u'_y(1,\,2,-1)=4.$

$u'_z = -3z^2,\quad u'_z(1,\,2,-1)=-3.$

Находим координаты вектора $\overline{M_0M_1} = (2,-6,3)$ и его направляющие косинусы

$$\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{4+36+9} = 7,\quad \cos\alpha = \frac{2}{7},\quad \cos\beta = -\frac{6}{7},\quad \cos\gamma = \frac{3}{7}.$$

Тогда искомая производная будет равна

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial a} = 1\cdot\frac{2}{7} + 4\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) - 3\cdot\frac{3}{7} = \frac{2-24-9}{7} = -\frac{31}{7}.$$

Так как производная отрицательна, то функция в данной точке в данном направлении убывает.

Градиент функции в точке *(1; 2; -1)* равен $grad\,u(1;2;-2)=(1;4;-3)$.

2. Экстремум функции двух и трех переменных (локальный, условный). Теоретические сведения.

Функция $u=f(M)$ имеет *локальный максимум (минимум) в точке* M_0, если существует окрестность $U(M_0)$ точки M_0 такая, что для любой точки $M\in U(M_0)$ выполняется неравенство $f(M)<f(M_0)\quad (f(M)>f(M_0))$.

Точка M_0 называется *точкой экстремума функции*, а значение функции в ней - *экстремальным значением*.

Теорема 1 (необходимые условия локального экстремума функции двух переменных). Если непрерывно дифференцируемая функция $u=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ достигает экстремума, то ее частные производные по x и по y в точке M_0 равны нулю: $f'_x(x_0,y_0)=0$ и $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Точка M_0 называется стационарной точкой функции $u=f(x,y)$, если $du(M_0)=0$.

Теорема 2 (достаточные условия локального экстремума функции двух переменных). Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ - стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $u=f(x,y)$. Тогда, если:

а) $u''_{xx}(x_0,y_0)>0$ *и* $\Delta_2=\begin{vmatrix} u''_{xx}(x_0,y_0) & u''_{xy}(x_0,y_0) \\ u''_{yx}(x_0,y_0) & u''_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}>0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ - точка локального минимума;

б) $u''_{xx}(x_0,y_0)<0$ *и* $\Delta_2=\begin{vmatrix} u''_{xx}(x_0,y_0) & u''_{xy}(x_0,y_0) \\ u''_{yx}(x_0,y_0) & u''_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}>0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ - точка локального максимума;

в) $\Delta_2<0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремума нет;

г) $\Delta_2=0$, то экстремум может быть, а может и не быть. Нужны дополнительные исследования.

Аудиторные задания.

1. Исследовать функции на локальный экстремум:

1). $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

2). $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

2. Найти условные экстремумы функций:

1). $z=2x^3+y^2\cdot(1-x)$, *если* $x+y=2$.

2). $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, *если* $x+y=4$.

Индивидуальные задания.

1.Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на локальный экстремум.

2. Найти условный экстремум функции $z=f(x,y)$.

Вариант 1.	1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y-2$.	2. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, *если* $x+y=2$.
Вариант 2.	1. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x-3$.	2. $z=x^2+xy+y^2-5x-4y+10$, *если* $x+y=4$.
Вариант 3.	1. $z=3x^3+3y^3-9xy+6$.	2. $z=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$, *если* $4x-y=1$.
Вариант 4.	1. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.	2. $z=x^2+y^2$, *если* $3x+2y=6$.

Решение типового варианта.

1. Найти экстремум функции $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.

Чтобы найти точки, в которых возможен экстремум, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2\sqrt{y}-8=0, \\ -\dfrac{x}{\sqrt{y}}+1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{y}, \\ 6x-2x-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{y}, \\ x=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$$

Значит, экстремум возможен в точке $M(2,4)$, то есть точка $M(2,4)$ является стационарной или критической. Чтобы исследовать характер экстремума, находим частные производные второго порядка данной функции в полученной точке.

$$z''_{xx}=6,\quad z''_{xy}=-\frac{1}{\sqrt{y}},\ z''_{yy}=(-x)\cdot(y^{-\frac{1}{2}})'_y=(-x)(-\frac{1}{2})y^{-\frac{3}{2}}=\frac{x}{2y\sqrt{y}}.$$

$$z''_{xx}(2;4)=6,\quad z''_{xy}=-\frac{1}{2},\ z''_{yy}=\frac{2}{2\cdot4\cdot2}=\frac{1}{8}.$$

Вычислим определитель

$\Delta_2=\begin{vmatrix}6 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\end{vmatrix}=6\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}>0$, значит, экстремум в точке $M(2,4)$ существует. Так как $z''_{xx}(2;4)=6>0$, то точка $M(2,4)$ - точка локального минимума и $z_{min}=z(2;4)=3\cdot4-2\cdot2\cdot2+4-8\cdot2+8=0$.

2. Найти условный экстремум функции

$$z=-x^2-y^2+4x-4y+7,\ если\quad x+2y=4.$$

Из уравнения связи выразим переменную $x=4-2y$ и подставим в выражение для функции. Получим функцию одной переменной y.

$$z=-(4-2y)^2-y^2+4(4-2y)-4y+7,\qquad z(y)=4y-5y^2+7.$$

Находим ее первую производную, приравниваем ее к нулю, получим точку, в которой возможен экстремум:

$$z'(y)=4-10y,\quad 10y=4,\quad y=0,4;\quad x=4-2\cdot0,4=3,2.$$

Так как $z''(y)=-10<0$, то точка $M(3,2;\,0,4)$ - точка условного максимума и $z_{max}=z(3,2;\,0,4)=7,8$.

Занятие 7. Неопределенный интеграл.

1. Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Теоретические сведения.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на данном промежутке (a,b), если $F'(x)=f(x)$ на этом промежутке.

Если у данной функции существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Две различные первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Определение 2. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на некотором промежутке (a,b) называется множество всех первообразных этой функции на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$, то есть $\int f(x)dx=F(x)+C$, где С - произвольная постоянная.

Нахождение неопределенного интеграла от функции f(x) называется *интегрированием* данной функции. Эта операция является обратной *дифференцированию.*

Простейшие методы интегрирования включают в себя нахождение неопределенных интегралов с помощью основных правил интегрирования и таблицы интегралов, интегрирование путем внесения производной под знак дифференциала.

