МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

Функции нескольких переменных
Интегральное исчисление функции одной переменной
Дифференциальные уравнения

Методические рекомендации и варианты
контрольных работ для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

БРЕСТ 2003

УДК 517.9

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной» и «Дифференциальные уравнения» общего курса высшей математики для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольных работ.

Составители: А.В. Санюкевич, к. ф.-м. н., доцент
Л.Т. Мороз, доцент
А.В. Дворниченко, ассистент

Рецензент: Н.Н. Сендер, заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного университета, кандидат физ.-мат. Наук, доцент

Методические указания к выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом студенты-заочники I курса всех технических специальностей во II семестре выполняют две письменные контрольные работы по курсу «Высшая математика».

Задания в контрольных работах составлены в тридцати вариантах. Выбор варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки студента. Приступая к выполнению контрольной работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями, изучить литературу. Далее следует предварительно наметить схему решения задачи.

<u>Требования к выполнению контрольной работы.</u>

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена в установленные сроки.
2. В начале работы должен быть указан номер варианта работы.
3. Задачи нужно решать в том порядке, в каком они даны в задании.
4. Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Необходимо отделить решение задачи от ее условия некоторым интервалом. В том случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.
5. Решение задачи следует сопровождать необходимыми формулами, развернутыми расчетами и краткими пояснениями. Задачи, к которым даны ответы без развернутых расчетов, пояснений и кратких выводов, будут считаться нерешенными.
6. Выполненная контрольная работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво, чисто, без помарок и зачеркиваний. Запрещается произвольно сокращать слова (допускаются лишь общепринятые сокращения).
7. В конце работы следует привести список использованной литературы (автор, название учебника, главы, параграфа, страницы). Работа должна быть подписана студентом с указанием даты ее выполнения.
8. При удовлетворительном выполнении работа оценивается “допущена к защите”. К собеседованию студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления и дополнения. После успешного прохождения собеседования студент получает зачет по работе и допускается к экзамену. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом работам, к экзаменам не допускаются.

На обложку контрольной работы необходимо наклеить бланк установленного образца и разборчиво заполнить все имеющиеся там реквизиты, отсутствие которых может задержать отправку проверенной работы. Указывайте индекс вашего предприятия связи, разборчиво пишите свою фамилию.

Если студент не может самостоятельно выполнить контрольную работу или какую-то ее часть, следует обратиться к ведущему преподавателю за консультацией. В письменном запросе надо точно указать, что именно непонятно и какая литература использована при написании работы.

Вопросы по разделам

«Функции нескольких переменных.

Интегральное исчисление функции одной переменной» и

«Дифференциальные уравнения»

1. Функции нескольких переменных (ФНП). Определение, способы задания и геометрическая интерпретация ФНП.
2. Предел и непрерывность ФНП. Частные приращения и частные производные.
3. Полное приращение ФНП и дифференцируемость ФНП. Полный дифференциал ФНП.
4. Достаточные условия дифференцируемости ФНП. Приложение полного дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Производная сложной функции. Производные неявной функции.
6. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
7. Производная по направлению. Градиент и его свойства. Линии и поверхности уровня.
8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
9. Экстремум ФНП. Необходимые и достаточные условия экстремума ФНП.
10. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум ФНП.
11. Метод множителей Лагранжа.
12. Метод наименьших квадратов.
13. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.
14. Методы интегрирования в неопределенном интеграле: замена переменной, интегрирование по частям.
15. Разложение рациональных дробей на простейшие. Интегрирование простейших рациональных дробей. Общая схема интегрирования рациональных дробей.
16. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
17. Интегрирование чётных и нечётных степеней и произведений тригонометрических функций. Интегрирование рациональных тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
18. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
19. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла. Геометрический и механический смыслы определенного интеграла.
20. Свойства определенного интеграла.

21. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Барроу. Формула Ньютона-Лейбница.
22. Методы интегрирования определенного интеграла: метод подстановки (замены переменной); формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
23. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций.
24. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Теоремы сравнения.
25. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Теоремы сравнения.
26. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых и полярных координатах; вычисление объемов тел; вычисление длины кривой.
27. Механические приложения определенного интеграла: масса плоской пластины; статические моменты плоской фигуры; центр тяжести плоской фигуры.
28. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). Основные понятия ДУ.
29. Задача Коши для ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения.
30. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах: ДУ с разделяющимися переменными; однородные ДУ; линейные ДУ первого порядка; уравнение Бернулли.
31. ДУ высших порядков. Общие понятия. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Понятие краевой задачи.
32. Уравнения, допускающие понижение порядка.
33. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков, их свойства.
34. Структура общего решения ЛОДУ. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
35. Линейные неоднородные ДУ (ЛНДУ). Структура общего решения ЛНДУ.
36. ЛНДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.
37. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).
38. Системы дифференциальных уравнений. Определение, общее решение, задача Коши.
39. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения.
40. Линейные нормальные системы ДУ с постоянными коэффициентами.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

"ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ"

Задание 1. По данной функции $z=f(x,y)$ вычислить выражение F.

Варианты 01–06: $$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial z}{\partial y}.$$

1.01 $z=x\sqrt{x^2+y^2}$; **1.02** $z=e^x\cos y+e^y\sin x$; **1.03** $z=e^{xy}+\sqrt{xy}$;

1.04 $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$; **1.05** $z=\arcsin(x+y)$; **1.06** $z=\sin x\cdot\cos y$;

Варианты 07–12: $$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}.$$

1.07 $z=\sqrt{\frac{y}{x}}+\sin\frac{y}{x}$; **1.08** $z=\frac{xy}{x-y}$; **1.09** $z=\frac{x}{y}\cdot\ln\frac{y}{x}$;

1.10 $z=y\cos x-x\sin y$; **1.11** $z=2\cos^2(x-y)$; **1.12** $z=y\ln x+\sqrt{y}$;

Варианты 13–18: $$F=2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\frac{\partial z}{\partial y}.$$

1.13 $z=\frac{x+y}{y}$; **1.14** $z=\frac{x+y}{y-x}$; **1.15** $z=\frac{\sqrt{x+y}}{yx}$;

1.16 $z=x\sin(x+y)$; **1.17** $z=(x+y)\sin(xy)$; **1.18** $z=\arccos(y-x)$;

Варианты 19–24: $$F=2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

1.19 $z=y\sqrt{x^2-y^2}$; **1.20** $z=y\sqrt{x^2+1}$; **1.21** $z=y\sqrt{x^2+y^2}$;

1.22 $z=\sqrt{x+\cos^2 y}$; **1.23** $z=\cos y+x\sin y$; **1.24** $z=2\sin^2(x+y)$;

Варианты 25–30: $$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

1.25 $z=ye^x+x\sqrt{y}$; **1.26** $z=e^x\cos y-y\sin x$; **1.27** $z=y\cos(x+y)$;

1.28 $z=\frac{x}{y}+\ln\frac{y}{x}$; **1.29** $z=\frac{x}{y}+\sin\frac{y}{x}$; **1.30** $z=x\sqrt{y}+\cos\frac{y}{x}$.

Задание 2. Найти экстремум функции двух переменных
$$z=ax^2+bxy+cy^2+dx+ky+m.$$

№ варианта	a	b	c	d	k	m	№ варианта	a	b	c	d	k	m
2.1	1	2	4	–2	4	0	**2.2**	–2	–4	–5	–2	–2	–2
2.3	–3	2	–2	3	6	–7	**2.4**	4	–3	1	3	5	2

№ варианта	*a*	*b*	*c*	*d*	*k*	*m*	№ варианта	*a*	*b*	*c*	*d*	*k*	*m*
2.5	5	2	1	3	1	4	**2.6**	−6	2	−3	−4	−5	−4
2.7	−7	−1	−2	−5	−9	−5	**2.8**	8	−8	3	4	4	0
2.9	9	10	3	8	−1	7	**2.10**	−10	−6	−1	−6	6	0
2.11	−1	−5	−7	3	6	−7	**2.12**	2	6	5	−1	2	4
2.13	3	6	4	−3	−6	4	**2.14**	−4	−10	−7	−3	6	−2
2.15	−5	−14	−10	−2	1	0	**2.16**	6	−10	5	4	−6	7
2.17	7	9	3	2	−6	8	**2.18**	−8	−12	−5	4	1	0
2.19	−9	−1	−1	−4	6	3	**2.20**	10	8	2	9	3	−5
2.21	1	−4	5	−3	1	5	**2.22**	−2	−8	−9	−8	6	5
2.23	−3	−10	−9	2	6	2	**2.24**	4	8	2	−2	−4	6
2.25	5	8	4	4	8	7	**2.26**	−6	4	−1	2	−4	2
2.27	−7	9	−3	9	−12	−4	**2.28**	8	7	2	−2	4	2
2.29	9	4	1	4	−1	6	**2.30**	−10	−14	−5	3	1	−8

Задание 3. Даны функция $u=f(x,y,z)$, точка $A(x_0;y_0;z_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти: 1) grad u в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

3.01 $u=x^3-xyz+3z^2x+2y^2z$, $A(1;0;1)$, $\vec{a}=(-3;12;-4)$;

3.02 $u=\sqrt{x^2+y^2}-3z^2$, $A(3;4;2)$, $\vec{a}=(3;4;12)$;

3.03 $u=3x^2y^2-yz^2+3xyz$, $A(1;2;-1)$, $\vec{a}=(4;2;-4)$;

3.04 $u=xy-x^2z^2+y^2+z$, $A(4;-1;2)$, $\vec{a}=(2;1;-2)$;

3.05 $u=\dfrac{xz}{x-y}$, $A(5;3;1)$, $\vec{a}=(-8;4;8)$;

3.06 $u=\dfrac{zy}{x}+\dfrac{zx}{y}$, $A(1;1;1)$, $\vec{a}=(2;2;1)$;

3.07 $u=\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$, $A(6;8;10)$, $\vec{a}=(6;2;3)$;

3.08 $u=x^2-3xyz+y^2$, $A(2;1;6)$, $\vec{a}=(-6;-3;-2)$;

3.09 $u=z\sqrt{x^2+y^2}$, $A(8;6;1)$, $\vec{a}=(2;-3;6)$;

3.10 $u=4+x^3+z^2-xyz$, $A(0;2;1)$, $\vec{a}=(1;-2;2)$;

3.11 $u=\dfrac{xy^2}{1+z^2}$, $A(0;2;1)$, $\vec{a}=(3;2;6)$;

3.12 $u=x^2y+z^2-5xz+yx$, $A(10;2;-4)$, $\vec{a}=(-1;2;-2)$;

3.13 $u=2y^3-xz+3z^2x+2y^2z$, $A(2;1;1)$, $\vec{a}=(-3;2;-6)$;

3.14 $u=\sqrt{x^2+z^2}+5y^2$, $A(3;1;4)$, $\vec{a}=(3;4;12)$;

3.15 $u=3x^2-5xy^2+yz^2+xyz$, $A(2;2;-1)$, $\vec{a}=(-4;4;-2)$;

3.16 $u=3xy-2x^2z+y^2+z^2$, $A(4;-4;2)$, $\vec{a}=(4;4;-2)$;

3.17 $u=\dfrac{xyz}{x-2y}$, $A(2;0;1)$, $\vec{a}=(-24;12;8)$;

3.18 $u=\dfrac{y}{zx}+\dfrac{zx}{y}$, $A(1;2;1)$, $\vec{a}=(2;2;1)$;

3.19 $u=\dfrac{z^2+y^2}{x^2}$, $A(3;2;10)$, $\vec{a}=(-6;-3;2)$;

3.20 $u=2x^2-4xyz+zy^2$, $A(2;3;6)$, $\vec{a}=(2;-3;-6)$;

3.21 $u=xz^2+\sqrt{x^2+y^2}$, $A(3;4;1)$, $\vec{a}=(4;-2;4)$;

3.22 $u=3z+yx^3+xz^2-zy^2$, $A(1;-1;1)$, $\vec{a}=(-2;-2;1)$;

3.23 $u=\dfrac{2x^2y}{y+z^2}$, $A(3;1;2)$, $\vec{a}=(12;-4;6)$;

3.24 $u=x^2y+y^2z+z^2x-4xyz$, $A(3;2;-1)$, $\vec{a}=(1;-2;-2)$;

3.25 $u=3x^2y^2-2y^2z^2+x^2z^2$, $A(2;2;2)$, $\vec{a}=(3;2;6)$;

3.26 $u=2xy-x^2z^2+zy^2-2xz$, $A(-3;-1;2)$, $\vec{a}=(2;1;2)$;

3.27 $u=\dfrac{xyz}{x+y+z}$, $A(1;1;1)$, $\vec{a}=(-2;1;2)$;

3.28 $u=zyx-2x^2-2y^2+2xy$, $A(2;1;5)$, $\vec{a}=(2;3;6)$;

3.29 $u=\dfrac{x^2+z^2}{y^2}$, $A(3;2;2)$, $\vec{a}=(-4;2;4)$;

3.30 $u=x^2+5xyz+2z^2$, $A(3;7;2)$, $\vec{a}=(-3;6;-2)$.

