МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения
(первый курс, первый семестр)

Брест 2007

УДК 517.9
ББК 22.11

В соответствии с действующей программой для студентов-заочников 1 курса экономических специальностей составлены индивидуальные задания к контрольной работе и дано решение типового варианта. Подобраны задания к практическим занятиям и задания для самостоятельной работы студентов. Приведены основные теоретические сведения из курса высшей математики, рассмотрено достаточное количество примеров.

Составители: Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.,
Тузик Т.А., доцент

Рецензент: Рогозин С. В., доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, к.ф.-м.н.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой изучения курса высшей математики для студентов-заочников является *самостоятельная работа* с учебниками, учебными пособиями, сборниками ;ач и упражнений, справочниками. Список основных и наиболее доступных из них приводится в конце пособия.

Изучение любого раздела курса следует *начинать с конспекта установочных лекций,* соответствующих глав учебника, учебного пособия или руководства к решению задач, в которых имеется необходимая теория, приводятся расчетные формулы и решения задач по темам. После этого, по аналогии с решением типового варианта к контрольной работе, можно приступать к решению самой контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (шифра).

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями:

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Контрольную работу желательно выполнять в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. Условия всех задач нужно записывать полностью, а их решения располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
4. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.
5. В случае, если работа «не допущена к защите», студент в этой же тетради должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и представить ее на повторное рецензирование.

В случае необходимости студент может обращаться за консультациями к преподавателю кафедры, проверяющему контрольные работы в группе, лектору потока, либо к преподавателям, проводящим консультации студентов-заочников по графику, утвержденному на кафедре.

ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

I семестр

1. Определители 2, 3, n-го порядков, их свойства, вычисление.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (методом исключения).
4. Матрицы. Действия над ними.
5. Обратная матрица, ее нахождение.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным способом.
7. Векторы и линейные операции над ними.
8. Прямая на плоскости. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности, расстояние от точки до прямой.
9. Кривые второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола).
10. Предел функции и числовой последовательности. Односторонние пределы.
11. Свойства бесконечно малых функций.
12. Основные теоремы о пределах.
13. Первый и второй замечательные пределы.
14. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва, их классификация.
15. Свойства непрерывных на отрезке функций: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.
16. Определение производной, ее геометрический, механический и экономический смысл.
17. Производная суммы, произведения и частного дифференцируемых функций.
18. Производная сложной функции.
19. Производные основных элементарных функций.
20. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
21. Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях.
22. Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл второй производной.
23. Исследование возрастания и убывания функции с помощью производной.
24. Локальный экстремум функции одной переменной. Необходимое условие существования локального экстремума.
25. Достаточные условия существования локального экстремума.
26. Глобальные экстремумы непрерывной функции, заданной на отрезке.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задание 1. В таблице приведены данные по балансу за некоторый период между тремя отраслями промышленности.

Отрасли производства	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск	Заданный конечный продукт
	I	II	III			
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1	$\overline{y_1}$
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2	$\overline{y_2}$
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3	$\overline{y_3}$

Для расчета межотраслевого баланса по Леонтьеву составляется матричное уравнение вида $A \cdot X + Y = X$.

Требуется:

1. Записать матрицу $A = (a_{ij})_{3\times3}$ - матрицу коэффициентов прямых затрат; X – вектор объемов производства; У – вектор-столбец конечного продукта, соответствующий данному валовому выпуску X;
2. Найти матрицу полных затрат;
3. Рассчитать валовый выпуск $\overline{X}$, необходимый для обеспечения заданного конечного продукта $\overline{Y}$.