Основные правила интегрирования.

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a = const.$

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

3. Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при замене переменной интегрирования на любую дифференцируемую функцию от нее, то есть если $\int f(x)dx = F(x) + C$, и $u = u(x)$ - дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Таблица интегралов.

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$	2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	4	$\int e^x dx = e^x + C.$
5.	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	6.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
9	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$	10.	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C.$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$
13.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|.$

Из третьего основного правила интегрирования вытекает, что все интегральные формулы 1 - 14 остаются справедливыми, если в них вместо переменной *x* подставить некоторую дифференцируемую функцию от *x*. При этом для сведения рассматриваемого интеграла к табличному интегралу иногда достаточно представить дифференциал dx по одной из формул (операция «поднесение под знак дифференциала):

$$1. dx = d(x+a), \qquad 2. dx = \frac{1}{a} d(ax), \qquad 3. dx = \frac{1}{a} d(ax+b).$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1) = \begin{bmatrix} по\,правилам\,1,2 \quad и \\ табличному\,интегралу\,1 \end{bmatrix} = 4\int x^3 dx - 2\int x^{\frac{2}{3}} dx +$

$+2\cdot\int x^{-3} dx + \int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + x + c = x^4 - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + c.$

$$2.\ \int\frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\ln|4x+\sqrt{16x^2+9}|+C.$$

$$3.\ \int\frac{dx}{(2x-1)^5}=\int(2x-1)^{-5}dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{-5}d(2x-1)=\frac{1}{-8}(2x-1)^{-4}+C=$$

$$=-\frac{1}{8(2x-1)^4}+C.$$

$$4.\ \int\frac{dx}{\sin^2 6x}=\frac{1}{6}\int\frac{d(6x)}{\sin^2 6x}=-\frac{1}{6}ctg6x+C.$$

$$5.\ \int\cos(x^4+x)(4x^3+1)dx=\int\cos(x^4+x)d(x^4+x)=\sin(x^4+x)+C.$$

$$6.\ \int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

После выделения полного квадрата в знаменателе и поднесения под дифференциал воспользовались табличным интегралом 9.

В последующих примерах будет применен метод внесения производной под знак дифференциала. Он основан на использовании формулы $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$, из которой, в частности, следует, что:

$$xdx=\frac{1}{2}(x^2)'dx=\frac{1}{2}d(x^2),\qquad x^2dx=\frac{1}{3}(x^3)'dx=\frac{1}{3}d(x^3),$$

$$\frac{dx}{x}=(\ln x)'dx=d(\ln x),\qquad \cos xdx=(\sin x)'dx=d(\sin x),$$

$$\sin xdx=-(\cos x)'dx=-d(\cos x),\qquad e^xdx=(e^x)'dx=d(e^x),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x}=(tgx)'dx=d(tgx),\qquad \frac{dx}{\sin^2 x}=-(ctgx)'dx=-d(ctgx),$$

$$\frac{dx}{1+x^2}=(arctgx)'dx=d(arctgx),\qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(\arcsin x)'dx=d(\arcsin x).$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

$$1.\ \int x^2\sqrt{4+x^3}dx=\frac{1}{3}\int(4+x^3)^{\frac{1}{2}}(4+x^3)'dx=\frac{1}{3}\int(4+x^3)^{\frac{1}{2}}d(4+x^3)=\frac{2}{9}(4+x^3)^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3}+C.$$

$$2.\ \int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int\frac{(\ln(x+1))'dx}{\ln(x+1)}=\int\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln|\ln(x+1)|+C.$$

$$3.\ \int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(\arcsin x)'dx}{\arcsin x}=\int\frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}=\ln|\arcsin x|+C.$$

Аудиторные задания

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\left(2\sqrt{x^5}-\frac{8}{x^3}+\frac{4x}{\sqrt{x^3}}\right)dx$, 2. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{5x^2+4}}-\frac{1}{3x^2-4}\right)dx$, 3. $\int\left(\frac{6}{(2+4x)^{13}}-5(3x+1)^{15}\right)dx$,

4. $\int(2\sin(1-6x)+4e^{3+5x})dx$, 5. $\int\sqrt[4]{\sin x}\cos x dx$, 6. $\int\sqrt{1+\ln x}\,\frac{dx}{x}$, 7. $\int\frac{dx}{\sin^2(1-3x)}$,

8. $\int\frac{dx}{2x^2+6x+4}$, 9. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5+x^4}}$, 10. $\int\frac{tg^4 x}{\cos^2 x}dx$, 11. $\int\frac{2x-5}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 12. $\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}dx$.

Индивидуальные задания.

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int\left(2\sqrt{x^9}-\frac{10}{x^6}+\frac{4x^4}{\sqrt{x^3}}\right)dx$, 2. $\int\left(\frac{7}{\sqrt{4x^2+4}}-\frac{1}{3x^2+18}\right)dx$, 3. $\int\left(\frac{1}{(2x-1)^5}-(3x+4)^{10}\right)dx$, 4. $\int(2\sin(3-8x)+6e^{3+4x})dx$, 5. $\int\sin x\cos^2 x dx$, 6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$, 7. $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$.	1. $\int\left(9\sqrt{x^5}-\frac{1}{2x}-\frac{8\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$, 2. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}}+\frac{1}{2x^2-4}\right)dx$, 3. $\int\left(\frac{6}{(7x-11)^{13}}+(5x+3)^9\right)dx$, 5. $\int\sin x\cos^{-2} x dx$, 6. $\int\frac{\ln^4(x-2)dx}{(x-2)}$, 7. $\int\frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$.
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $\int\left(2\sqrt{x^5}-\frac{5}{x^4}+\frac{7x}{\sqrt{x^3}}\right)dx$, 2. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{2x^2+4}}-\frac{1}{3x^2+4}\right)dx$, 3. $\int\left(\frac{2}{(8+3x)^{15}}-(8x+7)^{20}\right)dx$, 4. $\int(2\sin(4-5x)+8e^{3+5x})dx$, 5. $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$, 6. $\int\frac{dx}{x^2+4x+6}$, 7. $\int\frac{dx}{cos^2(3+7x)}$.	1. $\int\left(4\sqrt{x^3}-\frac{5}{x^3}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^3}}\right)dx$, 2. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{3x^2+1}\right)dx$, 3. $\int\left(\frac{7}{(2+8x)^{13}}+(4-5x)^{10}\right)dx$, 4. $\int(3\sin(4-6x)+5e^{7x+8})dx$, 5. $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$, 6. $\int\sqrt{1+\ln(x+4)}\,\frac{dx}{x+4}$, 7. $\int\frac{dx}{\sin^2(7-4x)}$.