Задание 4. При изучении функциональной зависимости $y=f(x)$ произведен ряд изменений величины x и получены соответствующие значения величины y. Результаты измерений занесены в таблицу:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Предполагая, что теоретически зависимость между значениями признаков выражается линейной функцией $y=ax+b$, по методу наименьших квадратов найти параметры a и b. Каково значение признака Y при $x=4,25$?

Вариант	X	1	2,2	3,4	4,6	5,8	7	8,2	9,4
4.01	Y	2,906	4,415	4,865	4,922	6,797	8,655	10,213	10,459

Вариант	X	1	2,2	3,4	4,6	5,8	7	8,2	9,4
4.02	y	5,093	7,096	10,116	9,362	12,695	16,964	20,013	20,832
4.03	y	8,109	10,872	15,515	16,891	21,106	25,398	28,406	31,833
4.04	y	-1,272	5,470	8,230	12,992	16,886	22,901	27,614	30,145
4.05	y	-0,798	4,683	10,667	15,921	20,002	30,021	36,400	40,593
4.06	y	-1,989	6,912	14,558	17,852	26,124	35,992	41,764	47,705
4.07	y	10,900	20,914	27,971	34,477	44,058	53,829	64,470	67,831
4.08	y	11,175	20,484	29,693	38,841	47,239	60,096	68,877	75,256
4.09	y	12,849	21,971	32,778	43,196	52,650	65,492	77,294	85,744
4.10	y	5,609	16,241	28,410	38,782	51,803	64,031	76,158	87,720

Вариант	x	2	3,5	5	6,5	8	9,5	11	12,5
4.11	y	3,796	5,142	7,592	5,543	9,547	12,496	13,438	12,780
4.12	y	5,061	5,218	10,349	9,584	11,846	16,632	19,856	19,931
4.13	y	10,104	15,263	19,291	22,813	27,485	33,266	37,904	40,142
4.14	y	2,920	8,615	16,209	18,335	23,751	35,405	39,930	42,043
4.15	y	19,495	25,030	32,133	39,374	45,191	55,223	62,080	69,256
4.16	y	20,802	30,937	38,377	46,370	55,764	65,629	77,226	82,777
4.17	y	11,420	21,356	31,541	41,254	50,768	63,972	76,055	81,342
4.18	y	21,532	33,117	45,129	56,794	67,037	81,250	95,260	104,653
4.19	y	30,366	43,690	57,803	69,708	83,782	98,642	111,295	124,497
4.20	y	10,883	25,112	39,727	51,910	66,846	84,850	100,574	112,995

Вариант	x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
4.21	y	6,220	5,826	6,231	6,362	7,008	8,207	9,572	8,586
4.22	y	9,704	11,856	11,712	12,304	12,975	15,363	16,184	16,225
4.23	y	5,619	5,413	7,485	8,107	9,717	12,403	14,747	13,622
4.24	y	19,618	23,547	23,356	24,241	24,674	29,510	31,222	29,816
4.25	y	24,897	27,678	29,951	31,051	31,367	37,280	39,335	41,304
4.26	y	11,390	14,174	16,637	18,644	20,332	25,796	29,155	31,466
4.27	y	9,855	12,715	17,049	19,398	21,684	28,202	30,252	33,293
4.28	y	26,918	31,557	37,362	38,122	42,272	47,036	50,988	54,258
4.29	y	32,533	35,897	40,845	43,174	45,774	53,413	60,508	61,255
4.30	y	26,281	30,450	37,320	38,905	43,721	52,873	56,549	59,396

Задание 5. Найти неопределенные интегралы (результаты проверить дифференцированием).

5.01 а) $\int\frac{\sqrt[6]{x}-x^2}{x}dx$; б) $\int\frac{(2x+1)dx}{(2x+1)^2+3}$; в) $\int x^2\cos x dx$; г) $\int\frac{x+5}{x^2-x}dx$;

5.02 а) $\int\frac{8x-2x^5}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{1-e^{2tgx}}{\cos^2 x}dx$; в) $\int 2x^2e^{2x}dx$; г) $\int\frac{2x-1}{x^2+2x}dx$;

5.03 а) $\int\frac{x^2-\sqrt[3]{x}}{x}dx$; б) $\int\frac{\ln(2x+3)+3}{2x+3}dx$; в) $\int x\cdot arctg3xdx$; г) $\int\frac{3x+1}{x^2-3x}dx$;

5.04 а) $\int\frac{\sqrt[3]{x}-2x^3}{x}dx$; б) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; в) $\int 2x^2\sin 4x dx$; г) $\int\frac{4x+1}{x^2+4x}dx$;

5.05 а) $\int\frac{2x^3-\sqrt[3]{x}}{x}dx$; б) $\int\frac{2+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int(5-x^2)e^{5x}dx$; г) $\int\frac{5x+2}{x^2-5x}dx$;

5.06 а) $\int\frac{\sqrt{x^3}+5x^4}{x}dx$; б) $\int\frac{\ln^3(x+1)-1}{x+1}dx$; в) $\int\arcsin 6x dx$; г) $\int\frac{6x+4}{x^2+6x}dx$;

5.07 а) $\int\frac{3\sqrt{x^3}+x^4}{x}dx$; б) $\int xe^{3x^2-5}dx$; в) $\int(2-x^2)\cos 7x dx$; г) $\int\frac{7x+4}{x^2-7x}dx$;

5.08 а) $\int\frac{x^3+\sqrt{x^5}}{x^2}dx$; б) $\int e^{\sin x-2}\cdot\cos x dx$; в) $\int(x^2+x)e^{8x}dx$; г) $\int\frac{8x-2}{x^2+8x}dx$;

5.09 а) $\int\frac{x^2+\sqrt{x^3}}{x^3}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{\ln(3x+5)}}{(3x+5)}dx$; в) $\int\arccos 9x dx$; г) $\int\frac{9x-1}{x^2-9x}$;

5.10 а) $\int\frac{x^2-5}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int xe^{1+3x^2}dx$; в) $\int(x^2+3)e^x dx$; г) $\int\frac{10x-4}{x^2+10x}dx$;

5.11 а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^{10}}+6x}{x^5}dx$; б) $\int\frac{ctg^2x+6}{\sin^2 x}dx$; в) $\int(1-x^2)\cos x dx$; г) $\int\frac{x-3}{2x^2-x-1}dx$;

5.12 а) $\int\frac{\sqrt[7]{x^8}+5x^3}{x}dx$; б) $\int\frac{1-\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int 4x\cdot arctg 2x dx$; г) $\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$;

5.13 а) $\int\frac{x^4-\sqrt[3]{x^7}}{x^3}dx$; б) $\int\frac{5-\ln^2(x-2)}{x-2}dx$; в) $\int(2x-1)\sin 3x dx$; г) $\int\frac{3x+1}{x^2+4x+3}dx$;

5.14 а) $\int\frac{\sqrt[5]{x^{17}}-x^2}{x^3}dx$; б) $\int\frac{\sqrt[5]{\ln(4x+1)}}{4x+1}dx$; в) $\int(4x-x^2)e^{4x}dx$; г) $\int\frac{4x+7}{x^2-5x+4}dx$;

5.15 а) $\int\frac{\sqrt{x}+4x^3}{x}dx$; б) $\int\frac{3+\ln^3(x+2)}{x+2}dx$; в) $\int\arcsin 5x dx$; г) $\int\frac{5x+8}{x^2+6x+5}dx$;

5.16 а) $\int\frac{\sqrt[5]{x^9}-x^3}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\sqrt[5]{tg^2x-1}}{\cos^2 x}dx$; в) $\int(x^2+1)\cos 6x dx$; г) $\int\frac{6x+1}{x^2-7x+6}dx$;

5.17 а) $\int\frac{7-\sqrt[3]{x^8}}{x^3}dx$; б) $\int xe^{3x^2+5}dx$; в) $\int(x^2+7x)e^{7x}dx$; г) $\int\frac{7x-1}{x^2-8x+7}dx$;

5.18 а) $\int\frac{5x-x^2}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int e^{4x^3-2}\cdot x^2dx$; в) $\int\arccos 8x dx$; г) $\int\frac{8x+5}{x^2+9x+8}dx$;

5.19 а) $\int\frac{\sqrt[5]{x}-5}{x}dx$; б) $\int 5x^4(e^{x^5+1}+1)dx$; в) $\int(x+9)e^{9x}dx$; г) $\int\frac{21-9x}{x^2-10x+9}dx$;

5.20 а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{\arcsin^2 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\int(1-x)\cos 10x dx$; г) $\int\frac{5x+20}{4x^2+x-3}dx$;

5.21 а) $\int\frac{x^2+3\sqrt{x}}{2x}dx$; б) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{2-e^x}}$; в) $\int 2x\cdot arctgx dx$; г) $\int\frac{4x+1}{2x^2+x-1}dx$;

5.22 а) $\int\frac{\sqrt{x}+7x^5}{2x^3}dx$; б) $\int\frac{2-arctg^2 x}{1+x^2}dx$; в) $\int(x^2-x)\sin 2x dx$; г) $\int\frac{2x-5}{2x^2+5x+2}dx$;

5.23 а) $\int\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{x}dx$; б) $\int x\cdot\sqrt{5+7x^2}dx$; в) $\int(3x^2-x)e^{3x}dx$; г) $\int\frac{3x-2}{x^2-5x+6}dx$;

5.24 а) $\int\frac{x^3+6\sqrt{x}}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\sqrt[3]{2\ln x-5}}{x}dx$; в) $\int\arcsin 4x dx$; г) $\int\frac{6x dx}{x^2-2x-8}$;

5.25 а) $\int\frac{7x^2+\sqrt[4]{x}}{x}dx$; б) $\int\frac{\cos 3x dx}{5+3\sin 3x}$; в) $\int(x-x^2)\cos 5x dx$; г) $\int\frac{5x+1}{x^2-3x-10}dx$;

5.26 а) $\int\frac{5x^3-\sqrt{x^7}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\int(2x^2+6x)e^{6x}dx$; г) $\int\frac{6x+2}{x^2+8x+12}dx$;

5.27 а) $\int\frac{\sqrt{x^5}-5x^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{5+\sqrt{ctg 3x}}{\sin^2 3x}dx$; в) $\int\arccos 7x dx$; г) $\int\frac{7x dx}{x^2-5x-14}$;

5.28 а) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+4x}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{7+2\ln x}}{x}dx$; в) $\int(x^2+8)e^{8x}dx$; г) $\int\frac{8-2x}{x^2-10x+16}dx$;

5.29 а) $\int\frac{x^3-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$; в) $\int\arcsin 9x dx$; г) $\int\frac{2-9x}{x^2+7x-18}dx$;

5.30 а) $\int\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[5]{x}}dx$; б) $\int\frac{(3+2tgx)dx}{\cos^2 x}$; в) $\int x^2\cos 10x dx$; г) $\int\frac{3x+3}{3x^2-10x+3}dx$.

Задание 6. Вычислить определенный интеграл

6.01 $\int_4^9\frac{dx}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}$; 6.02 $\int_{25}^{49}\frac{\sqrt{x}dx}{x-5}$; 6.03 $\int_3^{11}\frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$; 6.04 $\int_0^{15}\frac{dx}{3+\sqrt[4]{x+1}}$;

6.05 $\int_{10}^{24}\frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$; 6.06 $\int_5^{10}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 6.07 $\int_1^9\frac{dx}{\sqrt{x}+5}$; 6.08 $\int_6^{18}\frac{\sqrt{x-2}}{1+x}dx$;

6.09 $\int_{11}^{16}\frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$; 6.10 $\int_6^9\frac{\sqrt{x-5}}{x}dx$; 6.11 $\int_{-3}^5\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; 6.12 $\int_1^4\frac{2x+1}{x+\sqrt{x}}dx$;

6.13 $\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}+x^2}{\sqrt{x+1}}dx$; 6.14 $\int_1^9\frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$; 6.15 $\int_7^{14}\frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$; 6.16 $\int_{-1}^2\frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$;

6.17 $\int_4^{12}\frac{x^3dx}{\sqrt{x-3}}$; 6.18 $\int_5^{10}\frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$; 6.19 $\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$; 6.20 $\int_1^9\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$;

6.21 $\int_5^{14}\frac{dx}{2+\sqrt{x-5}}$; 6.22 $\int_6^{11}\frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$; 6.23 $\int_0^8\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x}+5}$; 6.24 $\int_2^7\frac{x-1}{x\sqrt{x+2}}dx$;

6.25 $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+9}$; 6.26 $\int_6^{14} \frac{dx}{3+\sqrt{x-5}}$; 6.27 $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$; 6.28 $\int_2^9 \frac{dx}{x\sqrt{x+7}}$;

6.29 $\int_2^7 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+2}}$; 6.30 $\int_8^{17} \frac{xdx}{\sqrt{2x-7}}$.