Необходимые числовые данные для каждого варианта приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_{11}	15	14	13	17	4	3	7	18	15	10	16	10	5	61	21
x_{12}	23	16	17	14	23	13	21	26	13	13	14	13	8	15	45
x_{13}	51	50	14	23	50	15	14	12	12	17	5	21	11	30	15
x_{21}	18	34	15	30	10	15	12	9	11	12	14	17	16	70	60
x_{22}	13	17	16	16	15	10	15	17	5	13	17	9	19	40	14
x_{23}	14	10	17	15	30	14	14	23	10	14	10	8	12	10	13
x_{31}	21	28	21	20	15	12	20	25	8	16	15	9	7	10	12
x_{32}	18	26	18	15	40	20	30	12	6	10	13	14	10	40	17
x_{33}	15	36	10	12	9	17	20	20	7	19	25	12	13	15	60
x_1	150	100	110	100	120	50	100	100	70	80	90	100	60	200	150
x_2	100	90	100	110	100	100	110	110	50	90	90	100	70	200	120
x_3	110	120	80	70	100	80	100	90	50	70	90	90	70	100	100
y_1	61	20	66	46	43	19	58	44	30	40	55	56	36	94	69
y_2	55	29	52	49	45	61	69	61	24	51	49	66	23	80	33
y_3	56	30	31	23	36	31	30	33	29	25	37	55	40	35	11
$\overline{y_1}$	65	25	70	50	50	20	60	50	35	50	60	60	40	100	70
$\overline{y_2}$	60	35	60	55	60	70	70	70	30	60	50	70	30	90	40
$\overline{y_3}$	60	40	40	30	40	40	35	40	35	30	40	60	45	40	20

Продолжение таблицы 1.

Вар	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_{11}	27	52	12	31	3	50	70	15	14	21	30	14	15	12	21
x_{12}	15	14	13	22	10	40	60	8	13	14	21	19	14	17	15
x_{13}	19	23	51	81	15	13	10	20	60	10	15	11	13	9	4
x_{21}	16	17	21	17	7	17	15	3	70	17	27	21	12	17	70
x_{22}	17	50	16	33	12	20	14	7	21	16	34	15	11	16	18
x_{23}	21	81	14	15	17	16	50	21	15	15	28	30	16	24	16
x_{31}	31	33	71	16	14	31	10	14	20	13	14	10	9	9	13
x_{32}	18	40	15	51	16	23	20	12	51	15	33	25	8	30	17
x_{33}	37	50	13	37	18	20	40	15	30	20	27	18	17	16	21
x_1	120	200	150	200	50	150	200	80	150	100	120	100	100	80	150
x_2	80	200	100	150	50	120	150	100	150	80	140	100	100	90	190
x_3	110	200	150	150	100	100	150	100	150	70	110	100	100	90	100
y_1	59	111	74	66	22	47	60	37	63	55	54	56	58	42	110
y_2	26	52	49	85	14	67	71	69	44	32	51	34	61	33	86
y_3	24	77	51	46	52	39	80	59	49	22	36	47	66	35	49
$\bar{y}_1$	65	120	80	70	25	50	65	40	70	60	60	60	60	45	120
$\bar{y}_2$	30	60	50	90	20	70	75	70	50	35	55	40	65	35	90
$\bar{y}_3$	35	80	60	50	60	40	85	60	55	30	40	50	70	40	50

Задание 2. Даны вершины треугольника ABC. Найти: а) уравнение стороны (AB); б) уравнение высоты (CH); в) уравнение медианы (AM); г) точку пересечения медианы (AM) и высоты (CH); д) расстояние от точки C до прямой (AB).

Вар.	1	2	3	4	5	6
A	(-7;-2)	(4;-4)	(-4;-2)	(0;2)	(4;-3)	(-4;2)
B	(3;-8)	(8;2)	(8;-6)	(4;-4)	(7;3)	(6;-4)
C	(-4;6)	(3;8)	(2;6)	(3;2)	(1;-16)	(4;10)

Вар.	7	8	9	10	11	12
A	(-3;-2)	(-2;4)	(1;7)	(1;0)	(4;-3)	(-5;2)
B	(14;4)	(3;1)	(-3;-1)	(-1;4)	(7;3)	(0;-4)
C	(6;8)	(10;7)	(11;-3)	(9;5)	(1;10)	(5;7)

Вар.	13	14	15	16	17	18
A	(-3;8)	(10;-2)	(2;5)	(1;-6)	(4;-4)	(6;-9)
B	(-6;2)	(4;-5)	(-3;1)	(3;4)	(6;2)	(10;-1)
C	(0;-5)	(-3;1)	(0;4)	(-3;3)	(-1;8)	(-4;1)