Решение типового варианта.

Найти неопределенные интегралы:

Пример 1.

$$\int(6\sqrt{x^5}-4\frac{x^2}{\sqrt{x}})dx=6\int x^{\frac{5}{2}}dx-4\int x^{2-0,5}dx=6\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-4\frac{x^{2+0,5}}{2,5}+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt{x^7}-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+C=\frac{12}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+C.$$

Пример 2.

$$\int e^{1-3x}dx=\begin{vmatrix}1-3x=t, & 3x=1-t\\ x=\frac{1-t}{3}, & dx=-\frac{1}{3}dt\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\int e^t dt=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{1-3x}+C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{dx}{\cos^2(6x-1)}=\begin{vmatrix}6x-1=t, & 6x=t+1\\ x=\frac{t+1}{6}, & dx=\frac{dt}{6}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{6}tgt+C=\frac{1}{6}tg(6x-1)+C.$$

Пример 4.

$$\int\frac{\ln(x+7)}{x+7}dx=\begin{vmatrix}\ln(x+7)=t,\\ dt=(\ln(x+7))'dx=\frac{dx}{x+7}\end{vmatrix}=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\ln^2(x+7)+C.$$

2. Интегрирование по частям.

Этот метод интегрирования основан на использовании формулы

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)\ \text{или}\ \int udv=uv-\int vdu,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$-непрерывно дифференцируемые функции.

Применение формулы целесообразно, когда под знаком интеграла имеется произведение функций разных классов. В некоторых случаях формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

$$1.\ \int\ln xdx=\begin{vmatrix}u=\ln x, & du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx, & v=x\end{vmatrix}=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C=$$

$$=x(\ln x-1)+C$$

$$2.\ \int(2x+1)\cos 3xdx=\begin{vmatrix}u=2x+1, & du=2dx\\ dv=\cos 3xdx, & v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{vmatrix}=\frac{2x+1}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\int\sin 3xdx=$$

$$=\frac{2x+1}{3}\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+C.$$

$$3.\int x^2\sin x dx=\begin{vmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=\sin x dx, & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=-x^2\cos x+2(x\sin x-\int\sin x dx)=$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Аудиторные задания.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int(1-3x)\ln(4x)dx$, 2. $\int(2x+3)\cos 5x dx$, 3. $\int(1-x^2)\sin x dx$, 4. $\int(5x^2+1)e^{-x}dx$.

Индивидуальные задания.

Найти неопределенные интегралы:

Вариант 1.	1. $\int(3-x)\sin 4x dx$.	2. $\int(x^2-4)\cos x dx$.	3. $\int x\ln(2x)dx$.
Вариант 2.	1. $\int(1-x)\cos 2x dx$.	2. $\int(3-x^2)\sin x dx$.	3. $\int(x+3)\ln x dx$.
Вариант 3.	1. $\int(x-2)\sin 3x dx$.	2. $\int x^2\cos x dx$.	3. $\int\ln(1-3x)dx$.
Вариант 4.	1. $\int(x^2+2x+3)e^x dx$	2. $\int(x+6)\cos x dx$.	3. $\int\ln(x+1)dx$.

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы, применяя интегрирование по частям.

Пример 1.

$$\int(2x+7)\sin x dx=\begin{vmatrix} u=2x+7, & du=(2x+7)'dx=2dx \\ dv=\sin x dx, & v=\int\sin x dx=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=-(2x+7)\cos x-\int(-\cos x)\cdot 2dx=-(2x+7)\cos x+2\int\cos x dx=$$

$$=-(2x+7)\cos x+2\sin x+C.$$

Пример 2.

$$\int\ln(3x-6)dx=\begin{vmatrix} u=\ln(3x-6), & du=\dfrac{3dx}{3x-6} \\ dv=dx, & v=x\end{vmatrix}=x\ln(3x-6)-\int\frac{3x}{3x-6}dx=$$

$$-\int(1+\frac{2}{x-2})dx=x\ln(3x-6)-\int\frac{x}{x-2}dx=x\ln(3x-6)-\int\frac{(x-2)+2}{x-2}dx=$$

$$=x\ln(3x-6)-\int\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx=x\ln(3x-6)-x-2\int\frac{d(x-2)}{x-2}=x\ln(3x-6)-$$

$$-x-2\ln(x-2)+C,\ \textit{так как}\ x-2>0.$$

Занятие 8. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площадей плоских фигур.

Теоретические сведения.

Пусть функция определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем произвольным образом этот отрезок на n частичных отрезков $[x_{i-1}, \quad x_i]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. На каждом из отрезков выберем произвольную точку ξ_i: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, i = \overline{1,n}$ и составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Определение. *Определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \max \Delta x_i \to 0.$$

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то этот предел всегда существует независимо от разбиения отрезка на частичные отрезки длиной Δx_i и выбора на них точек ξ_i.

Таким образом, функция, непрерывная на отрезке, *интегрируема* на нем.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \ c = const.$

6. Если $f(x) \ge 0$ $(f(x) \le 0)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ $(\int_a^b f(x)dx \le 0)$.

7. Если $f(x) \ge \varphi(x)$ $x \in [a,b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx.$

8. Если подынтегральная функция интегрируема на отрезке $[a,b]$ и для этого отрезка справедливо неравенство $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, где m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответственно.

9. **Теорема о среднем.** Если подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c\in(a,b)$, что справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

10. Если $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, то справедливо равенство $\Phi'(x)=f(x)$, то есть производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу x равна подынтегральной функции при том же значении x.

Геометрический смысл определенного интеграла. Если $f(x)\geq 0\quad \forall x\in[a,b]$, то определенный интеграл вычисляет *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$. И эта площадь равна

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Правила вычисления определенного интеграла.

1. *Формула Ньютона - Лейбница.* Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - какая - либо первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$ - **формула Ньютона – Лейбница.**

2. *Замена переменной в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем для любого $t\in[\alpha,\beta]$: $\varphi(t)\in[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$ - **формула замены переменной.**

3. *Интегрирование по частям.* Пусть функции $u=u(x), v=v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

Аудиторные задания.