Задание 7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=ax^2+bx+c$ и $y=kx+d$. Выполнить рисунок. Значения коэффициентов даны в таблице:

№ варианта	*a*	*b*	*c*	*k*	*d*	№ варианта	*a*	*b*	*c*	*k*	*d*
7.01	1	4	2	1	6	**7.02**	1	4	5	2	8
7.03	1	4	8	3	10	**7.04**	1	6	1	4	4
7.05	1	6	4	5	6	**7.06**	1	8	7	6	10
7.07	1	8	0	7	2	**7.08**	1	2	3	8	-2
7.09	1	2	6	9	-4	**7.10**	2	2	9	10	3
7.11	2	2	2	1	5	**7.12**	2	4	5	2	17
7.13	2	4	8	3	11	**7.14**	2	6	1	4	5
7.15	2	6	4	5	5	**7.16**	2	8	7	6	31
7.17	2	8	0	7	3	**7.18**	2	2	3	8	11
7.19	2	2	6	9	3	**7.20**	2	2	9	10	19
7.21	3	2	2	1	4	**7.22**	3	4	5	2	6
7.23	3	4	8	3	10	**7.24**	3	6	1	4	9
7.25	3	6	4	5	14	**7.26**	3	8	7	6	15
7.27	3	8	0	7	4	**7.28**	3	2	3	8	12
7.29	3	2	6	9	4	**7.30**	3	2	9	10	5

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

"ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.01 $(x^2+2xy)dx+xydy=0$; **1.02** $xyy'=y^2+2x^2$; **1.03** $y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$;

1.04 $xy'\sin\frac{y}{x}+x=y\sin\frac{y}{x}$; **1.05** $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$; **1.06** $xy'\ln\frac{y}{x}=x+y\ln\frac{y}{x}$;

1.07 $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$; **1.08** $y^2+x^2y'=xyy'$; **1.09** $y'x+y+x=0$;

1.10 $y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$; **1.11** $y'=4+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$; **1.12** $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$;

1.13 $ye^x=x(y'e^x-e^y)$; **1.14** $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$; **1.15** $xy'=x\cdot e^{\frac{y}{x}}+y$;

1.16 $xy' + y(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0$; **1.17** $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; **1.18** $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

1.19 $(x-y)dx + xdy = 0$; **1.20** $y' = \frac{x-y}{x+y}$; **1.21** $xyy' - y^2 = x^2 y'$;

1.22 $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$; **1.23** $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$; **1.24** $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$;

1.25 $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0$; **1.26** $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 9$;

1.27 $\left(3y\sin\frac{3x}{y}\right)dx + \left(y - 3x\sin\frac{3x}{y}\right)dy = 0$; **1.28** $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$;

1.29 $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}\,dx = 0$; **1.30** $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

Задание 2. Найти частное решение уравнения $y' + g(x)y = h(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

2.01 $y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$, $y(1) = e$; **2.02** $y' - y\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 2$;

2.03 $y' + \frac{y}{x} = 4x^2$, $y(1) = 2$; **2.04** $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$, $y(0) = 0$;

2.05 $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$, $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$; **2.06** $y' + \frac{5}{x}y = \frac{2}{x^5}$, $y(1) = 0$;

2.07 $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg}x$, $y(0) = 2$; **2.08** $y'\cos x + y = 1 - \sin x$, $y(0) = 3$;

2.09 $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$, $y(0) = 0$; **2.10** $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$;

2.11 $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \frac{1}{2}e^2$; **2.12** $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$;

2.13 $y' + 3y\operatorname{tg}3x = \sin 6x$, $y(0) = \frac{1}{3}$; **2.14** $xy' + y = \sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$;

2.15 $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, $y(1) = 0$; **2.16** $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$;

2.17 $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$; **2.18** $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$;

2.19 $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$; **2.20** $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$;

2.21 $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$; **2.22** $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$;

2.23 $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 1$; **2.24** $y = x(y' - x\cos x)$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$;

В следующих примерах за неизвестную функцию принять x.

2.25 $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$; **2.26** $(x + y^2)dy - ydx = 0$, $y(0) = 1$;

2.27 $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$, $y(0) = 1$; **2.28** $y = xy' + y'\ln y$, $y(2) = 1$;

2.29 $(2x + 3)dy - y^2dx = 0$, $y(1) = 0$; **2.30** $y'(x + y^2) = y$, $y(0) = 2$.

Задание 3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

3.01 $(1-x^2)y'-xy-3xy^2=0$; **3.02** $4xy'+3y=-e^x x^4 y^5$; **3.03** $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$;

3.04 $y'+\dfrac{2y}{x}=3x^2y^{\frac{4}{3}}$; **3.05** $y'-\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{y^2}{x-1}$; **3.06** $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

3.07 $y'-\dfrac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\sin x$; **3.08** $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$; **3.09** $y'+2y=y^2e^x$;

3.10 $y'-2y\,\mathrm{tg}\,x+y^2\sin^2 x=0$; **3.11** $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$; **3.12** $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$;

3.13 $xdy+(y+x^2y^2)dx=0$; **3.14** $xydy=(y^2+x)dx$; **3.15** $xy'+y=y^2\ln x$;

3.16 $y'+2xy=2x^3y^3$; **3.17** $y'+y^2\cos x=y\,\mathrm{tg}\,x$; **3.18** $y'x+y=-xy^2$;

3.19 $ydy=\left(\dfrac{y^2}{x}-x^3\right)dx$; **3.20** $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$; **3.21** $y'+y=\dfrac{x}{y^2}$;

3.22 $(x+1)(y'+y^2)=-y$; **3.23** $yy'=xe^{2x}+y^2$; **3.24** $y'+xy=x^3y^3$;

3.25 $2x^3yy'+3x^2y^2+1=0$; **3.26** $x(x-1)y'+y^3=xy$; **3.27** $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$;

3.28 $xy^2y'=x^2+y^3$; **3.29** $y'=\dfrac{2}{x}y+2xe^x\sqrt{y}$; **3.30** $y'+\dfrac{y}{x}=(x^2-3x)y^2$.

Задание 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

4.01 $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^2=0$; **4.02** $y''=x+\sin x$; **4.03** $yy''=(y')^2-(y')^3$;

4.04 $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$; **4.05** $y''=\dfrac{1}{x^2+1}$; **4.06** $y''=\dfrac{y'}{x}+x$;

4.7 $(1+x^2)y''+1+(y')^2=0$; **4.08** $4(y'')^2=1+(y')^2$; **4.09** $yy''-(y')^2=y^2\ln y$;

4.10 $(x-1)y''-y'=0$; **4.11** $y''=\mathrm{arctg}\,x$; **4.12** $(1-x^2)y''-xy'=2$;

4.13 $y''(2y+3)-2(y')^2=0$; **4.14** $y''=x\cos x$; **4.15** $yy''-(y')^2=0$;

4.16 $(2y+y')y''=(y')^2$; **4.17** $y''+2x(y')^2=0$; **4.18** $x^3y''+x^2y'=1$;

4.19 $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$; **4.20** $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$; **4.21** $y''=\cos^{-2}\dfrac{x}{2}$;

4.22 $(1+e^x)y''+y'=0$; **4.23** $y^3y''+1=0$; **4.24** $yy''+(y')^2=x$;

4.25 $x^2y''=y'-xy'$; **4.26** $xy''-y'=x^2e^x$; **4.27** $y''x\ln x=2y'$;

4.28 $y''=\cos^2 x+e^{-x}$; **4.29** $y''=1-(y')^2$; **4.30** $y''=y'+(y')^2$.

Задание 5. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

5.01 а) $y''-y'-2y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $y''+25y=0$;

5.02 а) $y''-25y'=0$; б) $y''-6y'+9y=0$; в) $y''-2y'+10y=0$;

5.03 а) $y''-4y'+3y=0$; б) $y''-8y'+16y=0$; в) $4y''-8y'+5y=0$;
5.04 а) $y''+4y'-5y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$; в) $y''+6y'+13y=0$;
5.05 а) $y''-8y'=0$; б) $y''+4y'+4y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$;
5.06 а) $y''+5y'+4y=0$; б) $9y''-12y'+4y=0$; в) $y''+2y'+17y=0$;
5.07 а) $2y''-9y'-7y=0$; б) $16y''+8y'+y=0$; в) $y''-4y'+20y=0$;
5.08 а) $y''-3y'=0$; б) $y''+6y'+9y=0$; в) $y''+4y'+5y=0$;
5.09 а) $2y''+9y'+7y=0$; б) $25y''-10y'+y=0$; в) $y''+2y'+10y=0$;
5.10 а) $7y''-9y'+2y=0$; б) $9y''-6y'+y=0$; в) $y''+4y'+20y=0$;
5.11 а) $y''+4y'=0$; б) $9y''+12y'+4y=0$; в) $y''+y=0$;
5.12 а) $7y''+9y'+2y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''+4y'+8y=0$;
5.13 а) $4y''+8y'+3y=0$; б) $y''+12y'+36y=0$; в) $y''+10y'+29y=0$;
5.14 а) $5y''+4y'-y=0$; б) $16y''-8y'+y=0$; в) $y''+2y'+2y=0$;
5.15 а) $3y''+8y'+4y=0$; б) $y''+10y'+25y=0$; в) $y''+4y'+13y=0$;
5.16 а) $3y''-4y'+y=0$; б) $y''-12y'+36y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$;
5.17 а) $y''-13y'+36y=0$; б) $25y''+10y'+y=0$; в) $y''+6y'+25y=0$;
5.18 а) $3y''-8y'+4y=0$; б) $25y''+20y'+4y=0$; в) $y''+6y'+10y=0$;
5.19 а) $2y''+3y'+y=0$; б) $9y''-24y'+16y=0$; в) $y''-6y'+10y=0$;
5.20 а) $y''+36y'=0$; б) $4y''-12y'+9y=0$; в) $y''+12y'+37y=0$;
5.21 а) $4y''-8y'+3y=0$; б) $4y''-20y'+25y=0$; в) $5y''+4y'+y=0$;
5.22 а) $5y''-4y'-y=0$; б) $36y''-12y'+y=0$; в) $10y''+2y'+y=0$;
5.23 а) $y''-49y=0$; б) $16y''-8y'+y=0$; в) $8y''+4y'+y=0$;
5.24 а) $4y''+5y'+y=0$; б) $9y''+24y'+16y=0$; в) $10y''-6y'+y=0$;
5.25 а) $2y''-y'-y=0$; б) $4y''+20y'+25y=0$; в) $29y''+10y'+y=0$;
5.26 а) $y''+13y'+36y=0$; б) $16y''+24y'+9y=0$; в) $5y''-4y'+y=0$;
5.27 а) $y''-64y=0$; б) $36y''+12y'+y=0$; в) $5y''+2y'+y=0$;
5.28 а) $4y''-5y'+y=0$; б) $16y''-24y'+9y=0$; в) $8y''-4y'+y=0$;
5.29 а) $2y''+y'-y=0$; б) $4y''+12y'+9y=0$; в) $10y''+6y'+y=0$;
5.30 а) $y''-6y'=0$; б) $4y''+28y'+49y=0$; в) $10y''-2y'+y=0$.

Задание 6. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

6.01 $y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x)$; **6.02** $y''+16y=x\sin 2x$;
6.03 $y''+4y'+4y=xe^{2x}$; **6.04** $y''+2y'+5y=e^{x}((x+1)\cos 2x+3\sin 2x)$;
6.05 $y''-2y'+2y=4e^{x}\cos x$; **6.06** $y''-4y'+13y=e^{2x}(x\cos 3x-x\sin 3x)$;
6.07 $y''+y=e^{2x}(x^{2}+x+1)$; **6.08** $y''+2y'+y=e^{-x}\sin 2x$;
6.09 $y''+3y'-10y=xe^{-2x}$; **6.10** $y''-6y'+13y=34e^{-3x}\sin 2x$;
6.11 $y''-2y'+2y=e^{x}\sin x$; **6.12** $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$;
6.13 $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$; **6.14** $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$;

6.15 $y''+4y'+4y=6e^{-2x}$; **6.16** $y''+2y'-3y=(12x^2+6x-4)e^x$;

6.17 $y''+9y=9x^4+12x^2-27x$; **6.18** $y''-4y'+5y=(24\sin x+8\cos x)e^{-2x}$;

6.19 $y''+y=3\sin x$; **6.20** $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$;

6.21 $y''+y=-4\cos x-2\sin x$; **6.22** $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x$;

6.23 $y''+16y=8\cos 4x$; **6.24** $y''+y=2\cos x-(4x+4)\sin x$;

6.25 $y''+3y'+2y=(x-2)e^{-x}$; **6.26** $y''-2y'+y=-12\cos 2x-9\sin 2x$;

6.27 $y''+2y'+y=(18x+8)e^{-x}$; **6.28** $y''+y'-12y=(16x+22)e^{4x}$;

6.29 $y''+5y'+6y=52\sin 2x$; **6.30** $y''-9y'+18y=26\cos x-8\sin x$.