Вар.	19	20	21	22	23	24
A	(4;1)	(3;-1)	(5;7)	(4;-5)	(3;4)	(3;-8)
B	(-3;-1)	(11;3)	(0;-4)	(10;-2)	(-3;3)	(-4;6)
C	(7;-3)	(-6;2)	(-5;2)	(-3;1)	(1;-6)	(-7;2)

Вар.	25	26	27	28	29	30
A	(2;6)	(1;-16)	(10;7)	(1;10)	(11;-3)	(6;8)
B	(-4;-2)	(7;3)	(3;1)	(7;3)	(1;7)	(-3;2)
C	(8;-6)	(4;-3)	(-2;4)	(4;-3)	(-3;-1)	(14;4)

Задание 3. Найти пределы функций:

1.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+2}{7x^3-2x^2+4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$
2.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+1}{4x^3+7x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin x}{3x}$	б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$
3.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+6}{2x^4-x^3+x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$
4.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5}{7x^2+3x-4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2+3x+2}$
5.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+17x}{5x^3+3x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{2x^3}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{x^2+5x-6}$
6.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+3}{2x^2-5x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
7.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+5x^2-x}{x^4+5x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$	б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$
8.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+3}{2x^2+7x+3}$ в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi-2x}{1-\sin x}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}{2x^2-7x-4}$
9.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+5x+2}{3x^2+x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{x^3}$	б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-9x-5}$

10.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+10}{7x^3+5x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tgx}{1-\cos^2 x}$	б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-75}{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+22}}$
11.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+7}{2x^2+x+3}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+1}-1}$
12.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x+1}{2x^4+x^3+2x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x-\sin^2 x}{x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x+9}}{x}$
13.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+9}{2x^3-4x^2-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$
14.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x-3}{3x^2-x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$
15.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x+2}{3x^3-x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{2x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{8-x}-3}{\sqrt{x+5}-2}$
16.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x}{8-3x-9x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x}{tg2x}$	б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$
17.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x}{8-3x-9x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-tg2x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-3}-2}$
18.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-4x+5}{2-3x+4x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x-6}-3}{x^2-9}$

19.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+4x^2-2}{2x^4-5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{5x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-5x+6}$
20.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{1+5x+2x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2}$
21.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x}{x^3+4x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+4}-2}$
22.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x-5x^2+2x^4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\arcsin 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}$
23.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+3}{16x^3-7x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{27-x^3}$	б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x+7}-5}$
24.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-14x^2}{1+5x+7x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 4x}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{2-\sqrt{x}}$
25.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+3x^4}{2-x^2+5x^4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-x}{x^3-27}$
26.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+7}{3x^4-3x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x+\sin 5x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-5x^3}$
27.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x+3}{2-3x+2x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{x^4}$	б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{\sqrt{x+20}-4}$

28.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{5x^2-x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$
29.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x+3}{4+2x^2-x^3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{5x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
30.	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-2x^2-3x^5}{x^5+2x+8}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4-\sqrt{x+16}}$

<u>Задание 4.</u> Найти производную y' следующих функций:

1.	а) $y=\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{3}{x^7}-4x^6+\dfrac{4}{x}$ б) $y=(x^3+4x)\cdot tg^2 3x$	в) $y=\dfrac{7x^2+3x-4}{5x^3+4x^2+3}$
2.	а) $y=3x^6+\dfrac{5}{x}-\sqrt{x^7}+\dfrac{7}{x^4}$ б) $y=(x-2)^4\cdot\sin 6x$	в) $y=\dfrac{(x+1)^3}{x(2x+7)}$
3.	а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ б) $y=(2x-x^2)\cdot tg^4 x$	в) $y=\dfrac{(x^3+1)(x+4)}{8x^2+2x+1}$
4.	а) $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{6}{x}+3\cdot\sqrt{x}$ б) $y=(2x-x^2)\cdot tg^4 x$	в) $y=\dfrac{x^4+3x^3-2}{(x^2+4x+3)(x-1)}$
5.	а) $y=3x^4+\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{6}{x^3}$ б) $y=(x^2+3x)\cdot tg\sqrt{x}$	в) $y=\dfrac{(x+4)^2(4x+1)}{6x^3+7x+4}$