Вычислить определенные интегралы

1. $\int_1^2\left(2x^2+\dfrac{2}{x^4}\right)dx$, 2. $\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx$, 3. $\int_0^1 e^{3x}dx$, 4. $\int_3^8 x\sqrt{x+1}dx$,

5. $\int_0^\pi x\sin x dx$, 6. $\int_2^{2\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2+4}$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

a) $y=4-x^2$, $y=0$; *b)* $xy=6$, $x+y-7=0$.

Индивидуальные задания.

1-2. Вычислить определенные интегралы.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Вариант 1.	1. $\int_1^2 (3x^2 - \frac{5}{x^6})dx$, 2. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$, 3. $y^2 = 1 - x,\ x = -3$.
Вариант 2.	1. $\int_4^9 (4\sqrt{x} + 6x^2)dx$, 2. $\int_0^\pi (x+1)\cos x dx$, 3. $y = 6x - x^2, y = 0$.
Вариант 3.	1. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}}$, 2. $\int_0^\pi (x+2)\sin\frac{x}{2}dx$, 3. $y = 3 - 2x - x^2, y = 0$.
Вариант 4.	1. $\int_0^1 3x^2(1 + \frac{1}{6x^5})dx$, 2 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$, 3. $y = x^2,\ y = 2 - x^2$.

Решение типового варианта.

Примеры.

1. Вычислить определенные интегралы.

$$a)\ \int_1^8 (\sqrt[3]{x} - 1)dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)dx = (\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x)\Big|_1^8 = (\frac{3}{4}\cdot 2^4 - 8) - (\frac{3}{4} - 1) =$$

$$= 12 - 8 - 0.75 + 1 = 4,25.$$

$$b)\ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \begin{vmatrix} x = \sin t, & dx = \cos t dt \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}, t = \frac{\pi}{4}, & x = \frac{\sqrt{3}}{2}, t = \frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t dt}{\sin^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= (-ctgt - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + (ctg\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = -(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}) + (1 + \frac{\pi}{4}) =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,161.$$

$c)\ I = \int_e^{e^2} x\ln x dx$. Применим формулу интегрирования по частям.

$$I = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = (\frac{x^2}{2}\ln x)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2 dx}{2x} = \frac{e^4}{2}\cdot 2 - \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_e^{e^2} =$$

$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{1}{4}(3e^4 - e^2) \approx 39,10.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x$ и прямой $y=0$. Найдем точки пересечения параболы и прямой. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=-x^2+4x, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2+4x=0, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0\, или\, x=4, \\ y=0. \end{cases}$$

Значит криволинейная трапеция ограничена снизу осью Ox, сверху параболой, при этом $x\in[0;4]$. Значит

$$\int_0^4 (4x-x^2)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}=32-\frac{64}{3}=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{3}=10,(6).$$

Занятие 9. Решение дифференциальных уравнений (ДУ) первого и второго порядков

1. ДУ с разделяющимися переменными. Линейные ДУ первого порядка. Теоретические сведения.

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ) называется уравнение

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0,$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные $y',y'',\dots,y^{(n)}$. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. *Решением ДУ* называется функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется **интегрированием** ДУ.

Для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y'=f(x,y), \qquad (1)$$

задача Коши формулируется следующим образом: для заданного начального условия $y(x_0)=y_0$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее заданному начальному условию.

Определение. Функция $y=\psi(x,C)$, где C - произвольная постоянная, называется *общим решением ДУ* (1), если выполняются следующие условия:

1. для любых значений произвольной постоянной C функция $y=\psi(x,C)$ является решением уравнения (1);

2. для любого *начального условия* $y(x_0)=y_0$ существует единственное значение $C=C_0$, при котором функция $y=\psi(x,C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Общее решение, записанное в неявной форме, называется *общим интегралом* уравнения. *Частным решением* (интегралом) ДУ называется решение, полученное из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной С.

Уравнение вида

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$$

называют уравнением с **разделяющимися переменными.**

Уравнение вида

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=0, \varphi_1(x)\neq 0,\ f_2(y)\neq 0$$

называют уравнением **с разделенными переменными** (при dx стоит функция, которая зависит только от x; при dy стоит функция, которая зависит только от y).

Общий интеграл уравнения с разделенными переменными имеет вид

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=C,\qquad \varphi_1(x)\neq 0,\qquad f_2(y)\neq 0.$$

Пример. Найти общее решение ДУ

$(y^2+xy^2)\cdot y'+x^2-yx^2=0.$

Решение. Так как $y'=\dfrac{dy}{dx}$, тогда умножим обе части уравнения на dx. Получаем $y^2(1+x)dy=x^2(y-1)dx.$

а) Считаем, что $x\neq 0,\ y\neq 0, x\neq -1, y\neq 1$, разделим обе части уравнения на $y-1$ и $1+x$, тогда $\dfrac{y^2}{y-1}dy=\dfrac{x^2}{x+1}dx.$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int(y+1+\frac{1}{y-1})dy=\int(x-1+\frac{1}{x+1})dx\,.$$

Получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения в виде

$$\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C.$$

б) Проверим, являются ли решениями ДУ значения $x=0,\ y=0, x=-1, y=1$. Подставляем эти значения в исходное уравнение.

Если $x=0$, то получаем равенство $y^2\cdot y'=0$, которое не является тождеством, значит, $x=0$ – не является решение ДУ. При $x=-1$, получаем, что $dx=0$ и уравнение превращается в тождество 0=0. Значит, $x=-1$ –решение ДУ. Если $y=0$, то $dy=0$, от уравнения остается $0=x^2$ (не тождество, $y=0$ не является решением). При $y=1$ получаем верное равенство 0=0. Решения $x=-1$ и $y=1$ нельзя получить из общего решения ни при каком значении произвольной константы C.

Ответ: общий интеграл $\dfrac{y^2-x^2}{2}+x+y+\ln\left|\dfrac{y-1}{x+1}\right|=C$, особые решения $x=-1$ и $y=1$.

2. Линейные ДУ первого порядка.
Теоретические сведения.

Определение. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - заданные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением** 1-ого порядка относительно y и y'.