Задание 7. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

7.01 $\begin{cases} x'=4x-3y, \\ y'=3x+4y; \end{cases}$ **7.02** $\begin{cases} x'=5x-y, \\ y'=x+3y; \end{cases}$ **7.03** $\begin{cases} x'=8x-y, \\ y'=x+y; \end{cases}$ **7.04** $\begin{cases} x'=4x-y, \\ y'=x+2y; \end{cases}$

7.05 $\begin{cases} x'=x-4y, \\ y'=x+y; \end{cases}$ **7.06** $\begin{cases} x'=3x+y, \\ y'=-4x-y; \end{cases}$ **7.07** $\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=3x+6y; \end{cases}$ **7.08** $\begin{cases} x'=3x-2y, \\ y'=2x+8y; \end{cases}$

7.09 $\begin{cases} x'=7x+3y, \\ y'=x+5y; \end{cases}$ **7.10** $\begin{cases} x'=4x-y, \\ y'=-x+4y; \end{cases}$ **7.11** $\begin{cases} x'=-x-2y, \\ y'=3x+4y; \end{cases}$ **7.12** $\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=-3x+2y; \end{cases}$

7.13 $\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=x+y; \end{cases}$ **7.14** $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=-4x+y; \end{cases}$ **7.15** $\begin{cases} x'=2x+y, \\ y'=3x+4y; \end{cases}$ **7.16** $\begin{cases} x'=-x+8y, \\ y'=x+y; \end{cases}$

7.17 $\begin{cases} x'=-2x+3y, \\ y'=x; \end{cases}$ **7.18** $\begin{cases} x'=-x+y, \\ y'=4x-4y; \end{cases}$ **7.19** $\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=-3x+2y; \end{cases}$ **7.20** $\begin{cases} x'=5x-y, \\ y'=x+3y; \end{cases}$

7.21 $\begin{cases} x'=x+4y, \\ y'=x+2y; \end{cases}$ **7.22** $\begin{cases} x'=x+5y, \\ y'=7x+3y; \end{cases}$ **7.23** $\begin{cases} x'=-x+4y, \\ y'=4x-y; \end{cases}$ **7.24** $\begin{cases} x'=2x-y, \\ y'=-2x+3y; \end{cases}$

7.25 $\begin{cases} x'=y, \\ y'=2x+3y; \end{cases}$ **7.26** $\begin{cases} x'=3x-6y, \\ y'=2x-y; \end{cases}$ **7.27** $\begin{cases} x'=-2x+8y, \\ y'=3x+2y; \end{cases}$ **7.28** $\begin{cases} x'=3x-7y, \\ y'=x-5y; \end{cases}$

7.29 $\begin{cases} x'=x+4y, \\ y'=5x-y; \end{cases}$ **7.30** $\begin{cases} x'=2x+3y, \\ y'=3x+2y. \end{cases}$

Задание 8. Температура извлеченного из печи тела в течение 20 минут падает от T_1^0 до T_2^0. Температура воздуха равна T_3^0. Через какое время с момента начала охлаждения температура тела снизится до T^0?

Вариант	Первоначальная температура тела T_1^0, *град*	Температура тела T_2^0, *град*	Температура воздуха T_3^0, *град*	Требуемая температура тела T^0, *град*
8.01	200	150	25	30
8.02	150	100	20	25
8.03	180	150	25	40
8.04	200	140	20	30

Вариант	Первоначальная температура тела T_1^0, *град*	Температура тела T_2^0, *град*	Температура воздуха T_3^0, *град*	Требуемая температура тела T^0, *град*
8.05	100	70	25	40
8.06	150	120	30	40
8.07	170	120	25	35
8.08	100	50	20	35
8.09	150	100	20	30
8.10	100	60	15	20
8.11	120	80	20	25
8.12	130	90	35	30
8.13	140	70	25	30
8.14	120	60	25	35
8.15	200	100	15	20
8.16	170	130	30	40
8.17	190	150	30	45
8.18	100	70	20	25
8.19	130	50	25	30
8.20	180	100	15	20
8.21	200	150	20	40
8.22	110	60	20	30
8.23	200	120	25	35
8.24	140	80	30	40
8.25	130	90	35	40
8.26	120	70	25	35
8.27	150	100	20	35
8.28	170	110	30	45
8.29	180	120	30	40
8.30	160	100	15	45

Замечание. По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T^0 тела и температурой воздуха T_3^0.

Решение типового варианта контрольной работы № 3

"Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной"

Задание 1. По данной функции $z=\cos xy+y^2\ln x$ вычислить выражение

$$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\frac{\partial z}{\partial x}+5\frac{\partial z}{\partial y}.$$

<u>**Решение:**</u> В данном примере необходимо найти частные производные первого и второго порядков данной функции. *Частной производной по x функции z=f(x,y) в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется предел*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен. Обозначается эта частная производная любым из следующих символов $f'_x(M_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$.

Частная производная по x есть обычная производная от функции $z=f(x,y)$, рассматриваемой как функция только от переменной x при фиксированном значении переменной y (то есть переменная y считается постоянной).

Совершенно аналогично можно определить *частную производную по y функции z=f(x,y) в точке $M_0(x_0,y_0)$*: $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$.

Сами частные производные могут являться функциями от нескольких переменных на некотором множестве. У этих функций тоже могут существовать частные производные по x и по y. Они называются *вторыми частными производными* или *частными производными второго порядка* и обозначаются z''_{xx}, z''_{yx} или $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Таким образом,

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(z'_x\right)'_x,\quad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(z'_y\right)'_y,\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(z'_x\right)'_y,\quad z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(z'_y\right)'_x.$$

Две последние частные производные второго порядка называются смешанными. Смешанная частная производная любого порядка в общем случае зависит от того, в какой последовательности берутся переменные, по которым вычисляется производная. Однако существует теорема, утверждающая, что *если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они не зависят от того, в какой последовательности вычислялись частные производные по x и по y.*

Вычислим частные производные данной функции $z=\cos xy+y^2\ln x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos xy+y^2\ln x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos xy\right)+y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x\right)=\left(-\sin xy\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\right)+y^2\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=-y\sin xy+\frac{y^2}{x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos xy+y^2\ln x\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos xy\right)+\ln x\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)=-\sin xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\right)+\ln x\cdot 2y=$$
$$=-x\sin xy+2y\ln x;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\sin xy+\frac{y^2}{x}\right)=-y\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin xy\right)+y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)=-y^2\cos xy-\frac{y^2}{x^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-x\sin xy+2y\ln x\right)=-x\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin xy\right)+\ln x\frac{\partial}{\partial y}\left(2y\right)=$$
$$=-x^2\cos xy+2\ln x;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-y\sin xy+\frac{y^2}{x}\right)=-y\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin xy\right)-\sin xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)=$$
$$=-xy\cos xy-\sin xy+\frac{2y}{x};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin xy+2y\ln x\right)=-\sin xy-xy\cos xy+\frac{2y}{x}.$$

Видим, что смешанные частные производные второго порядка равны. Подставим полученные производные в выражение F:

$$F=\left(-y^2\cos xy-\frac{y^2}{x^2}\right)-2\left(-xy\cos xy-\sin xy+\frac{2y}{x}\right)+3\left(-x^2\cos xy+2\ln x\right)-$$
$$-4\left(-y\sin xy+\frac{y^2}{x}\right)+5\left(-x\sin xy+2y\ln x\right)=-y^2\cos xy+2xy\cos xy-3x^2\cos xy+$$
$$+2\sin xy+4y\sin xy-5x\sin xy-\frac{y^2}{x^2}-\frac{4y}{x}-\frac{4y^2}{x}+6\ln x+10y\ln x=$$
$$=\left(-y^2+2xy-3x^2\right)\cos xy+\left(4y-5x+2\right)\sin xy-\frac{(4xy+4x+y)y}{x^2}+\left(6+10y\right)\ln x.$$

Ответ:

$$F=\left(-y^2+2xy-3x^2\right)\cos xy+\left(4y-5x+2\right)\sin xy-\frac{(4xy+4x+y)y}{x^2}+\left(6+10y\right)\ln x.$$

Задание 2. Найти экстремум функции двух переменных

$$z=x^3+3xy^2-15x-12y+25.$$

Решение: Точка $M(x_0,y_0)$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность точки M, что для всех точек (x,y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0;y_0)\geq f(x;y)\ \left(f(x_0;y_0)\leq f(x;y)\right).$$

Теорема. *Пусть точка (x_0, y_0) – есть точка экстремума дифференцируемой функции $z=f(x,y)$. Тогда частные производные $f'_x(x_0;y_0)$ и $f'_y(x_0;y_0)$ в этой точке равны нулю.*

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции $z=f(x,y)$, т.е. частные производные равны нулю, называются *критическими* или *стационарными*. Равенство частных производных нулю выражает лишь необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

Теорема (достаточное условие экстремума функции двух переменных). *Пусть функция $z=f(x,y)$:*

а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $f'_x(x_0;y_0)=0$ и $f'_y(x_0;y_0)=0$;

б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $f''_{xx}(x_0;y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0;y_0)=f''_{yx}(x_0;y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0;y_0)=C$.

Тогда, если $\Delta=AC-B^2>0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, причем если $A<0$ – максимум, если $A>0$ – минимум. В случае $\Delta=AC-B^2<0$, функция $z=f(x,y)$ экстремума не имеет. Если $\Delta=AC-B^2=0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

1. Для исследования функции двух переменных на экстремум найдем частные производные функции z'_x и z'_y:

$$z'_x=3x^2+3y^2-15,\ z'_y=6xy-12.$$

2. Найдем критические точки функции, решая систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-15=0, \\ 6xy-12=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{y}, \\ y^4-5y^2+4=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1=2, y_1=1;\ x_2=-2, y_2=-1;\ x_3=1, y_3=2;\ x_4=-1, y_4=-2.$$

Критическими точками функции являются

$$M_1(2;1),\ M_2(-2;-1),\ M_3(1;2),\ M_4(-1;-2).$$

3. Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=6x,\ z''_{yy}=6x,\ z''_{xy}=6y.$$

Вычислим значения этих производных в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделаем вывод о наличии экстремумов.

Точка $M_1(2;1)$:

$$A_1=z''_{xx}(2;1)=6\cdot 2=12,\ B_1=z''_{xy}(2;1)=6\cdot 1=6,\ C_1=z''_{yy}(2;1)=6\cdot 2=12,$$

$$\Delta_1=A_1C_1-B_1^2=12\cdot 12-6^2=144-36=108>0.$$

Так как $\Delta_1>0$, то в точке $M_1(2;1)$ функция z имеет экстремум. Причем минимум, так как $A_1=12>0$.

Точка $M_2(-2;-1)$:

$$A_2 = z''_{xx}(-2;-1) = 6\cdot(-2) = -12\,,\; B_2 = z''_{xy}(-2;-1) = 6\cdot(-1) = -6\,,$$

$$C_2 = z''_{yy}(-2;-1) = 6\cdot(-2) = -12\,,\; \Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-12)\cdot(-12) - (-6)^2 = 108 > 0\,.$$

Так как $\Delta_2 > 0$, то в точке $M_2(-2;-1)$ функция z имеет экстремум. Причем максимум, так как $A_2 = -12 < 0$.

Точка $M_3(1;2)$:

$$A_3 = z''_{xx}(1;2) = 6\cdot 1 = 6\,,\; B_3 = z''_{xy}(1;2) = 6\cdot 2 = 12\,,\; C_3 = z''_{yy}(1;2) = 6\cdot 1 = 6\,,$$

$$\Delta_3 = A_3C_3 - B_3^2 = 6\cdot 6 - 12^2 = 36 - 144 = -108 < 0\,.$$

Так как $\Delta_3 < 0$, то в точке $M_3(1;2)$ функция z экстремума не имеет.

Точка $M_4(-1;-2)$:

$$A_4 = z''_{xx}(-1;-2) = 6\cdot(-1) = -6\,,\; B_4 = z''_{xy}(-1;-2) = 6\cdot(-2) = -12\,,$$

$$C_4 = z''_{yy}(-1;-2) = 6\cdot(-1) = -6\,,\; \Delta_4 = A_4C_4 - B_4^2 = (-6)\cdot(-6) - (-12)^2 = -108 < 0\,.$$

Так как $\Delta_4 < 0$, то в точке $M_4(-1;-2)$ функция z экстремума не имеет.

4. Найдем экстремумы функции.

В точке $M_1(2;1)$ имеем минимум, равный $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 + 25 = -3$.
В точке $M_2(-2;-1)$ имеем максимум, равный $z_{\min} = -8 - 6 + 30 + 12 + 25 = 53$.

Ответ: В точке $M_1(2;1)$ минимум – $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 + 25 = -3$, в точке $M_2(-2;-1)$ максимум – $z_{\min} = -8 - 6 + 30 + 12 + 25 = 53$.

