УДК 539.384+624.04

Холодарь Б.Г.

ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Ниже рассматривается изгиб прямолинейного стержня из упрочняющегося склерономного упруго-пластического материала под действием нагрузки, вызывающей в нем появ-ление деформаций за пределом текучести. Предполагается, что материал стержня одина-ково сопротивляется как растяжению, так и сжатию. Диаграмма растяжения (ДР) такого материала содержит два участка, – линейный до предела текучести σ_T и участок упрочнения до предела прочности σ_B. ДР конкретного материала на участке упрочнения может быть достаточно легко описана соответствующими выражениями. Несколько конкретных выражений использованы в [1]–[2], в том числе и при наличии площадки текучести заданной длины (для материала сталь 20). В данной работе ДР описывается выражениями (для $\sigma > 0$):

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon \le \varepsilon_T$$

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_U\left(1 - \frac{(\varepsilon_B - \varepsilon)^n}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^n}\right) \qquad \varepsilon_T < \varepsilon \le \varepsilon_B \qquad (1)$$

где E – модуль упругости материала, σ_T и σ_B – пределы текучести и прочности, $\sigma_U = \sigma_B - \sigma_T$ – уровень упрочнения, n – показатель упрочнения, $\varepsilon_T = \sigma_T / E$ – деформация, соответствующая пределу текучести, ε_B – деформация, соответствующая пределу прочности. Для числовых данных $E=2\cdot10^5$ МПа, $\sigma_T=200$ МПа, $\sigma_B=400$ МПа, $\varepsilon_B=0.5$ расчетные диаграммы показаны на рисунке 1. Видно, что показатель *n* предоставляет достаточную гибкость для описания кривой ДР разной формы – от билинейной до идеализируемой диаграммой Прандтля.

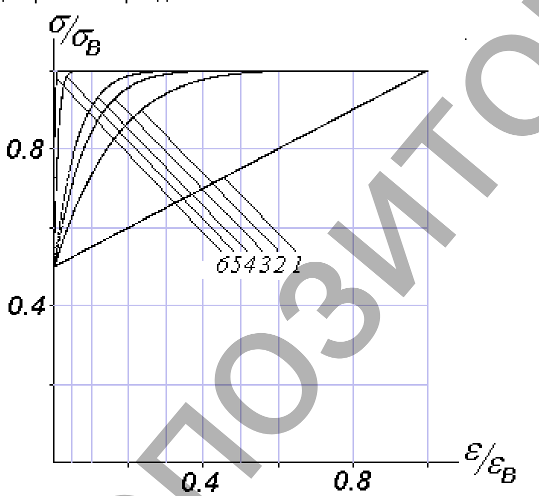


Рисунок 1 – Диаграммы деформирования при n=*1*, *6*, *11*, *16*, *100*, *600* (кривые 1-6)

Для иллюстрации использования (1) к расчету стержня на поперечный изгиб далее рассматриваются прямолинейные балки с прямоугольным сечением.

Предполагается, как обычно в технической теории, выполнение гипотезы плоских сечений. При этом деформации в зависимости от расположения слоя по высоте сечения составляют

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \qquad (2)$$

где y – координата, отсчитываемая от нейтрального слоя, ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки.

Изгибающий момент вдоль оси балки $M(x)$ вызывает в ее сечениях напряжения и де-формации, которые с величиной момента связаны выражением

$$M = 2b\int_0^{y_{ext}} \sigma y dy = 2b\rho^2 \int_0^{\varepsilon_{ext}} \sigma\varepsilon d\varepsilon, \qquad (3)$$

где $y_{ext} = h/2$ и $\varepsilon_{ext} = \varepsilon\ (y_{ext})$ – координата и деформация наружного слоя, b – ширина сечения. Зависимость величины момента M от деформации наружного слоя балки определяется как (индекс “ext” далее везде опущен):