Для решения уравнения (2) применяют подстановку $y = u(x)v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ - неизвестные функции от x. Тогда уравнение (2) примет вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Выражение в скобках приравнивают к нулю, то есть

$$v' + p(x)v = 0, \qquad (3)$$

Тогда из уравнения (3) находим функцию $v(x)$, а функция $u(x)$ определится из уравнения $u'(x)v(x) = q(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{3y}{x} = x^2$.

Решение. Применяем подстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получаем $u'v + uv' + \frac{3uv}{x} = x^2 \Rightarrow u'v + u(v' + \frac{3v}{x}) = x^2$, решаем последовательно два уравнения: $v' + \frac{3v}{x} = 0$ и $u'v = x^2$.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{3dx}{x}, \quad \ln|v| = -3\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x^3}.$$

$$u' \cdot \frac{1}{x^3} = x^2, \quad \frac{du}{dx} = x^5, \quad du = x^5dx, \quad u = \int x^5dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Умножая $u(x)$ на $v(x)$, получаем общее решение данного уравнения

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x^3}(\frac{x^6}{6} + C) \Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + \frac{C}{x^3}, \quad C - \forall const.$$

3. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ)
с постоянными коэффициентами.

Определение. ЛОДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами *p и q* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде $y = e^{kx}$. Получаем

$$\left(k^2 + pk + q\right) \cdot e^{kx} = 0$$

или

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением*. Общее решение уравнения (4) имеет вид:

1. $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, *если* $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in R$;

2. $y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$, *если* $k_1 = k_2 = k$; (6)

3. $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, *если* $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Примеры. Найти общие решения ЛОДУ:

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$; 2. $y'' - 10y' + 25y = 0$; 3. $y'' - 8y' + 20y = 0$.

Решение. Для каждого случая составляем характеристическое уравнение, находим его корни, выписываем соответствующее общее решение:

1. $k^2 - 7k + 12 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$ $\Rightarrow$ $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$ (первый случай формулы (6)).

2. $k^2 - 10k + 25 = 0$, $k_1 = 5$, $k_2 = 5$ $\Rightarrow$ $y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}$ (второй случай формулы (6)).

3. $k^2 - 8k + 20 = 0$,

$D = (-8)^2 - 4\cdot 20 = 64 - 80 = -16, \sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = 4i$, значит

$k_1 = \dfrac{8-4i}{2} = 4 - 2i, k_2 = \dfrac{8+4i}{2} = 4 + 2i$. Значит, получаем третий случай формулы (6), где $\alpha = 4, \beta = 2$, то есть общее решение имеет вид $y = C_1e^{4x}\cos 2x + C_2e^{4x}\sin 2x$.

4. Неоднородные линейные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

Теоретические сведения.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{7}$$

Теорема (о структуре общего решения уравнения (7)). *Общее решение уравнения (7) есть сумма общего решения $\bar{y}$ соответствующего ему однородного уравнения и частного решения y_* неоднородного уравнения (7):* $y = \bar{y} + y_*$.

Пусть правая часть уравнения (7) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{8}$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степени n и m, соответственно, с действительными коэффициентами; $\alpha, \beta \in R$. Тогда уравнение (7) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью*. Частное решение y_* такого уравнения находится методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим частные случаи функции (8):

1. $f(x)=P_n(x), \alpha=0, \beta=0$. Тогда частное решение y_* уравнения (7) будем искать в виде:

$$y_*(x)=\begin{cases} R_n(x), \text{если } k_1\neq 0 \text{ и } k_2\neq 0; \\ xR_n(x), \text{если } k_1=0 \text{ или } k_2=0; \\ x^2R_n(x), \text{если } k_1=k_2=0, \end{cases}$$

где $R_n(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n$ многочлен степени n, коэффициенты которого $A_i, i=\overline{0;n}$ подлежат определению, k_1 и k_2 корни характеристического уравнения.

Подставляя y_*', y_*'' в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему из $(n+1)$ уравнения с $(n+1)$ неизвестным для определения коэффициентов $A_i, i=\overline{0;n}$.

2. $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x),\ \beta=0$. Тогда частное решение y_* уравнения (7) будем искать в виде:

$$y_*(x)=\begin{cases} e^{\alpha x}R_n(x), \text{если } k_1\neq\alpha \text{ и } k_2\neq\alpha; \\ xe^{\alpha x}R_n(x), \text{если } k_1=\alpha \text{ или } k_2=\alpha; \\ x^2e^{\alpha x}R_n(x), \text{если } k_1=k_2=\alpha. \end{cases}$$

3. $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)$. Тогда частное решение y_* уравнения (7) будем искать в виде:

$$y_*(x)=\begin{cases} e^{\alpha x}\left(R_\nu(x)\cos\beta x+S_\nu(x)\sin\beta x\right), \text{если } k_{1,2}\neq\alpha\pm i\beta; \\ xe^{\alpha x}\left(R_\nu(x)\cos\beta x+S_\nu(x)\sin\beta x\right), \text{если } k_{1,2}=\alpha\pm i\beta, \end{cases}$$

где $\nu=\max\{m,n\}$, коэффициенты многочленов $R_\nu(x), S_\nu(x)$ подлежат определению.

Пример 1. Найти общее решение неоднородного ЛДУ $y''-y'-2y=4xe^x$.

Решение. Как известно $y=\overline{y}+y^*$. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $\overline{y}$: $y''-y'-2y=0$. Для этого надо составить характеристическое

$$k^2-k-2=0,\ k_1=-1,\ k_2=2 \Rightarrow \overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного y^*. В нашем случае $f(x)=4xe^x$, $a=1$, $\nu=0$, поэтому ищем частное решение в виде $y_*=(Ax+B)e^x$. Дифференцируя два раза и подставляя производные в исходное уравнение, получим:

$$2Ae^x+(Ax+B)e^x-Ae^x-(Ax+B)e^x-2(Ax+B)e^x=4xe^x.$$

Сокращаем обе части равенства на e^x, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$A-2Ax-2B=4x, \quad -2A=4,\ A-2B=0;\quad A=-2,\ B=-1.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения $y_*=-(2x+1)e^x$. Общее решение $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-(2x+1)e^x, C_1, C_2\in R$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y = x\sin x$.

Решение. $\bar{y}: y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0$, $k = \pm i$, то есть $\alpha = 0, \beta = 1$. Значит, общее решение однородного уравнения будет $\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Частное решение ищем в виде

$y_* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x) = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$.