Задание 3. Даны функция $u = 2x^3 - 4xy^2z + 3z^2x - y^3z$, точка $A(3;-2;4)$ и вектор $\vec{a} = (-12;-16;48)$. Найти: 1) grad u в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение: 1) *Градиентом* функции $u=f(x,y,z)$ называется вектор с координатами $(u'_x;u'_y;u'_z)$. Обозначается ∇u или grad u. Градиент функции ∇u в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Найдем частные производные функции u'_x, u'_y и u'_z:

$$u'_x = 6x^2 - 4y^2z + 3z^2\,,\; u'_y = -8xyz - 3y^2z\,,\; u'_z = -4xy^2 + 6zx - y^3\,.$$

Вычислим значения частных производных в точке A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 6\cdot 3^2 - 4\cdot(-2)^2\cdot 4 + 3\cdot 4^2 = 54 - 64 + 48 = 38\,,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = -8\cdot 3\cdot(-2)\cdot 4 - 3\cdot(-2)^2\cdot 4 = 192 - 48 = 144\,,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -4\cdot 3\cdot(-2)^2 + 6\cdot 4\cdot 3 - (-2)^3 = -48 + 72 + 8 = 32\,.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u\big|_A = 38\,\vec{i} + 144\,\vec{j} + 32\,\vec{k}$.

2) *Производной* u'_l *по направлению* l функции двух переменных $u=f(x,y,z)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, т.е. $u'_l=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Производная u'_l характеризует скорость изменения функции в направлении l. Если функция $u=f(x,y,z)$ дифференцируема, то производная по направлению l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \text{ или } u'_l=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\nabla u=(u'_x;u'_y;u'_z)$ и единичного вектора $\vec{e_l}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$. Получим

$$\nabla u\cdot\vec{e_l}=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma.$$

Отсюда получаем, что $u'_l=\nabla u\cdot\vec{e_l}$, то есть *производная по направлению есть скалярное произведение градиента* ∇u *и единичного вектора, задающего направление* l.

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}=(-12;-16;48)$

$$\cos\alpha=\frac{-12}{\sqrt{(-12)^2+(-16)^2+(48)^2}}=\frac{-12}{\sqrt{144+256+2304}}=\frac{-12}{\sqrt{2704}}=\frac{-12}{52}=-\frac{3}{13},$$

$$\cos\beta=\frac{-16}{\sqrt{(-12)^2+(-16)^2+(48)^2}}=\frac{-16}{52}=-\frac{4}{13},$$

$$\cos\gamma=\frac{48}{\sqrt{(-12)^2+(-16)^2+(48)^2}}=\frac{12}{13}.$$

Значения производных в точке $A(3;-2;4)$ известны. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=38\cdot\left(-\frac{3}{13}\right)+144\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)+32\cdot\frac{12}{13}=-\frac{114}{13}-\frac{576}{13}+\frac{384}{13}=-\frac{306}{13}.$$

<u>***Ответ:***</u> 1) $\operatorname{grad}u\big|_A=38\vec{i}+144\vec{j}+32\vec{k}$; 2) $\dfrac{\partial u}{\partial l}=-23\dfrac{7}{13}$.

Задание 4. При изучении функциональной зависимости $y=f(x)$ произведен ряд изменений величины x и получены соответствующие значения величины y. Результаты измерений занесены в таблицу:

X	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
Y	8,822	10,064	16,209	19,992	20,471	26,387	30,432	35,989

Предполагая, что теоретически зависимость между значениями признаков выражается линейной функцией $y=ax+b$, по методу наименьших квадратов найти параметры a и b. Каково значение признака Y при $x=6,25$?

Решение: По условию точки группируются на плоскости вдоль некоторой прямой. Задача заключается в том, чтобы найти параметры a и b этой прямой. Причем это нужно сделать так, чтобы она лучше любой другой прямой соответствовала расположению точек на плоскости.

Признаком наилучшей прямой считается минимум суммы квадратов отклонений фактических значений y_i, полученных из таблицы, от вычисленных по уравнению прямой $y=ax+b$. Эта сумма квадратов рассчитывается по формуле

$$S^2=\left(y_1-(ax_1+b)\right)^2+\left(y_2-(ax_2+b)\right)^2+...+\left(y_n-(ax_n+b)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(ax_i+b)\right)^2.$$

Все x_i и y_i – известные из таблицы числа. Значит, S^2 есть функция двух переменных a и b: $S^2=S^2(a;b)$. Сумма квадратов принимает наименьшее значение в точке минимума, то есть в точке, где частные производные $\frac{\partial S^2}{\partial a}$ и $\frac{\partial S^2}{\partial b}$ равны нулю. Находя частные производные и приравнивая их нулю, получаем систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S^2}{\partial a}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-2x_i\left(y_i-ax_i-b\right)\right)=0,\\ \dfrac{\partial S^2}{\partial b}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_i-ax_i-b\right)\right)=0.\end{cases}$$

Эта система уравнений после преобразования имеет вид

$$\begin{cases}b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \quad ,\\ b\cdot n+a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \quad .\end{cases} \tag{4.1}$$

Получилась *система нормальных уравнений* относительно неизвестных величин a и b. Формула $y=ax+b$ с параметрами a и b, определенными из системы, называется *уравнением регрессии*. Прямая линия, описываемая этим уравнением, называется *линией регрессии*.

Для нахождения коэффициентов проведем необходимые дополнительные вычисления прямо в таблице

									Сумма
x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	30
y_i	8,822	10,064	16,209	19,992	20,471	26,387	30,432	35,989	168,4
x_i^2	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25	30,25	123
$x_i y_i$	17,64	25,16	48,63	69,97	81,88	118,7	152,2	197,94	712,1

Таким образом, $n=8$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=30$, $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=168,4$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=123$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=712,1$.

Подставляя найденные суммы в систему (4.1), получим

$$\begin{cases} 30b+123a=712,1 & ,\\ 8b+30a=168,4 & .\end{cases}$$

Решим данную систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}30 & 123\\ 8 & 30\end{vmatrix}=30\cdot 30-8\cdot 123=900-984=-84,$$

$$\Delta_b=\begin{vmatrix}712,1 & 123\\ 168,4 & 30\end{vmatrix}=712,1\cdot 30-168,4\cdot 123=21364-20709=654,8,$$

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}30 & 712,1\\ 8 & 168,4\end{vmatrix}=30\cdot 168,4-712,1\cdot 8=5051-5697=-646.$$

Тогда, $a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}=\dfrac{-646}{-84}\approx 7,691$, $b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}=\dfrac{654,8}{-84}\approx -7,796$.

Таким образом, зависимость между значениями признаков выражается линейной функцией

$$y=7,691x-7,796. \qquad (4.2)$$

Чтобы найти значение признака Y при $x=6,25$, подставим это значение в формулу (4.2):

$$y(6,25)=7,691\cdot 6,25-7,796\approx 40,273.$$

Ответ: $y=7,691x-7,796$; $y(6,25)\approx 40,273$.

Задание 5. Найти неопределенные интегралы (результаты проверить дифференцированием).

а) $\displaystyle\int\frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{4-3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\displaystyle\int(2x^2-4x+1)\cos 2x dx$; г) $\displaystyle\int\frac{3x-7}{x^2-12x+20}dx$.

Решение: а) $\displaystyle\int\frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx$. Так как $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, то можно свести данный интеграл к табличным интегралам $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq -1)$ и $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$. Таким образом, получаем

$$\int\frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{2x^{\frac{1}{5}}-3x^2+4x^{\frac{1}{3}}}{x^1\cdot x^{\frac{1}{3}}}dx=\int\left(2\frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}}-3\frac{x^2}{x^{\frac{4}{3}}}+4\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right)dx=$$

$$=\int\left(2x^{\frac{1}{5}-\frac{4}{3}}-3x^{2-\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{17}{15}}-3x^{\frac{2}{3}}+4x^{-1}\right)dx=$$

$$=2\int x^{-\frac{17}{15}}dx-3\int x^{\frac{2}{3}}dx+4\int\frac{dx}{x}=2\cdot\frac{x^{-\frac{17}{15}+1}}{-\frac{17}{15}+1}-3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+4\ln|x|+C=$$

$$=-15x^{-\frac{2}{15}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C=-\frac{15}{\sqrt[15]{x^2}}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C\ \ (C=const).$$

<u>Проверка:</u> При проверке, если найти производную получившегося выражения, то она должна быть равна подынтегральной функции. Продифференцируем получившееся выражение:

$$\left(-\frac{15}{\sqrt[15]{x^2}}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C\right)'=\left(-15x^{-\frac{2}{15}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C\right)'=$$

$$=-15\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)x^{-\frac{2}{15}-1}-\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}+4\cdot\frac{1}{x}=2x^{-\frac{17}{15}}-3x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{x}\ \text{ или }\ \frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}.$$

б) $\int\frac{4-3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Данный интеграл выглядит довольно сложным. Особенно из-за наличия в подынтегральном выражении функции $\arccos x$. Однако, если вспомнить производную этой функции $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то увидим, что похожее выражение находится в знаменателе подынтегральной функции. Следовательно, в данном интеграле можно попробовать сделать замену. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула*

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int f(x)dx,\ \text{где}\ x=\varphi(t). \tag{5.1}$$

Можно вычислять интеграл с помощью перехода от левой части к правой в формуле (5.1), а можно и в обратную сторону. В данном примере в качестве функции $\varphi(t)$ выступает $\arccos x$:

$$\int\frac{4-3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left[\begin{array}{c}u=\arccos x,\\ du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right]=\int(4-3u^2)(-du)=\int(3u^2-4)du=$$

$$=u^3-4u+C=[u=\arccos x]=\arccos^3 x-4\arccos x+C.$$

<u>Проверка:</u> Найдем производную получившегося выражения

$$\left(\arccos^3 x-4\arccos x+C\right)'=3\arccos^2 x\cdot(\arccos x)'-4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=3\arccos^2 x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4-3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

в) $\int(2x^2-4x+1)\cos 2x dx$. В данном интеграле присутствует произведение тригонометрической функции и многочлена. В этом случае (а также, если имеем в подынтегральном выражении произведение показательной функции и многочлена, произведение показательной и тригонометрической функций или обратную тригонометрическую функцию) можно попробовать интегрирование по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда, $d(uv)=vdu+udv$. Отсюда следует $\int d(uv)=\int vdu+\int udv$. Так как $\int d(uv)=uv+C$, то получаем формулу, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{5.2}$$

Применим формулу (5.2) к данному интегралу. В качестве u будем брать функцию, от которой можно «избавиться» с помощью дифференцирования:

$$\int(2x^2-4x+1)\cos 2x dx=\begin{bmatrix} u=2x^2-4x+1, & du=(4x-4)dx, \\ dv=\cos 2x dx, & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}=$$

$$=(2x^2-4x+1)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot(4x-4)dx=$$

$$=(x^2-2x+0,5)\sin 2x-\int(2x-2)\sin 2x dx=\begin{bmatrix} u=2x-2, & du=2dx, \\ dv=\sin 2x dx, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}=$$

$$=(x^2-2x+0,5)\sin 2x-\left((2x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot 2dx\right)=$$

$$=(x^2-2x+0,5)\sin 2x+(x-1)\cos 2x-\int\cos 2x dx=$$

$$=(x^2-2x+0,5)\sin 2x+(x-1)\cos 2x-0,5\sin 2x+C=$$

$$=(x^2-2x)\sin 2x+(x-1)\cos 2x+C.$$

<u>Проверка:</u> Продифференцируем получившееся выражение

$$\left((x^2-2x)\sin 2x+(x-1)\cos 2x+C\right)'=\left((x^2-2x)\sin 2x\right)'+\left((x-1)\cos 2x\right)'=$$

$$=(x^2-2x)'\cdot\sin 2x+(x^2-2x)\cdot(\sin 2x)'+(x-1)'\cdot\cos 2x+(x-1)\cdot(\cos 2x)'=$$

$$=(2x-2)\sin 2x+(x^2-2x)\cdot 2\cos 2x+\cos 2x+(x-1)\cdot(-2\sin 2x)=$$

$$=(2x^2-4x+1)\cos 2x.$$

г) $\int\frac{3x-7}{x^2-12x+20}dx$. Подынтегральной функцией является рациональная дробь. Интегрирование правильной рациональной дроби производится разложением ее в сумму простейших дробей с последующим интегрированием. Разложение подынтегральной дроби имеет вид

$$\frac{3x-7}{x^2-12x+20}=\frac{3x-7}{(x-10)(x-2)}=\frac{A}{x-10}+\frac{B}{x-2}, \qquad (5.3)$$

где коэффициенты A и B определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочленов в числителях. Приведем разложение (5.3) к общему знаменателю

$$\frac{A}{x-10}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-10)}{(x-10)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A-10B)}{x^2-12x+20}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим получившуюся систему:

$$3x-7=(A+B)x+(-2A-10B) \;\Rightarrow \begin{cases} A+B=3, \\ -2A-10B=-7, \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{23}{8}, \\ B=\dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\frac{3x-7}{x^2-12x+20}dx=\int\left(\frac{23/8}{x-10}+\frac{1/8}{x-2}\right)dx=\frac{23}{8}\int\frac{dx}{x-10}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{23}{8}\ln|x-10|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+C.$$

<u>Проверка</u>: Продифференцируем получившееся выражение

$$\left(\frac{23}{8}\ln|x-10|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+C\right)'=\frac{23}{8}\left(\ln|x-10|\right)'+\frac{1}{8}\left(\ln|x-2|\right)'=$$

$$=\frac{23}{8}\cdot\frac{1}{x-10}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{23}{x-10}+\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{23(x-2)+(x-10)}{(x-10)(x-2)}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{24x-56}{(x-10)(x-2)}=\frac{3x-7}{x^2-12x+20}.$$

<u>Ответ:</u>

а) $\displaystyle\int\frac{2\sqrt[5]{x}-3x^2+4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx=-\frac{15}{\sqrt[15]{x^2}}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$;

б) $\displaystyle\int\frac{4-3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos^3 x-4\arccos x+C$;

в) $\displaystyle\int(2x^2-4x+1)\cos 2x dx=(x^2-2x)\sin 2x+(x-1)\cos 2x+C$;

г) $\displaystyle\int\frac{3x-7}{x^2-12x+20}dx=\frac{23}{8}\ln|x-10|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+C$; ($C=const$).