6.	а) $y=7\cdot\sqrt{x^5}-\frac{2}{x^5}-3x^4+\frac{6}{x}$ б) $y=\cos^3 5x-x\cdot\sin 3x$	в) $y=\frac{(5x+3)(4x+2)}{9x2-7x-3}$
7.	а) $y=\frac{4}{x}+\sqrt[5]{x^2}-3x^6+\frac{2}{x^4}$ б) $y=\cos 2x\cdot ctg(x^2)$	в) $y=\frac{3x^2-8x+5}{(x+1)(4x+5)}$
8.	а) $y=8x^2+\frac{6}{x^3}-\sqrt[6]{x^5}+\frac{5}{x}$ б) $y=(x^5-4x^4+3x^3-2x^2)\cdot\cos 7x$	в) $y=\frac{(x-8)(x+8)}{(x+2)^2}$
9.	а) $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x}$ б) $y=(x-7)^6\cdot ctg3x$	в) $y=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x+3)^2}$
10.	а) $y=3x^5-\frac{4}{x}+\sqrt{x^5}+\frac{10}{x^5}$ б) $y=(x+5)^3\cdot\sin^2 x$	в) $y=\frac{(x+1)(4x-1)}{(x-4)(x-1)}$
11.	а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+8\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ б) $y=(2x-1)^3\cdot(2-\sin x)$	в) $y=\frac{(6x-1)(x+2)}{(3x+1)^2}$
12.	а) $y=4x^4-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$ б) $y=(3x-9)^2\cdot\cos\sqrt{x}$	в) $y=\frac{(x-2)(x+6)}{(7x+1)^2}$
13.	а) $y=2\cdot\sqrt{x^3}+\frac{7}{x}-6x^2+\frac{2}{x^5}$ б) $y=(x^2-9x+7)\cdot\sin 7x$	в) $y=\frac{(x+4)^2(1-6x)}{(x+2)^2}$
14.	а) $y=6x^4-\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}+\frac{7}{x^2}$ б) $y=\sin 6x\cdot\cos^2 4x$	в) $y=\frac{(x+7)(x-3)}{x^2+4x+2}$

15.	а) $y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{x^4}$ б) $y=(x^2-3x+1)\cdot\ln(x-3)$	в) $y=\frac{(x+3)(x+5)}{x^2-5x+6}$
16.	а) $y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^7}+\frac{2}{x^6}$ б) $y=\ln(x+4)\cdot tg2x$	в) $y=\frac{(x-4)^2}{7x^2-6x+1}$
17.	а) $y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^5}-2x^6$ б) $y=\sqrt{x^2-1}\cdot\sin 6x$	в) $y=\frac{(x+7)(x-3)^2}{(x+2)(x-1)}$
18.	а) $y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$ б) $y=\sqrt[3]{6x+1}\cdot\cos^2 x$	в) $y=\frac{(x+3)^2(x+2)}{(x-2)(x-1)}$
19.	а) $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt{x^7}$ б) $y=(2x-5)^3\cdot tg^2x$	в) $y=\frac{(x-1)(x+2)}{3x^2-6x+8}$
20.	а) $y=8x^5-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[4]{x^5}$ б) $y=\sqrt{(x+1)^5}\cdot\ln(3x-1)$	в) $y=\frac{(x-7)(3x+2)}{(2x+1)(x-1)}$
21.	а) $y=\sqrt[4]{x^6}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^5}+3x^4$ б) $y=tg^3x\cdot\sin 2x$	в) $y=\frac{(x+4)(4x-1)}{6x^2+2x+7}$
22.	а) $y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{x^4}$ б) $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\cdot\sin 6x$	в) $y=\frac{(x+1)(6x-1)}{2x^2+x+1}$
23.	а) $y=7x^4+\frac{3}{x}-\sqrt[7]{x^4}+\frac{8}{x^6}$ б) $y=\sqrt{(3x+6)^3}\cdot ctg4x$	в) $y=\frac{(x+4)(x+2)}{4x^2-8x+1}$