Находим производные y_*', y_*'':

$y_*' = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x$,

$y_*'' = 2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x - (Ax^2 + Bx)\cos x + 2C\sin x + 2(2Cx + D)\cos x -$

$-(Cx^2 + Dx)\sin x$.

Подставляем y_*, y_*', y_*'' в исходное уравнение, приводим подобные, получаем

$2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x + 2C\sin x + 2(2Cx + D)\cos x = x\sin x$,

приравниваем коэффициенты при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$. Получаем систему четырех уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} 2A + 2D = 0, \\ 4C = 0, \\ -2B + 2C = 0, \\ -4A = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ D = \frac{1}{4}, \\ B = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

Поэтому $y_* = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x, y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x$.

Аудиторные задания.

Найти общее или частное решения следующих уравнений:

1. $(x^2 - 1)y' = 2xy^2$;
2. $2x\sqrt{1 - y^2}dx + ydy = 0, \quad y(0) = 1$;
3. $y' - \frac{3y}{x} = x^3 - 4x + 5, \; y(1) = 2$;
4. $y' \cdot x^2 + 2xy = \ln x$.

Решить линейные однородные ДУ второго порядка:

5. $y'' - y' - 2y = 0$,
6. $y'' + 4y' = 0$,
7. $y'' + 12y' + 36y = 0$,
8. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решить линейные неоднородные ДУ второго порядка:

9. $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$,
10. $y'' - 3y' = 2x^2 + 3x + 4$,
11. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x - 4\cos x$,
12. $y'' + 9y = 2\sin 3x - \cos 3x$.

Индивидуальные задания.

Найти общее или частное решение уравнений:

Вариант 1.	Вариант 2.
1. $(4x^3-2x)dx=\sin 3y dy$;	1. $xdy-(y+1)dx=0, y(2)=5$;
2. $y'+\dfrac{3}{x}y=\dfrac{2}{x^4}, y(1)=1$;	2. $y'-\dfrac{4}{x}y=x^2-3x+1$;
3. $y''+2y'-8y=0$;	3. $y''-2y'-15y=0$;
4. $y''-10y'+29y=0$;	4. $y''+8y'+25y=0$;
5. $y''-3y'=x^2-4x+5$.	5. $y''+4y'=(x-4)e^x$.

Вариант 3.	Вариант 4.
1. $(2x-\cos 2x)dx+(4y-e^y)dy=0$;	1. $x(4+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0$;
2. $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^4, y(0)=6$;	2. $y'+\dfrac{4}{x}y=\dfrac{2-3x}{x^4}, y(1)=5$;
3. $y''+2y'-15y=0$;	3. $y''+3y'-4y=0$;
4. $y''+10y'+34y=0$;	4. $y''+12y'+40y=0$;
5. $y''+y=(2x+5)e^{-x}$.	5. $y''+3y'=4\sin x-6\cos x$.

Решение типового варианта.

Пример 1. Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными: $(x+3)dy-(y-1)dx=0, \quad y(4)=15$.

Разделяем переменные и интегрируем обе части полученного равенства.

$$(x+3)dy=(y-1)dx \,|\, :(x+3)(y-1),$$

$$\frac{dy}{y-1}=\frac{dx}{x+3} \Rightarrow \int\frac{dy}{y-1}=\int\frac{dx}{x+3} \Rightarrow \ln|y-1|=\ln|x+3|+\ln|C|,$$

произвольную постоянную взяли в форме логарифма, поэтому можем записать общее решение уравнения в более простой форме:

$$\ln|y-1|=\ln|C(x+3)|, \qquad y-1=C(x+3),\ C\in R.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(4)=15$: $15-1=C(4+3), 7C=14, C=2$. Тогда частное решение данного уравнения имеет вид $y-1=2(x+3) \Rightarrow y=2x+7$.

Пример 2. Найти общее решение линейного уравнения первого порядка:

$$y'+\frac{5y}{x}=\frac{x-6}{x^4}.$$

Введем замену искомой функции $y=u(x)\cdot v(x)$, тогда $y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.

Подставим y и y' в исходное уравнение, сгруппируем второе и третье слагаемые, решение данного уравнения сведется к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

$$u'v+u(v'+\frac{2}{x}v)=\frac{x-6}{x^4},\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v'+\frac{2}{x}v=0,\\ u'v=\frac{x-6}{x^4}.\end{cases}$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x},\ \int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=-2\ln|x|,\quad v=\frac{1}{x^2}.$$

$$u'\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{x-6}{x^4},\quad \frac{du}{dx}=\frac{x-6}{x^2},\quad du=(\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2})dx,\ u=\int(\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2})dx=\ln|x|+\frac{6}{x}+C.$$

Общее решение исходного уравнения $y=u\cdot v$, $y=\frac{1}{x^2}(\ln|x|+\frac{6}{x}+C)$, $C\in R$.

Пример 3. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка: $y''+6y'=3x^2+2x-4$.

Общее решение данного уравнения равно сумме общего решения $\overline{y}$ соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения y_* неоднородного уравнения.

Составляем и решаем соответствующее однородное уравнение.

$\overline{y}$: $y''+6y'=0$, $k^2+6k=0$, $k_1=0$, $k_2=-6$, $\overline{y}=C_1+C_2e^{-6x}$.

Частное решение данного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов, его вид зависит от правой части уравнения и корней характеристического уравнения.

y_*: $f(x)=(3x^2+2x-4)\cdot e^{0\cdot x}$, $\alpha=0=k_1,\Rightarrow \nu=1$, $y_*=x(ax^2+bx+c)$.

Находим первую и вторую производные функции

$$y_*=ax^3+bx^2+cx,$$
$$y_*'=3ax^2+2bx+c,$$
$$y_*''=6ax+2b.$$

Подставляем в уравнение, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned}&6ax+2b+6(3ax^2+2bx+c)=3x^2+2x-4,\\ &18ax^2+(6a+12b)x+(2b+6c)=3x^2+2x-4,\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}18a=3,\\ 6a+12b=2,\\ 2d+6c=-4.\end{cases}$$

Отсюда получим значения коэффициентов

$$\begin{cases}a=\frac{1}{6},\\ b=\frac{1}{12},\\ c=-\frac{25}{36}.\end{cases}$$

Выписываем частное и общее решение данного уравнения.

$$y_*=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{12}-\frac{25x}{36}\Rightarrow y=C_1+C_2e^{-6x}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{12}-\frac{25x}{36},C_1,C_2\in R.$$

Занятие 10. Числовые и функциональные ряды.