Задание 6. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x-3}{\sqrt{5-4x}}dx$.

<u>Решение:</u> В данном интеграле можно попробовать сделать замену: заменить корень новой переменной. Особенность замены в определенном интеграле состоит в том, что не нужно возвращаться к исходной переменной интегрирования. *Если функция f(x) непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha), \qquad (6.1)$$

где $x=\varphi(t)$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. Применим формулу (6.1) к данному интегралу:

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x-3}{\sqrt{5-4x}}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{5-4x}\Rightarrow x=\dfrac{5-t}{4}, & x=1\Rightarrow t=1 \\ dx=-\dfrac{dt}{4}, & x=-1\Rightarrow t=3 \end{bmatrix} = \int_3^1 \frac{2\cdot\dfrac{5-t}{4}-3}{t}\cdot\left(-\frac{dt}{4}\right)=$$

$$=\int_3^1\frac{t+1}{8t}dt=\int_3^1\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8t}\right)dt=\frac{1}{8}\int_3^1 dt+\frac{1}{8}\int_3^1\frac{1}{t}dt=\frac{1}{8}t\Big|_3^1+\frac{1}{8}\ln|t|\Big|_3^1=$$

$$=\frac{1}{8}(1-3)+\frac{1}{8}(\ln 1-\ln 3)=-\frac{1}{4}-\frac{\ln 3}{8}=-\frac{2+\ln 3}{8}.$$

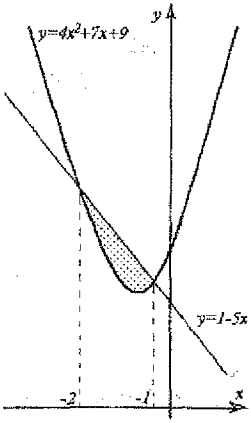
Ответ: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x-3}{\sqrt{5-4x}}dx=-\frac{2+\ln 3}{8}$.

Задание 7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=4x^2+7x+9$ и $y=1-5x$. Выполнить рисунок.

Решение: Найдем точки пересечения данных кривых:

$$\begin{cases} y=4x^2+7x+9, \\ y=1-5x \end{cases} \Rightarrow 4x^2+7x+9=1-5x \Rightarrow 4x^2+12x+8=0 \Rightarrow$$

$$x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=-1 \Rightarrow y_1=11,\ y_2=6.$$



Используя найденные точки $(-2;11)$ и $(-1;6)$, построим фигуру, ограниченную линиями:

$y=4x^2+7x+9$ – парабола с вершиной $(-\frac{7}{8};\frac{95}{16})$ и

$y=1-5x$ – прямая.

Воспользуемся формулой вычисления площади плоской фигуры $S_ф=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$, где $y=f_2(x)$ – уравнение верхней, а $y=f_1(x)$ – нижней границы области. В нашем случае, так как $f_2(x)=1-5x$ и $f_1(x)=4x^2+7x+9$, то

$$S_\phi = \int_{-2}^{-1}\left[\left(1-5x\right)-\left(4x^2+7x+9\right)\right]dx = \int_{-2}^{-1}\left(-4x^2-12x-8\right)dx =$$

$$=\left(-4\cdot\frac{x^3}{3}-12\cdot\frac{x^2}{2}-8\cdot x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)\right)-\left(-\frac{4}{3}\cdot(-2)^3-6\cdot(-2)^2-8\cdot(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{3}-6+8\right)-\left(\frac{4}{3}\cdot 8-6\cdot 4+8\cdot 2\right)=\frac{10}{3}-\frac{8}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S_\phi = \frac{2}{3}$ (*кв. ед.*).

Решение типового варианта контрольной работы № 4

" Дифференциальные уравнения "

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$(x^2+y^2)dx-2xydy=0\,.$$

Решение: Функция $f(x;y)$ называется однородной степени $\alpha\,(\alpha\in R)$, если справедливо тождество $f(t\cdot x;t\cdot y)=t^\alpha\cdot f(x;y)$ при любом t из некоторого множества. Дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка

$$y'=f(x,y), \qquad (1.1)$$

называется однородным ДУ в форме производной, если $f(x;y)$ – однородная функция нулевого измерения. Однородную функцию нулевого измерения $f(x;y)$ можно привести к виду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, а тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

ДУ первого порядка

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0 \qquad (1.2)$$

называется однородным в форме дифференциалов, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – произвольные однородные функции одной и той же степени. ДУ (1.1) можно привести к виду (1.2) и наоборот.

Однородные ДУ (1.1) и (1.2) сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=u\cdot x$, где $u=u(x)$ – новая искомая функция. Находим $y'=u'x+u$ и после подстановки уравнение (1.1) примет вид

$$u'x+u=\varphi(u) \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}\cdot x=\varphi(u)-u \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+C$ – общий интеграл уравнения (1.1). При разделении переменных возможна потеря решений, обращающих в нуль выражение $\varphi(u)-u$.

Мы имеем уравнение $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$. Так как функции $P(x;y)=x^2+y^2$ и $Q(x;y)=-2xy$ – однородные функции степени 2, то исходное дифференциальное уравнение является однородным.

Положим $y=u\cdot x$, тогда $dy=xdu+udx$. После подстановки получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$(x^2+u^2x^2)dx-2x^2u(xdu+udx)=0 \quad\Rightarrow\quad x^2(1-u^2)dx-2x^3udu=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$x^2(1-u^2)dx=2x^3udu \quad\Rightarrow\quad \frac{udu}{1-u^2}=\frac{dx}{2x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{2udu}{1-u^2}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$$\ln|C|-\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x| \quad\Rightarrow\quad \ln|x|+\ln\left|1-u^2\right|=\ln|C| \quad\Rightarrow\quad x(1-u^2)=C.$$

Вернемся к функции y. Так как $y=u\cdot x$, то $x(1-\frac{y^2}{x^2})=C$. Таким образом, $x^2-y^2-Cx=0$ – общий интеграл исходного уравнения, где $C=const$ ($C\neq 0$).

Проверим, не произошли ли потери решений. При разделении переменных мы полагали $x^2(1-u^2)\neq 0$. Предположим

$$x^2(1-u^2)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0 \text{ или } 1-u^2=0.$$

Функция $x=0$ является решением данного ДУ, что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.

Из равенства $1-u^2=0$ получаем $u=1$ или $u=-1$, и, следовательно, $y=x$ или $y=-x$. Но эти решения получаются из общего, если расширить значение C, допуская $C=0$.

Ответ: $x^2-y^2-Cx=0$ ($C=const$) – общий интеграл; $x=0$ – особое решение данного ДУ.

Задание 2. Найти частное решение уравнения $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$.

Решение: Линейным ДУ первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной, точнее говоря, это уравнение вида

$$A(x)y'+B(x)y+C(x)=0, \tag{2.1}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – непрерывные функции от x. Предполагая, что в некотором промежутке коэффициент $A(x)$ не обращается в нуль, уравнение (2.1) приводится к виду $y' + \frac{B(x)}{A(x)}y = -\frac{C(x)}{A(x)}$ или в других обозначениях

$$y' + g(x)y = h(x).$$

ДУ (2.2) называется приведенным (коэффициент при y' равен 1). Это уравнение можно решить с помощью подстановки Бернулли.

Представим искомую функцию $y = y(x)$ в виде произведения двух других функций $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, причем одну из этих функций всегда можно выбрать произвольной. Мы ее так выберем, чтобы исходное уравнение упростилось.

Так как из $y = u \cdot v$ следует $y' = u'v + uv'$, то наше уравнение в новых переменных примет вид $u'v + uv' + 2xuv = 2x^2e^{-x^2}$ или, после группировки,

$$u'v + u(v' + 2xv) = 2x^2e^{-x^2}. \qquad (2.3)$$

В качестве $v = v(x)$, чтобы выражение в скобках равнялось нулю и уравнение (2.3) упростилось, возьмем одно из решений уравнения $v' + 2xv = 0$:

$$v' + 2xv = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -2xv \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -2xdx \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v} = -2\int xdx \;\Rightarrow$$

$$\ln v = C_1 - x^2, \text{ где } C_1 = const.$$

Пусть $C_1 = 0$, тогда $\ln v = C_1 - x^2$ или $v = e^{-x^2}$. Подставив $v = e^{-x^2}$ в уравнение (2.3), получим уравнение с разделяющимися переменными $u'e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2}$. Решим его, разделяя переменные и интегрируя:

$$u' = 2x^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 2x^2 \;\Rightarrow\; du = 2x^2dx \;\Rightarrow\; \int du = \int 2x^2dx \;\Rightarrow$$

$$u = \frac{2}{3}x^3 + C, \text{ где } C = const.$$

Так как $y = u \cdot v$, то $y = e^{-x^2}(\frac{2}{3}x^3 + C)$ – общее решение данного ДУ.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$. Для этого в общее решение подставим $y = 2$ и $x = 0$:

$$2 = e^{-0^2}(\frac{2}{3}0^3 + C) \;\Rightarrow\; 2 = e^0(0 + C) \;\Rightarrow\; C = 2.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид $y = e^{-x^2}(\frac{2}{3}x^3 + 2)$.

Ответ: $y = e^{-x^2}(\frac{2}{3}x^3 + 2)$ – частное решение данного ДУ.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + y = xy^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1)$$

Решение: Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ $(\alpha\in R)$ называется уравнением Бернулли. С помощью подстановки $z=y^{1-\alpha}$ оно сводится к линейному ДУ первого порядка. В уравнении (3.1) – $\alpha=\frac{1}{2}$ и, следовательно, применяем подстановку $z=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$. Отсюда, $y=z^2$. Находим производную $y'=2z\cdot z'$. После замены уравнение (3.1) примет вид $2z\cdot z'+z^2=xz$ или

$$2z'+z=x. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) является линейным ДУ первого порядка относительно функции z и решается аналогично заданию 2. Применяем подстановку Бернулли $z=u\cdot v$ $(z'=u'v+uv')$:

$$2(u'v+uv')+uv=x \quad\Rightarrow\quad 2u'v+u(2v'+v)=x. \tag{3.3}$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю и в качестве v выбираем одно из решений полученного уравнения:

$$2v'+v=0 \quad\Rightarrow\quad 2\frac{dv}{dx}=-v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\int dx \quad\Rightarrow\quad \ln v=-\frac{1}{2}x.$$

Подставив $v=e^{-\frac{1}{2}x}$ в уравнение (3.3), получим уравнение с разделяющимися переменными $2u'e^{-\frac{1}{2}x}=x$. Решим его, разделяя переменные и интегрируя:

$$u'=\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x} \quad\Rightarrow\quad du=\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x}dx \quad\Rightarrow\quad \int du=\frac{1}{2}\int xe^{\frac{1}{2}x}dx \quad\Rightarrow$$

$$u=xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+C, \text{ где } C=const.$$

Так как $z=u\cdot v$, то $z=e^{-\frac{1}{2}x}(xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+C)$ или $z=x-2+Ce^{-\frac{x}{2}}$ – общее решение ДУ (3.2). И из $y=z^2$ окончательно получим общее решение исходного ДУ $y=\left(x-2+Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$.