При $\varepsilon \le \varepsilon_T$ $M = E\dfrac{bh^2}{6}\varepsilon$. (4)

При $\varepsilon_T < \varepsilon \le \varepsilon_B$

$$M = \frac{bh^2}{4\varepsilon^2}\left[\frac{2}{3}\sigma_T\varepsilon_T^2 + \sigma_B(\varepsilon^2 - \varepsilon_T^2) + 2\frac{\sigma_Y}{(n+1)(n+2)(\varepsilon_B - \varepsilon)^n} \times \right.$$
$$\left. \times\left[(\varepsilon_B - \varepsilon)^{n+1}(\varepsilon_B + (n+1)\varepsilon) - (\varepsilon_B - \varepsilon_T)^{n+1}(\varepsilon_B + (n+1)\varepsilon_T)\right]\right]$$

Для указанных выше числовых данных зависимость $M(\varepsilon)$ приведена на рис. 2. Значение предельного упругого момента при $\varepsilon = \varepsilon_T$ составляет M_T=*33.33 НМ* (при b=h=*1 см*).

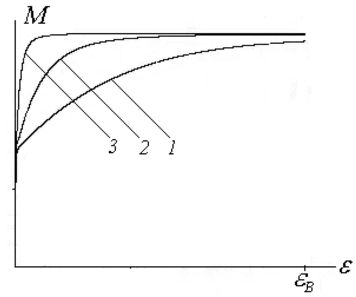


Рисунок 2 – Зависимости $M(\varepsilon)$ для n=*4*, *16*, *100* (кривые 1-3)

С учетом (3) из (4) можно получить дифференциальное уравнение изогнутой оси, если будет известна зависимость $\varepsilon\ [M(x)]$, обратная по отношению к (4). Это можно сделать, ис-пользуя для $\varepsilon(M)$ на участке упрочнения аппроксимацию сплайном. Далее конкретно ис-пользован кубический сплайн $\varepsilon\ [M(x)] = A+Bx+Cx^2+Dx^3$.

Учитывая связь $\varepsilon_{ext} = h/(2\rho)$, кривизна $\chi = 1/\rho$ в любой точке продольной оси стержня выразится зависимостью

$$\chi = \varepsilon[M(x)] \cdot 2 / h, \qquad (5)$$

причем по своему определению [3] χ равно

$$\chi = \frac{d^2V/dx^2}{\left(1 + (dV/dx)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (6)$$

Аналитическое решение полученного уравнения (5) в общем случае невозможно и для его интегрирования следует использовать один из численных методов.

Например, если для χ взять обычно принимаемую в задачах изгиба балок усеченную зависимость $\chi \approx d^2V/dx^2$, то для построения решения можно провести интегрирование по участкам сплайна либо

Холодарь Борис Григорьевич, *доцент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Репозиторий БрГТУ

использовать конечно-разностную аппроксимацию второй производной при равномерном шаге разбиения вдоль оси " *x* " и свести задачу к решению си-стемы линейных уравнений. Однако, учитывая возможность применения уравнения (5) к различным классам задач, целесообразно не отказываться от нелинейности выражения (6), и поэтому в данной работе в качестве метода интегрирования был использован метод Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага.