24.	а) $y=\sqrt[6]{x^5}+\frac{4}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$ б) $y=\sin^3 4x\cdot\cos^2 x$	в) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(5x-3)}$
25.	а) $y=2x^2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{4}x^4+x$ б) $y=e^{2x}\cdot\cos 6x$	в) $y=\frac{(x-2)(2-6x)}{(x+8)(x+5)}$
26.	а) $y=9x^5+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^3}$ б) $y=(x^4+3x^2)\cdot\sin 3x$	в) $y=\frac{(x+1)^2}{(3x+1)(x-4)}$
27.	а) $y=8x-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}-\sqrt[7]{x}$ б) $y=(3x-4)^2\cdot tg3x$	в) $y=\frac{4x+7}{(6x+8)(6x+1)}$
28.	а) $y=3x^2-\frac{4}{x^2}+x\sqrt[6]{x^5}-\frac{4}{x}$ б) $y=tg\sqrt{x}\cdot\cos 8x$	в) $y=\frac{(2x+5)(x-4)}{3x^2+6x-7}$
29.	а) $y=5x^3+\frac{6}{x}-\sqrt[3]{x^8}+\frac{6}{x^2}$ б) $y=(2x+1)^3\cdot e^{4x+1}$	в) $y=\frac{3x^2+6x+5}{4x^2-7x+2}$
30.	а) $y=\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{x^6}+2\sqrt[6]{x^5}+\frac{6}{\sqrt{x}}$ б) $y=\sin^2 x-(4x+1)\cdot\cos 6x$	в) $y=\frac{x-3x^2}{(x+3)(4x-1)}$

Задание 5. Издержки, связанные с выпуском x единиц продукции, определяются функцией $C(x)=\ln(ax^2-bx+c)$. Найти изменение издержек при изменении объема выпуска x на величину Δx непосредственно и с помощью дифференциала

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	4	3	5	2	2	6	3	4	4
b	5	2	4	3	6	4	1	2	5	6
c	24	11	22	13	20	15	21	13	19	17
x	8	6	12	16	13	11	12	14	15	10
Δx	1	1	2	2	-1	-1	-2	-2	1	-1

Вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	7	2	2	5	5	4	3	2	1	6
b	3	2	1	8	7	6	5	4	3	2
c	25	19	27	21	32	10	26	34	12	24
x	14	20	9	10	8	13	14	15	11	20
Δx	2	-2	1	1	2	-1	-1	-2	1	-1

Вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	5	4	3	2	2	1	1	7	6	3
b	1	7	3	5	8	6	10	9	4	5
c	12	38	14	29	31	42	27	16	19	42
x	7	5	10	18	9	10	16	7	14	25
Δx	2	-2	1	1	2	2	-1	-1	-2	-2

Задание 6. Исследовать функцию на экстремум, точки перегиба и построить ее график.

1.	$y = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x - 1$	2.	$y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 3$
3.	$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$	4.	$y = x\ln^2 x$
5.	$y = (x+2)^3 - 3x + 1$	6.	$y = (x+2)^3 - 27x + 3$
7.	$y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$	8.	$y = (x-4)^3 - 27x + 30$
9.	$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$	10.	$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$
11.	$y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6$	12.	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$
13.	$y = (x-2)^3 - 12x - 1$	14.	$y = x^3 + x^2 - x + 6$
15.	$y = (x+1)^3 - 3x + 4$	16.	$y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
17.	$y = (x+2)^3 - 27x - 4$	18.	$y = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 2$
19.	$y = (x+3)^3 - 3x - 14$	20.	$y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 2$
21.	$y = \dfrac{e^x}{x}$	22.	$y = x^3 - 2x^2 + x - 5$
23.	$y = 3x^4 - 5x^3 + 2$	24.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 6$
25.	$y = (x-1)^3 - 12x + 15$	26.	$y = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 4$
27.	$y = 3x^3 - 6x + 7$	28.	$y = (x^2 - 2x)\ln x - 1{,}5x^2 + 4x$
29.	$y = (x-2)^3 - 3x - 14$	30.	$y = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$