Уравнение Бернулли может быть решено сразу с помощью подстановки Бернулли $y=u\cdot v$. Например, при такой подстановке уравнение (3.1) примет вид $u'v+uv'+uv=xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$ или

$$u'v+u(v'+v)=xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю и в качестве v выбираем одно из решений полученного уравнения:

$$v'+v=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dx}=-v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-\int dx \quad\Rightarrow\quad \ln v=-x.$$

$$2v'+v=0 \quad\Rightarrow\quad 2\frac{dv}{dx}=-v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\int dx \quad\Rightarrow\quad \ln v=-\frac{1}{2}x.$$

Подставив $v=e^{-x}$ в уравнение (3.4), получим уравнение с разделяющимися переменными $u'e^{-x}=xu^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$ или $u'=xu^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}$. Решаем его, разделяя переменные и интегрируя:

$$u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}=xe^{\frac{x}{2}} \Rightarrow u^{-\frac{1}{2}}du=xe^{\frac{x}{2}}dx \Rightarrow \int u^{-\frac{1}{2}}du=\int xe^{\frac{x}{2}}dx \Rightarrow$$

$$2u^{\frac{1}{2}}=2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}+2C \Rightarrow u=\left(xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+C\right)^2, \text{ где } C=const.$$

Так как $y=u\cdot v$, то $y=e^{-x}\left(xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+C\right)^2$ или $y=\left(x-2+Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y=\left(x-2+Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$ – общее решение данного ДУ.

$$\frac{1}{2}\int xe^{\frac{1}{2}x}dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=dx \\ dv=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}dx & v=e^{\frac{1}{2}x}\end{bmatrix}=xe^{\frac{1}{2}x}-\int e^{\frac{1}{2}x}dx=xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+C.$$

Задание 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка:

а) $y''=4\cos 2x$; б) $y''(x^2+1)=2xy'$; в) $yy''-y'^2=y^2y'$.

Решение: Некоторые уравнения второго порядка при помощи замены переменной сводятся к уравнениям первого порядка. Такое преобразование уравнения называется понижением порядка. Простейшими уравнениями второго порядка, допускающими понижение, являются следующие:

а) $y''=f(x)$; б) $y''=f(x,y')$; в) $y''=f(y,y')$.

Рассмотрим, как осуществляется понижение порядка каждого из уравнений.

а) Уравнение $y''=f(x)$. Последовательно интегрируя, получим

$$y'=\int f(x)dx=F(x)+C_1 \Rightarrow y=\int(F(x)+C_1)dx=\int F(x)dx+C_1x+C_2.$$

Найдем общее решение ДУ $y''=4\cos 2x$:

$$y'=\int 4\cos 2x dx=2\sin 2x+C_1 \Rightarrow y=\int(2\sin 2x+C_1)dx=-\cos 2x+C_1x+C_2.$$

Общее решение данного ДУ: $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$, где C_1 и $C_2=const$.

б) Уравнение $y''=f(x,y')$. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Вводим новую неизвестную функцию $z(x)=y'$. Тогда, $y''=z'(x)$. Данное уравнение в переменных x и z примет вид $z'=f(x,z)$. Допустим, что нам удалось найти общее решение этого уравнения $z=\varphi(x,C_1)$. Заменяя в этом уравнении z на y', получим $y'=\varphi(x,C_1)$. Интегрируя, имеем окончательно общее решение исходного уравнения $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$, где C_1 и $C_2=const$.

Найдем общее решение ДУ $y''(x^2+1)=2xy'$. Положим $y'=z$ и $y''=z'$. Данное уравнение в переменных x и z примет вид

$$z'(x^2+1)=2xz.$$

То есть получили ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{dx}(x^2+1)=2zx \Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{2x}{x^2+1}dx \Rightarrow \int\frac{dz}{z}=\int\frac{2x}{x^2+1}dx \Rightarrow$$

$$\ln|z|=\ln(x^2+1)+\ln|C_1|.$$

Отсюда, $z=C_1(x^2+1)$. Так как $z=y'$, то $y'=C_1(x^2+1)$. Интегрируя, получим общее решение исходного уравнения $y=C_1(\frac{x^3}{3}+x)+C_2$, где C_1 и $C_2=const$.

в) Уравнение $y''=f(y,y')$. Это уравнение не содержит явно независимой переменной x. Для понижения порядка вводим новую функцию $z(y)=y'$, зависящую от переменной y. Тогда $y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Так как $\frac{dy}{dx}=z(y)$, то $y''=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z$. После подстановки выражений $y'=z(y)$ и $y''=z\frac{dz}{dy}$ в уравнение получим ДУ первого порядка относительно $z(y)$: $z\frac{dz}{dy}=f(y,z)$. Предположим, что нам удалось решить это уравнение и получить $z(y)=\varphi(y,C_1)$.

Так как $z(y)=y'$, то $y'=\varphi(y,C_1)$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим общий интеграл

$$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

Найдем общее решение ДУ $yy''-y'^2=y^2y'$. Пусть $y'=z(y)$, $y''=z\frac{dz}{dy}$.

В новых переменных данное уравнение примет вид

$$yz\frac{dz}{dy}-z^2=y^2z \text{ или } z(y\frac{dz}{dy}-z-y^2)=0.$$

Последнее уравнение распадается на совокупность двух уравнений:

$$z=0 \qquad (4.1)$$

и

$$y\frac{dz}{dy}-z-y^2=0. \qquad (4.2)$$

Уравнение (4.2) – линейное ДУ относительно $z(y)$. Решение его ищем в виде $z=u(y)\cdot v(y)$ $(\frac{dz}{dy}=\frac{du}{dy}v+\frac{dv}{dy}u)$; $y(\frac{du}{dy}v+\frac{dv}{dy}u)-uv-y^2=0 \Rightarrow$

$$yv\frac{du}{dy}+u(\frac{dv}{dy}-v)-y^2=0. \qquad (4.3)$$

Пусть $\frac{dv}{dy}-v=0$. Тогда, $\frac{dv}{dy}=v$. Следовательно, $\ln|v|=\ln|y|+\ln|C_0| \Rightarrow$ $v=C_0y$. Положим $C_0=1$. Тогда $v=y$. Подставляя v в (4.3), получим

$$y^2\frac{du}{dy}-y^2=0 \Rightarrow y^2(\frac{du}{dy}-1)=0 \Rightarrow$$

$$y=0 \text{ или } \frac{du}{dy}-1=0 \Rightarrow u=y+C_1.$$

Тогда $z=uv=(y+C_1)y=y^2+C_1y$. Но $z=y'=\frac{dy}{dx}$. Значит

$$\frac{dy}{dx}=y^2+C_1y \Rightarrow \frac{dy}{y^2+C_1y}=dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2+C_1y}=\int dx.$$

Получаем, что $\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|=x+C_2$ – общий интеграл ДУ (4.2), а, следовательно, и данного уравнения.

Рассмотрим уравнение (4.1). Так как $z=0$, то $y'=0$. Тогда $y=C$ – особое решение данного уравнения (включает $y=0$) ибо не получается из общего интеграла ни при каких C_1 и C_2.

<u>Ответ:</u> а) $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$ – общее решение данного ДУ; б) $y=C_1(\frac{x^3}{3}+x)+C_2$ – общее решение данного ДУ; в) $\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|=x+C_2$ – общий интеграл данного ДУ, $y=C$ – особое решение данного ДУ. (Здесь C_1, C_2 и C – произвольные постоянные.)

Задание 5. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:

а) $y''-7y'+6y=0$; б) $y''+42y'+441y=0$; в) $yy''-y'^2=y^2y'$.

<u>Решение:</u> Линейным ДУ 2-го порядка (ЛДУ) называется дифференциальное уравнение вида:

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x), \qquad (5.1)$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ – данные функции, называемые коэффициентами.

Функция $f(x)$, стоящая в правой части, условно называется правой частью уравнения. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (5.1) называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ), так как функция, представляющая левую часть этого уравнения, является однородной функцией первой степени относительно функции y и ее производных. В этом случае оно имеет вид

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \tag{5.2}$$

В противном случае, ЛДУ (5.1) называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением или уравнением с правой частью (ЛНДУ).

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ (5.2), то при $\forall C_1, C_2 \in R$ функция $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ также представляет решение этого уравнения. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно-независимыми решениями ЛОДУ (3) на промежутке X, то общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где C_1, C_2 – произвольные, друг от друга не зависящие, постоянные.

Для того чтобы решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ (5.2) были линейно-независимыми в некотором промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского $W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, составленный для этих функций, был отличен от нуля хотя бы в одной точке x_0 промежутка X, на котором непрерывны коэффициенты $p_1(x)$ и $p_2(x)$ уравнения (5.2).

Нахождение линейно-независимых решений ЛОДУ в некоторых частных случаях представляет довольно простую задачу. Рассмотрим ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.3}$$

где p, q – действительные постоянные коэффициенты. В этом случае частные решения $y(x)$ уравнения (5.3) ищут в виде

$$y = e^{kx}. \tag{5.4}$$

Подстановка (5.4) в (5.3) приводит к решению алгебраического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{5.5}$$

которое называется характеристическим (определяющим) для ДУ (5.3). От вида корней этого уравнения зависит вид частных решений. Уравнение (5.5) всегда имеет два корня: k_1 и k_2. Возможны три случая:

оба корня действительны и различны;
оба корня действительны и совпадают;
корни комплексно-сопряженные.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

а) Дискриминант характеристического уравнения (5.5) больше нуля. Следовательно, корни k_1 и k_2 уравнения действительны и различны ($k_1 \neq k_2$). Тогда $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$ – частные линейно-независимые решения ДУ (5.3), а общее решение его таково

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Нам дано уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$. Составляем характеристическое уравнение (для этого вторую производную y'' заменяем на k^2, а первую y' –

на k): $k^2-7k+6=0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D=49-24=25>0$. Следовательно, корни k_1 и k_2 уравнения действительны и различны: $k_1=1$ и $k_2=6$. Тогда $y_1=e^x$, $y_2=e^{6x}$ – частные линейно-независимые решения ДУ. Общее решение данного ДУ имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{6x}.$$

б) Дискриминант характеристического уравнения (5.5) равен нулю. Следовательно, корни уравнения действительные совпадающие ($k_1=k_2=k$). Тогда $y_1=e^{kx}$ и $y_2=xe^{kx}$ – частные линейно-независимые решения уравнения (5.3), а общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}.$$

Нам дано уравнение $y''+42y'+441y=0$. Составляем характеристическое уравнение: $k^2+42k+441=0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D=42^2-4\cdot441=1764-1764=0$. Следовательно, корни k_1 и k_2 уравнения действительные совпадающие $k_1=k_2=-21$. Тогда $y_1=e^{-21x}$, $y_2=xe^{-21x}$ – частные линейно-независимые решения ДУ. Общее решение данного ДУ имеет вид

$$y=C_1e^{-21x}+C_2xe^{-21x}.$$

в) Дискриминант характеристического уравнения (5.5) меньше нуля. Следовательно, корни комплексно-сопряженные $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$. Тогда $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ – частные линейно-независимые решения ДУ (5.3), а общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Нам дано уравнение $y''-4y'+13y=0$. Составляем характеристическое уравнение: $k^2-4k+13=0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D=4^2-4\cdot13=-36<0$. Следовательно, корни k_1 и k_2 комплексно-сопряженные: $k_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=2\pm3i$. Так как $\alpha=2$ и $\beta=3$, то $y_1=e^{2x}\cos3x$ и $y_2=e^{2x}\sin3x$ – частные линейно-независимые решения ДУ. Общее решение данного ДУ имеет вид

$$y=C_1e^{2x}\cos3x+C_2e^{2x}\sin3x.$$

Ответ: а) $y=C_1e^x+C_2e^{6x}$;

б) $y=C_1e^{-21x}+C_2xe^{-21x}$;

в) $y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$.

(Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные).

Задание 6. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

а) $y''-5y'+4y=x+1$; б) $y''-5y'+4y=(x+5)e^x$; в) $y''-5y'+4y=\sin x-3\cos x$.

Указать вид частного решения уравнения:

г) $y'' - 4y' + 5y = ((x-2)\sin x - (x^2+3)\cos x)e^{2x}$.

Решение: ЛНДУ второго порядка имеет вид

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \qquad (5.1)$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ – данные функции, называемые коэффициентами.

Теория ЛНДУ (5.1) тесно связана с теорией ЛОДУ (5.2), левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (5.1). При этом ДУ (5.2) называется линейным однородным дифференциальным уравнением, соответствующим неоднородному. Имеет место теорема о структуре общего решения ЛНДУ:

Теорема. *Общее решение ЛНДУ (5.1) представляет сумму какого-либо частного решения y^* уравнения (5.2) и общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (3): $y = \tilde{y} + y^*$.*

ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (6.1)$$

где p, q – действительные постоянные коэффициенты.

Общее решение ЛНДУ (6.1) состоит из общего решения ЛОДУ (5.3), способ нахождения которого был описан в предыдущем задании, и частного решения ДУ (6.1). В некоторых случаях, когда правая часть имеет специальный вид, существует простой способ нахождения частного решения – метод неопределенных коэффициентов, когда общий вид предполагаемого частного решения определяется по правой части. Остается найти неизвестные коэффициенты путем подстановки предполагаемого решения в данное уравнение и сравнения обеих частей полученного тождества. Они находятся в результате решения полученной системы алгебраических уравнений. Рассмотрим эти случаи.