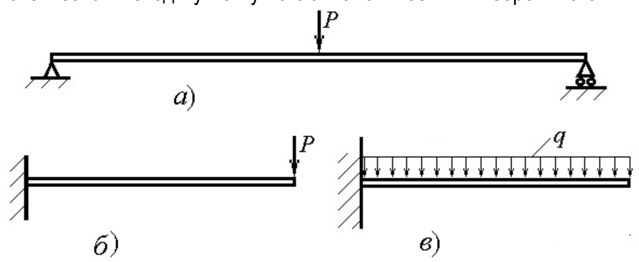
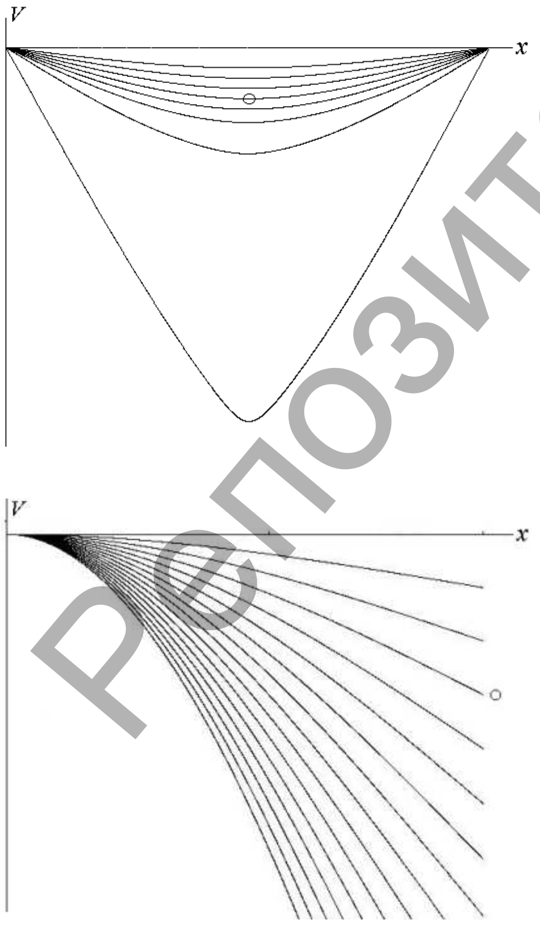


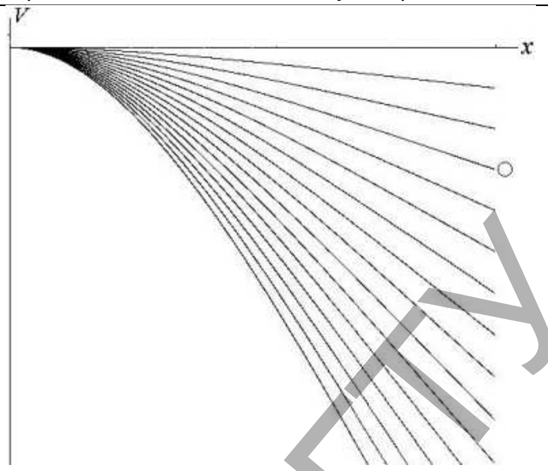
Рисунок 3 – Схемы нагружения балок

Прогибы шарнирно-опертой и консольных балок, показанных на рис. 3, для описан-ной выше постановки задачи приведены на рис. 4 при $n=4$. Сечение балок квадратное со стороной *1 см*, длина шарнирной балки – *2 м*, консольных балок – *1 м*. Кривые, на которых деформации перешли за предел текучести, отмечены кружком. Нарастание макси-мальных деформаций и прогибов в зависимости от уровня нагрузки показано на рис. 5. На нем обозначено: $p=P/P_{\max}$, $\xi_\varepsilon=\varepsilon/\varepsilon_{\max}$, $\xi_V=V/V_{\max}$, где P – нагрузка, ε – деформация наружного слоя, V – стрела прогиба, $P_{\max}=225$ *Н*, $\varepsilon_{\max}=2.635\cdot10^{-2}$, $V_{\max}=11.518$ *см* – значения указанных величин при наибольшем воздействии (момент в среднем сечении балки $M=56.25$ *НМ*). Вертикальной чертой на рисунке отмечена точка выхода нагрузки за участок упругих деформаций балки.