1. Числовые ряды.
Теоретические сведения.

Числовым (функциональным) рядом называется бесконечная сумма чисел (функций), образующих последовательность:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ - числовой ряд,}$$

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ - функциональный ряд.}$$

Ряд считается заданным, если известна формула его *общего члена* как функция номера: $u_n = f(n)$, $n \in N$, или $u_n(x) = f(n,x)$, $n \in N$.

Сумма $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$ называется n-ой *частичной суммой* числового ряда.

Суммой ряда называется конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Ряд, имеющий конечную сумму, называется *сходящимся*; в противном случае – *расходящимся*.

Эталонные ряды.

1. *Рядом бесконечной геометрической прогрессии* называется ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, \text{если} |q| < 1; \\ \infty, \quad \text{если} |q| \ge 1. \end{cases}$$

2. *Гармоническим рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \infty.$$

3. *Обобщенным гармоническим рядом (рядом Дирихле)* называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p > 1, \\ \text{расходится, если } 0 < p \le 1. \end{cases}$$

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Причем, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - расходится; если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. ***Признак сравнения.*** Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A \ (\ne 0; \ne \infty)$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ведут себя одинаково, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

2. ***Признак Даламбера.*** Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ - сходится; при $l>1$ – расходится; при $l=1$ – признак не дает ответа.

3. ***Признак Коши.*** Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ - сходится; при $l>1$ – расходится; при $l=1$ – признак не дает ответа.

4. ***Интегральный признак Коши.*** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ ведут себя одинаково, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

2. Знакопеременные ряды.

Знакопеременный числовой ряд содержит как положительные, так и отрицательные члены. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется *знакочередующимся.*

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n-1}u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\ \ u_n>0,$$

сходится, если:

1) его члены по абсолютной величине убывают $u_1>u_2>u_3>...>u_n>...$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Причем сумма S положительна и $S\le u_1$.

3. Степенные ряды.

Степенными рядами называются функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...,$$

где $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ - известные действительные числа – коэффициенты степенного ряда.

Множество значений x, при которых степенной ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

Примеры. *Исследовать на сходимость числовые ряды:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+1)\cdot n!}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+1}{3n^2+2n}\right)^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4}{n^6+6n+1}$.

Решение.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+1)\cdot n!}=\frac{2}{4\cdot 1}+\frac{2^2}{7\cdot 2}+\frac{2^3}{10\cdot 6}+\frac{2^4}{13\cdot 24}+\ldots$. Для исследования ряда на сходимость удобно применить признак Даламбера. Для этого выписываем *n*-ый член ряда и *(n+1)*-ый член ряда (вместо n подставляем *(n+1)*), имеем:

$$u_n=\frac{2^n}{(3n+1)\cdot n!};\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(3(n+1)+1)\cdot(n+1)!}=\frac{2^{n+1}}{(3n+4)\cdot(n+1)!},$$

где $n!$ = (эн-факториал) = $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$; $(n+1)!=n!(n+1)$. Тогда вычисляем предел отношения: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(3n+1)\cdot n!}{(3n+4)\cdot n!(n+1)\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot(3n+1)}{(3n+4)(n+1)}=0<1$, значит, данный ряд *сходится.*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+1}{3n^2+2n}\right)^n=1+\left(\frac{17}{16}\right)^2+\left(\frac{37}{33}\right)^3+\ldots$. В данном случае применим признак Коши.

В данном случае $u_n=\left(\frac{4n^2+1}{3n^2+2n}\right)^n$. Вычисляем предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n^2+1}{3n^2+2n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2n}=\frac{4}{3}>1$, значит, данный ряд расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4}{n^6+6n+1}$. В данном случае применение признака Даламбера ответа не даст, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Применим признак сравнения, сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем степени $p=4>1$. Проверим возможность такого сравнения. Составим отношение общих членов этих рядов. Так как $u_n=\frac{3n^2+4}{n^6+6n+1}$, $v_n=\frac{1}{n^4}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n^2+4)n^4}{n^6+6n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{6}{n^5}+\frac{1}{n^6}}=3\neq 0\neq\infty$.

Отсюда следует, что оба ряда ведут себя одинаково, т.е. *сходятся.*

Пример 4. Исследовать знакочередующийся ряд на абсолютную и условную сходимости. Вычислить приближенно сумму S этого ряда, заменив ее частичной суммой S_n. Оценить погрешность такой замены.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n+1}{6^n},\quad n=5.$$

Решение. 1. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{6^n}$. Для исследования применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{4n+1}{6^n};\quad u_{n+1}=\frac{4(n+1)+1}{6^{n+1}}=\frac{4n+5}{6^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+5)\cdot 6^n}{6^{n+1}(4n+1)}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}=\frac{1}{6}<1,$$

значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится*, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *сходится абсолютно.*

Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится и условно. Вычислим его сумму приближенно, заменив сумму ряда частичной суммой первых пяти членов, и оценим допускаемую при этом погрешность. При такой замене ошибка по абсолютной величине не превосходит первого из отброшенных членов, в данном случае шестого члена.

$$|S-S_5|=|r_5|\le u_6,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n+1}{6^n}=\frac{5}{6}-\frac{9}{36}+\frac{13}{216}-\frac{17}{6^4}+\frac{21}{6^5}-\frac{25}{6^6}+\dots=S,$$

$$u_6=\frac{25}{6^6}=0{,}0005358<0{,}001.$$

Вычисления ведем до четырех знаков после запятой, а затем округляем результат до тысячных долей.

$$S\approx S_5=\frac{5}{6}-\frac{9}{36}+\frac{13}{216}-\frac{17}{1296}+\frac{21}{7776}=0{,}8333-0{,}2500+0{,}0602-0{,}0131+0{,}0003=$$

$$=0{,}6307\approx 0{,}631;\qquad S=0{,}631\pm 0{,}001.$$

Пример 5. Найти интервал абсолютной сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n+1}\cdot(x+4)^n$.