Правило 1. Если в ЛНДУ (6.1) правая часть представляет многочлен произвольной степени $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, то частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$y^* = Q_n(x) \cdot x^r = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n) \cdot x^r,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными (неопределенными) коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Правило 2. Если в ЛНДУ (6.1) правая часть представляет произведение показательной функции на многочлен произвольной степени

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)$$

то частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными (неопределенными) коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с α (при $\alpha = 0$ имеет место правило 1).

Правило 3. Пусть в ЛНДУ (6.1) правая часть имеет вид

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$$

где M, N, β – заданные числа.

Тогда частное решение исходного уравнения следует искать в виде

$$y^* = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x^r,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты, а r - число корней характеристического уравнения, совпадающих с βi.

Правило 4. Пусть в ЛНДУ (6.1) правая часть представляет сумму произведений показательной функции на многочлены произвольных степеней и на тригонометрическую функцию (синус или косинус)

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x).$$

Тогда частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$y^* = (Q_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^r =$$

$$= \left((A_0x^k + ... + A_{k-1}x + A_k)\cos\beta x + (B_0x^k + ... + B_{k-1}x + B_k)\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^r,$$

где $Q_k(x)$ и $R_k(x)$ – многочлены степени k ($k = \max(m,n)$), но с неизвестными коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с числами $\alpha + \beta i$ или $\alpha - \beta i$.

Три предыдущих правила являются частными случаями четвертого.

Рассмотрим данные уравнения. Соответствующим однородным уравнением для уравнений пунктов а)-в) является $y'' - 5y' + 4y = 0$. Его характеристическое уравнение – $k^2 - 5k + 4 = 0$, с корнями $k_1 = 1$ и $k_2 = 4$. Тогда общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

а) Найдем частное решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = x + 1$. Так как его правая часть есть многочлен первой степени, и нулевых корней характеристической уравнение не имеет, то частное решение по правилу 1 следует искать в виде

$$y^* = (Ax + B)x^0 = Ax + B, \tag{6.2}$$

где A и B – пока неизвестные коэффициенты, которые подберем с таким расчетом, чтобы (6.2) представляло частное решение уравнения.

$$y^{*\prime} = A,\ y^{*\prime\prime} = 0. \tag{6.3}$$

Подставляя (6.2) и (6.3) в уравнение, получим:

$$-3A + 2(Ax + B) = x + 1 \quad\Rightarrow\quad 2Ax + 2B - 3A = x + 1.$$

Полученное равенство является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях равенства должны быть равны. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 3A = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Значит, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y^* = Ax + B = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Так как общее решение неоднородного ДУ представляет сумму частного решения y^* неоднородного уравнения и общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения, то

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

б) Найдем частное решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = (x+5)e^x$. Согласно правилу 2 его следует искать в виде $y^* = (Ax + B)\cdot e^x \cdot x$, ибо корень $k_1 = 1$ совпадает с коэффициентом $\alpha = 1$ в показателе e^x в правой части исходного уравнения. A и B – пока неизвестные коэффициенты, которые подберем с таким расчетом, чтобы y^* представляло частное решение исходного уравнения. Найдем первую и вторую производные y^*:

$$y^{*'} = (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x,\ y^{*''} = (Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B))e^x.$$

Подставляя y^* и ее производные в исходное уравнение, получим:

$$(Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B))e^x - 5(Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x +$$

$$+4(Ax^2 + Bx)e^x = (x+5)e^x \quad \Rightarrow \quad (-6Ax + (2A-3B))e^x = (x+5)e^x \quad \Rightarrow$$

$$-6Ax + (2A-3B) = x + 5.$$

Полученное равенство является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях равенства должны быть равны. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ 2A - 3B = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/6, \\ B = -16/9. \end{cases}$$

Значит, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y^* = (Ax^2 + Bx)e^x = -(\frac{1}{6}x^2 + \frac{16}{9}x)e^x.$$

Общим решением данного ДУ будет

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{4x} - (\frac{1}{6}x^2 + \frac{16}{9}x)e^x.$$

в) Найдем частное решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = \sin x - 3\cos x$. Согласно правилу 3 его следует искать в виде $y^* = A\cos x + B\sin x$, ибо исходное уравнение не имеет корней $\pm i$. A и B – пока неизвестные коэффициенты, которые подберем с таким расчетом, чтобы y^* представляло частное решение исходного уравнения.

$$y^{*'} = -A\sin x + B\cos x,\ y^{*''} = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя y^* и ее производные в исходное уравнение, получим:

$(-A\cos x - B\sin x) - 5(-A\sin x + B\cos x) + 4(A\cos x + B\sin x) = \sin x - 3\cos x$ или

$$(5A+3B)\sin x+(3A-5B)\cos x=\sin x-3\cos x.$$

Полученное равенство является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых функциях в обеих частях равенства должны быть равны. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}5A+3B=1,\\ 3A-5B=3;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=7/17,\\ B=-6/17.\end{cases}$$

Значит, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y^*=A\cos x+B\sin x=\frac{7}{17}\cos x-\frac{6}{17}\sin x,$$

а общее решение ДУ

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{4x}+\frac{7}{17}\cos x-\frac{6}{17}\sin x.$$

г) Укажем вид частного решения уравнения:

$$y''-4y'+5y=((x-2)\sin x-(x^2+3)\cos x)e^{2x}.$$

Характеристическое уравнение для данного ДУ – $k^2-4k+5=0$. Тогда $k_1=2+i$ и $k_2=2-i$ – корни характеристического уравнения. Согласно правилу 4 частное решение следует искать в виде

$$y^*=((Ax^2+Bx+C)\cos\beta x+(Dx^2+Ex+F)\cos\beta x)\cdot e^{2x}\cdot x$$

или $y^*=((Ax^3+Bx^2+Cx)\cos\beta x+(Dx^3+Ex^2+Fx)\cos\beta x)e^{2x}$.

Ответ: а) $y=\tilde{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{4x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$;

б) $y=C_1e^x+C_2e^{4x}-(\frac{1}{6}x^2+\frac{16}{9}x)e^x$;

в) $y=C_1e^x+C_2e^{4x}+\frac{7}{17}\cos x-\frac{6}{17}\sin x$;

г) $y^*=((Ax^3+Bx^2+Cx)\cos\beta x+(Dx^3+Ex^2+Fx)\cos\beta x)e^{2x}$.

(Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные).

Задание 7. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-7x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y.\end{cases}$$

Решение: Для описания некоторых процессов или явлений природы нередко требуется несколько функций. Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y), \end{cases} \tag{7.1}$$

в левой части которой стоят производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется нормальной системой дифференциальных уравнений. Решением системы называется совокупность функций, которые удовлетворяют каждому уравнению этой системы.

Нахождение решений системы может быть проведено так называемым *методом исключения* всех неизвестных функций, кроме одной, и сведения системы к дифференциальному уравнению высшего порядка относительно этой неизвестной функции. Найдя эту функцию, скажем $x(t)$, и, используя исходную систему, находим и остальные неизвестные функции.

Решим данную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Дифференцируем по t одно из уравнений системы. Например, первое:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Подставляя в полученное уравнение вместо $\dfrac{dy}{dt}$ ее значение из второго уравнения исходной системы, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5y. \tag{7.2}$$

Выразим из первого уравнения исходной системы y:

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x.$$

Подставим в уравнение (7.2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5(\frac{dx}{dt} + 7x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0. \tag{7.3}$$

Получено линейное однородное уравнение с одной неизвестной функцией второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $k^2 + 12k + 37 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -6 \pm i$. Тогда общее решение уравнения (7.3) имеет вид

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t). \tag{7.4}$$

Используя равенство (7.4) и первое уравнение системы, получаем:

$$y=\frac{dx}{dt}+7x=\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)'+7\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)=$$

$$=-6\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)'+\left(e^{-6t}(-C_1\sin t+C_2\cos t)\right)+$$

$$+7\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)'=e^{-6t}\left((C_1+C_2)\cos t+(C_2+C_1)\sin t\right).$$

Таким образом, решением системы будет

$$\begin{cases} x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t), \\ y=e^{-6t}\left((C_1+C_2)\cos t+(C_2+C_1)\sin t\right). \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t), \\ y=e^{-6t}\left((C_1+C_2)\cos t+(C_2+C_1)\sin t\right). \end{cases}$

Задание 8. Температура извлеченного из печи тела в течение 20 минут падает от $T_1^0=100^\circ C$ до $T_2^0=60^\circ C$. Температура воздуха равна $T_3^0=20^\circ C$. Через какое время с момента начала охлаждения температура тела снизится до $T^0=30^\circ C$?

Решение: По закону теплопроводности скорость охлаждения какого-либо тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. С изменением разности температур при охлаждении меняется и скорость охлаждения тела. Таким образом, этот процесс – неравномерный. Если $T(t)$ – функция, описывающая изменение температуры тела в зависимости от времени t, то скорость охлаждения тела равна производной этой функции по времени. Так как эта скорость пропорциональна разности температур, то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dT(t)}{dt}=-k\cdot\left(T(t)-T_0\right), \qquad (8.1)$$

которое описывает процесс охлаждения (T_0 – температура окружающей среды, k – коэффициент пропорциональности). Уравнение (8.1) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

В данном уравнении температура окружающей среды – температура воздуха – равна $T_3^0=20^\circ C$. Уравнение имеет вид $\frac{dT(t)}{dt}=-k\cdot\left(T(t)-20\right)$.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dT(t)}{T(t)-20}=-k\cdot dt \quad\Rightarrow\quad \ln\left(T(t)-20\right)=-kt+\ln C \quad\Rightarrow\quad T(t)-20=e^{-kt+\ln C} \quad\Rightarrow$$

$T(t)=Ce^{-kt}+20$ – общее решение уравнения (8.1).

Найдем произвольную постоянную C. В начальный момент времени $t=0$ – $T_1^0=100^\circ C$. Поэтому, $100=Ce^{-k\cdot 0}+20 \Rightarrow C=100-20 \Rightarrow C=80$. То есть частное решение уравнения (8.1) имеет вид

$$T(t)=80e^{-kt}+20. \qquad (8.2)$$

Найдем коэффициент пропорциональности k. Учитывая, что через время $t = 20$ минут температура тела падает от $T_1^0 = 100^\circ C$ до $T_2^0 = 60^\circ C$, получим:

$$T(20) = 80e^{-k\cdot 20} + 20 = 60 \Rightarrow e^{20k} = 2 \Rightarrow 20k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Подставляя найденный коэффициент k в уравнение (8.2) получаем функцию изменения температуры тела:

$$T(t) = 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} + 20 \Rightarrow T(t) = 80\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{20}} + 20 \Rightarrow$$

$$T(t) = 80\cdot 2^{-\frac{t}{20}} + 20. \qquad (8.3)$$

Чтобы решить задачу, необходимо из равенства полученной функции (8.3) температуре $T^0 = 30^\circ C$ найти время t:

$$T(t) = 30 \Rightarrow 80\cdot 2^{-\frac{t}{20}} + 20 = 30 \Rightarrow 2^{-\frac{t}{20}} = \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{t}{20} = -3 \Rightarrow t = 60\,мин.$$

Таким образом, тело охладится до температуры $T^0 = 30^\circ C$ через *1* час.

Ответ: Через *1* час.

Учебно-методическая литература по дисциплине "Высшая математика".

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1985 г., т. I, II.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика, ч.3-4, Минск, ВШ, 1984-1988 г.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1985 г.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1981, 1998.
6. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). М., Наука, 1981, 1989 г., ч. I–III.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко), Минск, ВШ, 1991, ч. 2–3.

Дополнительная литература

8. Гусак А.А. Высшая математика, т.1, 2. Минск, ВШ, 1988.0
9. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, ВШ, 1988.
10. Гусак А.А. Справочник по высшей математике. Минск, Навука і тэхніка, 1991, 1999.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1,2. – М.: ВШ, 1997.
12. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. Минск, 1988.
13. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ВШ,1983.
14. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Операционное исчисление. Теория вероятностей. Математическая статистика. Случайные процессы. – Мн.: ИРФ «Обозрение», 1997.
15. Бермант А.Ф., Адамович И.Г. Краткий курс математического анализа. - М.: Наука, 1973.

Содержание

Учебное издание

Составители: Санюкевич Александр Викторович
Мороз Людмила Трофимовна
Дворниченко Александр Валерьевич

Функции нескольких переменных
Интегральное исчисление функции одной переменной
Дифференциальные уравнения

Методические рекомендации и варианты
контрольных работ для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: А.В. Санюкевич
Редактор: Т.В. Строкач

Подписано к печати 1.09.2003 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага писчая. Усл. п. л. 2,79. Уч. изд. л. 3,0.
Заказ № 894. Тираж 150 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.