а)

б)



в)

Рисунок 4 – Формы изогнутой оси балок в зависимости от уровня ступенчато-возрастающей нагрузки

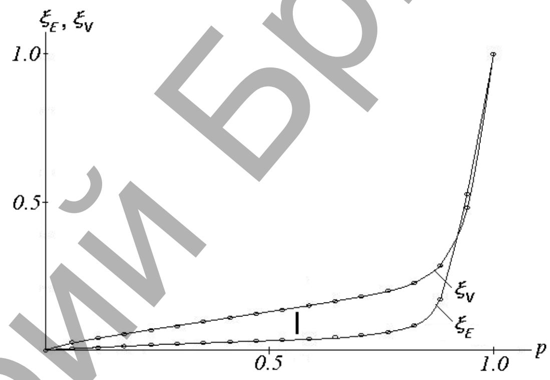


Рисунок 5 – Зависимость деформаций и прогибов от нагрузки для шарнирно-опертой балки

Из результатов видно, что перемещения балок быстро нарастают с ростом нагрузки выше величины, соответствующей достижению предела текучести в поверхностном слое балки, форма прогибов заметно отличается от упругой, а весь изгиб концентрируется в наиболее нагруженной зоне. При этом принципиальной особенностью рассматриваемого решения является наличие упругой зоны вблизи нейтральной оси, толщина которой со-ставляет $\Delta=h\cdot\varepsilon_T/\varepsilon_{ext}$ и не стремится к нулю при $\varepsilon\to\varepsilon_B$, т. е. результатом решения являются конечные прогибы независимо от вида приложенных поперечных усилий, что, как извест-но [4], не всегда имеет место при идеализации ДР диаграммой Прандтля.

Как видно из рис. 1, с ростом показателя упрочнения "n" ДР приближается к диаграмме Прандтля, и поэтому расчет перемещений балки с большими значениями показателя упро-чнения должен приближаться к решению для идеально-пластического материала, которое показывает, что прогиб балки при образовании пластического шарнира в среднем сечении превосходит предельный упругий в $V/V_T=2.22$ раза при нагрузке, превышающей предельную упругую в *1.5* раза [4]. Использованная методика решения при $n=1000$ и усеченном выражении для кривизны вместо *2.22* дает значение *2.213*, что подтверждает правильность проведенных вычислений (при сравнении принимаем $\sigma_T=\sigma_B=400$ *МПа*). Точное выражение для кривизны приводит к отношению прогибов *2.35*. Если же считать σ_T зафиксированным на исходном уровне $\sigma_T=200$ *МПа*, то зависимость максимального прогиба при различных уровнях нагружения от n можно отразить следующими результатами:

n=1 n=4 n=16 n=100 n=600

$\underline{P/P_T=1.125}$: $V/V_T=1.13$; $V/V_T=1.13$; $V/V_T=1.13$; $V/V_T=1.13$; $V/V_T=1.13$

Репозиторий БрГТУ

$\underline{P/P_T = 1.313}$: $V/V_T=1.37$; $V/V_T=1.37$; $V/V_T=1.37$; $V/V_T=1.35$; $V/V_T=1.26$

$\underline{P/P_T = 1.50}$: $V/V_T=2.04$; $V/V_T=1.94$; $V/V_T=1.82$; $V/V_T=1.65$; $V/V_T=1.51$

$\underline{P/P_T = 1.594}$: $V/V_T=7.04$; $V/V_T=3.29$; $V/V_T=2.33$; $V/V_T=1.87$; $V/V_T=1.60$

$\underline{P/P_T = 1.69}$: $V/V_T=6.84$; $V/V_T=3.20$; $V/V_T=2.09$; $V/V_T=1.71$,

показывающими влияние характера упрочнения материала на деформирование конструкции.

Для двух других схем нагружения из расчетов следуют результаты, аналогичные приведенным.

Расчеты показывают, что с ростом уровня нагружения при использовании в (6) приближенного выражения для кривизны ($\chi \approx d^2V/dx^2$) погрешность решения нарастает. На-пример, при $n=4$ для шарнирно-опертой балки погрешность в определении прогибов составляет примерно *1.6%* для $P/P_T\approx 2.1$, *7.9%* для $P/P_T\approx 2.8$, *20.5%* для $P/P_T\approx 3.0$ (точная формула дает более высокие значения).