Задание 7. Спрос D на малоценные товары в зависимости от величины дохода x потребителя характеризуется функцией Торнквиста

$$D = D(x) = \frac{\alpha \cdot x(x+\beta)}{x^2+\gamma}$$

Провести исследование и построить график функции $D = D(x)$.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	2	3	4	3	3	2	2	4	4	2
β	5	6	7	8	7	6	6	8	5	5
γ	12	9	2	10	3	11	8	4	7	6

Вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
α	2	3	3	4	3	4	4	2	3	4
β	4	3	2	7	9	8	6	4	5	7
γ	8	7	9	6	11	5	13	3	10	2

Вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	4	5	2	3	4	2	5	4	3	2
β	9	10	6	4	8	9	7	5	4	6
γ	7	9	8	15	6	3	4	10	12	5

Решение типового варианта контрольной работы

Задание 1. $x_{11}=5,\ x_{21}=11,\ x_{31}=20,\ x_1=100,\ x_{12}=35,\ x_{22}=9,$ $x_{32}=16,\ x_2=70,\ x_{13}=15,\ x_{23}=22,\ x_{33}=12,\ x_3=60,\ y_1=45,$ $y_2=30,\ y_3=12,\ \overline{y_1}=50,\ \overline{y_2}=30,\ \overline{y_3}=20.$

Запишем данные в таблицу

Отрасли произв.	Потребление			Конечный продукт, Y	Валовый выпуск, X	$\overline{Y}$
	I	II	III			
I	5	35	15	45	100	50
II	11	9	22	28	70	30
III	20	16	12	12	60	20

Матричное уравнение межотраслевого баланса имеет вид

$$AX+Y=X;\quad AX+Y=EX;\quad EX-AX=Y;\quad (E-A)\cdot X=Y \qquad (1)$$

1. Выпишем матрицы, входящие в уравнение (1)

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}100\\70\\60\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}45\\28\\12\end{pmatrix};$$

матрица А – структурная матрица межотраслевого баланса. Элементы матрицы А являются коэффициентами прямых затрат. Они определяются по формуле $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$.

В данном случае будем иметь

$$a_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=\frac{5}{100}=0{,}05;\quad a_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=\frac{35}{70}=0{,}50;\quad a_{13}=\frac{x_{13}}{x_3}=\frac{15}{60}=0{,}25;$$

$$a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{11}{100}=0{,}11;\quad a_{22}=\frac{x_{22}}{x_2}=\frac{9}{70}=0{,}13;\quad a_{23}=\frac{x_{23}}{x_3}=\frac{22}{60}=0{,}37;$$

$$a_{31}=\frac{x_{31}}{x_1}=\frac{20}{100}=0{,}20;\quad a_{32}=\frac{x_{32}}{x_2}=\frac{16}{70}=0{,}23;\quad a_{33}=\frac{x_{33}}{x_3}=\frac{12}{60}=0{,}20.$$

$$A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}37\\ 0{,}2 & 0{,}23 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

Матрица А продуктивна, т.к. все ее элементы положительны и сумма ее элементов по любому столбцу (любой строке) не превосходит единицы.

2. Решаем матричное уравнение (1)

$$X=(E-A)^{-1}\cdot Y \qquad (2)$$

Для матрицы Е – А составляем обратную.

Матрица $S=(E-A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}37\\ 0{,}2 & 0{,}23 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}95 & -0{,}5 & -0{,}25\\ -0{,}11 & 0{,}87 & -0{,}37\\ -0{,}2 & -0{,}23 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

$$\det(E-A)=\Delta(E-A)=\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}5 & -0{,}25\\ -0{,}11 & 0{,}87 & -0{,}37\\ -0{,}2 & -0{,}23 & 0{,}8\end{vmatrix}=0{,}95\cdot\begin{vmatrix}0{,}87 & -0{,}37\\ -0{,}23 & 0{,}8\end{vmatrix}+$$

$$+0{,}5\cdot\begin{vmatrix}-0{,}11 & -0{,}37\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}-0{,}25\cdot\begin{vmatrix}-0{,}11 & 0{,}87\\ -0{,}2 & -0{,}23\end{vmatrix}=0{,}95\cdot(0{,}87\cdot 0{,}8-0{,}37\cdot 0{,}23)+$$