Решение. Чтобы найти интервал его *абсолютной сходимости*, применим к ряду из модулей признак Даламбера

$$|u_n(x)|=\frac{3n+2}{(n+1)\cdot 7^n}\cdot|x+4|^n,\quad |u_{n+1}(x)|=\frac{3n+5}{(n+2)\cdot 7^{n+1}}\cdot|x+4|^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)\cdot|x+4|^{n+1}\cdot(n+1)\cdot 7^n}{(n+2)\cdot 7^{n+1}\cdot(3n+2)\cdot|x+4|^n}=\frac{|x+4|}{7}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)(n+1)}{(n+2)(3n+2)}=\frac{|x+4|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2}=\frac{|x+4|}{7}.$$

Если $\frac{|x+4|}{7}<1 \Leftrightarrow |x+4|<7 \Leftrightarrow -7<x+4<7 \Leftrightarrow -11<x<3$, то данный ряд *сходится абсолютно.*

Если $\frac{|x+4|}{7}>1 \Leftrightarrow |x+4|>7$ т.е. $\left[\begin{array}{l}x+4>7,\\ x+4<-7.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<-11,\end{array}\right.$

т.е. $x\in(-\infty;-11)\cup(3;+\infty)$, то степенной ряд расходится.

Если $\frac{|x+4|}{7}=1 \Leftrightarrow |x+4|=7 \Leftrightarrow x=-4\pm 7$, то признак Даламбера ответа не дает.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т.е. при $x=-11$ и $x=3$.

3) $x=-11$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\cdot(-11+4)^n}{(n+1)\cdot 7^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)}{(n+1)}\cdot(-\frac{7}{7})^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+2}{n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=3\neq 0$, то есть не выполняется необходимый признак сходимости, то ряд *расходится*.

4) $x=3$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\cdot(3+4)^n}{(n+1)\cdot 7^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n+1}$, ряд *расходится*, т.к. его общий член не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, *областью сходимости* данного степенного ряда является интервал $-11<x<3$.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда по степеням x: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{n^4+3}\cdot x^n$.

Решение. Составляем ряд из модулей и применяем признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{n^4+3}\cdot|x|^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(4(n+1)^2-1)\cdot|x|^{n+1}\cdot(n^4+3)}{((n+1)^4+3)\cdot(4n^4-1)\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\cdot n^4}{n^4\cdot 4n^2}=|x|.$$

Если $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, то ряд *сходится абсолютно*. Если $|x|>1$, т.е. $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, *то исходный ряд расходится*.

При $x=-1$ и $x=1$ нужны дополнительные исследования.

1) $x=1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{n^4+3}$. Очевидно, что ряд сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^4+3}:\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n^2-1)n^2}{n^4+3}=4$.

2) $x=-1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n^2-1}{n^4+3}$. Данный ряд сходится абсолютно.

Следовательно, *областью сходимости* исходного степенного ряда является отрезок $x\in[-1;1]$.

Аудиторная работа.

Исследовать на сходимость знакоположительные числовые ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{5^n}$; 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{9n^4+1}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$.

Исследовать знакочередующиеся ряды на абсолютную и условную сходимости:

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

Найти область сходимости степенных рядов:

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{5^n\cdot(3n^2+1)}$.

Индивидуальные задания.

Найти область сходимости степенных рядов:

Вариант 1	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}\cdot x^n$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{4n^2+1}$.
Вариант 2	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n!}\cdot x^n$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3}\cdot(x-3)^n$.
Вариант 3	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5^n}\cdot x^n$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n^4}\cdot(x+6)^n$.
Вариант 4	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-1}{n^2}\cdot x^n$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{n\cdot 2^n}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ведина О.И., Десницкая В.Н. и др. Математика. Математический анализ для экономистов.- М.: «Филинъ», 2000.-356 с.
2. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш.Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2007.-479 с.
3. Высшая математика: Общий курс / Под ред. С.А.Самаля. - 2-е изд. - Мн.: Выш. шк., 2000.-352 с.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике.- 6-е изд. - Мн.: ТетраСистемс, 2005.-640 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах .- 5-е изд. - М.: Высш.шк., 1997. Ч.1. - 304 с.; Ч.2. – 416с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. и др. Общий курс высшей математики. – Орша: АРФА, 1996.-318 с.
7. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Под ред. А.П.Рябушко. – 2-е изд. - Мн.: Выш. шк., 2000.- 396 с.
8. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов.- М.: ИНФРА-М, 1997.-208 с.
9. Красс М.С. Математика для экономических специальностей.- 3-е изд. - М.: Дело. – 2002.-704 с.
10. Малыхин В.И. Математика в экономике.- М.: ИНФРА-М, 1999.- 356 с.
11. Минюк С.А., Ровба Е.А. Высшая математика.- 3-е изд. - Гродно: ГрГУ, 2004.-408 с.
12. Минюк С.А., Самаль С.А., Шевченко Л.И. Высшая математика для экономистов. Т. 1. – Мн.: «Элайда», 2003. – 526 с.
13. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова.-М.: ИНФРА-М, 2000.-656 с.
14. Руководство к решению задач по высшей математике. / Под ред. Е.И. Гурского.-Мн.: Выш. шк.,1989.Ч.1.-350с.; Ч.2.-1990.-400 с.
15. Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова.-М.: ИНФРА-М, 2001.-575 с.
16. Солодовников А.С., Бабайцев В.А. и др. Математика в экономике. Ч. 2.-М.: Финансы и статистика, 1999.-376 с.
17. Справочник по математике для экономистов / Под. ред. В.И.Ермакова.-М.: Высш. шк., 1997.-384 с.
18. Тузик А.И. Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных.- Брест: БГТУ, 2000.-129 с.
19. Тузик А.И. Высшая математика. Ряды. – Брест: БГТУ, 2003. – 123 с.
20. Тузик Т.А., Тузик А.И. Высшая математика: Общий курс. Контрольные работы №3, №4;методические указания и варианты заданий. – Брест: БрГТУ, 2007. – 60 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители:
Лебедь Светлана Федоровна
Тузик Татьяна Александровна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения
(*первый курс, второй семестр*)

Ответственный за выпуск: Т.А.Тузик
Редактор: Т.В.Строкач
Компьютерный набор С.Ф. Лебедь
Компьютерная верстка Е.А. Боровикова
Корректор Е.В. Никитчик

Подписано в печать 21.03.2008 г. Формат 60х84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 3,3. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 200 экз. Заказ № 389.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.