Но хотя формула (6) для кривизны формально позволяет учесть наличие больших перемещений и была использована выше, сама процедура решения не вполне приемлема для их определения, так как необходимым условием получения корректного результата является проведение расчетов балки по деформированной схеме с вытекающими отсюда тре-бованиями к постановке задачи, что не предусматривалось настоящей работой. Фактически же, так как нас чаще всего интересует ситуация с реализацией не слишком больших деформаций, то для таких случаев построенная методика решения позволяет дать удовлетворительную оценку ожидаемых перемещений при работе материала стержня за пределом упругости. Не представляет сложности применить методику к балкам из материалов, имеющих различный уровень сопротивления на растяжение и сжатие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Холодарь, Б.Г. Определение напряженно-деформированного состояния фермы с использованием диаграммы Максвелла-Кремоны // Вестник брестского государственного технического университета. – № 1(97): Строительство и архитектура. – 2016. – С. 39–42.
2. Холодарь, Б.Г. Напряженно-деформированное состояние фермы из реономного упруго-пластического материала // Вестник брестского государственного технического университета. – № 1 (97): Строительство и архитектура. – 2016. – С. 42–46.
3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Из-во «Наука», 1970. – 720 с.
4. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Из-во «Машиностроение», 1968. – 400 с.

Материал поступил в редакцию 04.04.2017

KHOLODAR B.G. Bending of an elastic rod beyond the elastic limit

The transverse bending of a rod made of either a nonlinearly elastic or elasto-plastic material is being considered in the state of direct loading. The material hardening function is described by a polynomial. The curvature of the rod is expressed through the deformation of the outer layer, whose dependence on the bending moment is found using a spline approximation. The solution can be easily adopted to the materials with different tensile-compression resistance.

УДК 691.51

Тур Э.А., Казаков В.Н., Басов С.В.

РЕСТАВРАЦИЯ КОССОВСКОГО ДВОРЦА ПУСЛОВСКИХ И РЕШЕНИЕ ВОЗНИКШИХ ПРИ ЭТОМ ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Введение. В двух километрах севернее г. Коссово Ивацевичского района Брестской области располагается дворец Пусловских. Дворец был заложен в 1838 году на западной окраине поселения как загородный усадебный ансамбль с большим парком.

Для белорусской архитектуры Коссовский дворец уникален. Он не похож ни на один другой дворцово-парковый комплекс, возводившийся в начале XIX века: в тот период времени на пике популярности был классицизм, а дворец построили в неоготическом стиле – стиле старинных готических замков. Над его проектом работал архитектор Франтишек Яшчольд из Варшавы, а для оформления интерьеров был приглашен итальянский художник Маркони. Единственное в резиденции Пусловских от классицизма – это правильная геометрическая форма и симметричная композиция. Ядро – центральный двухэтажный корпус, с ним узкими галереями с высокими стрельчатыми арками соединяются два боковых. Все остальные детали относятся к неоготике. Подражательство художественным стилям прошлых веков отчетливо прослеживается на фасадах. Зубчатые завершения многогранных башенок, оконные и дверные проемы стрельчатого очертания, щелеобразные, наподобие бойниц, прорези в стенах, карнизы, похожие на крепостные машикули, витражи и другие детали явились искусственным возвращением к архитектурным формам средневековья [1]. Благодаря им дворец очень напоминал средневековые оборонительные замки (рисунок 1).

Рисунок 1 – Дворец Пусловских (Коссовский замок)

Тур Элина Аркадьевна, *к.т.н., доцент, заведующая кафедрой инженерной экологии и химии Брестского государственного технического университета.*

Басов Сергей Владимирович*, к.т.н., доцент, доцент кафедры инженерной экологии и химии Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Казаков Владимир Нахимович, *директор ООО «Реставрация-Инвест», архитектор.*

Репозиторий БрГТУ