$$+0{,}5(-0{,}11\cdot 0{,}8-0{,}37\cdot 0{,}2)-0{,}25(0{,}11\cdot 0{,}23+0{,}2\cdot 0{,}87)=0{,}95(0{,}696-0{,}0851)-$$

$$-0{,}5(0{,}88+0{,}74)-0{,}25(0{,}0253+0{,}174)=0{,}58-0{,}081-0{,}05=0{,}45.$$

Так как $\det(E-A)\neq 0$, то обратная матрица существует и единственна.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы Е – А:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0{,}87 & -0{,}37\\ -0{,}23 & 0{,}8\end{vmatrix}=0{,}61;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-0{,}5 & -0{,}25\\ -0{,}23 & 0{,}8\end{vmatrix}=0{,}34;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-0{,}5 & -0{,}25\\ 0{,}87 & -0{,}37\end{vmatrix}=0{,}40.$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-0{,}11 & -0{,}37\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}=0{,}16;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}25\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{vmatrix}=0{,}71;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}25\\ -0{,}11 & -0{,}37\end{vmatrix}=0{,}38.$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-0{,}11 & 0{,}87\\ -0{,}2 & -0{,}23\end{vmatrix}=0{,}20;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}5\\ -0{,}2 & -0{,}23\end{vmatrix}=0{,}32;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0{,}95 & -0{,}5\\ -0{,}11 & 0{,}87\end{vmatrix}=0{,}77.$$

Матрица полных затрат имеет вид

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}45}\begin{pmatrix}0{,}61 & 0{,}34 & 0{,}40\\ 0{,}16 & 0{,}71 & 0{,}38\\ 0{,}20 & 0{,}32 & 0{,}77\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}36 & 0{,}76 & 0{,}89\\ 0{,}36 & 1{,}58 & 0{,}84\\ 0{,}44 & 0{,}71 & 1{,}71\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что например, для выпуска единицы продукции отраслями I, II, III необходимо затратить продукции отрасли III соответственно 0,44; 0,71 и 1,71 единиц.

3. Для заданного конечного продукта $\overline{Y}$ рассчитаем соответствующий валовой выпуск $\overline{X}$ по формуле (2):

$$\overline{X}=(E-A)^{-1}\overline{Y}=\begin{pmatrix}1{,}36 & 0{,}76 & 0{,}89\\ 0{,}36 & 1{,}58 & 0{,}84\\ 0{,}44 & 0{,}71 & 1{,}71\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}50\\ 30\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}36\cdot 50+0{,}76\cdot 30+0{,}89\cdot 20\\ 0{,}36\cdot 50+1{,}58\cdot 30+0{,}84\cdot 20\\ 0{,}44\cdot 50+0{,}71\cdot 30+1{,}71\cdot 20\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}68+22{,}8+17{,}8\\ 18+47{,}4+16{,}8\\ 22+21{,}3+34{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}108{,}6\\ 82{,}2\\ 77{,}5\end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора Y конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: в отрасли I на 8,6%; в отрасли II – на 17,43%, в отрасли III – на

$\dfrac{77{,}5-60}{60}\cdot 100\%=29{,}17\%$ по сравнению с исходными данными.

Задание 2. Даны вершины треугольника A (1; 7), B (3; 4) и C (-2; -3). Найти: а) уравнение стороны (AB); б) уравнение высоты (CH); в) уравнение медианы (AM); г) точку пересечения медианы (AM) и высоты (CH); д) расстояние от точки C до прямой (AB).

Сделаем схематический рисунок треугольника ABC.

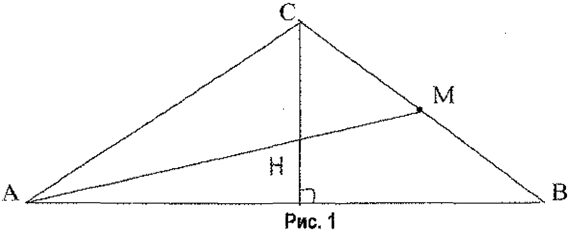


Рис. 1

а) Уравнение стороны (АВ) запишем по формуле $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$.

$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-7}{4-7}$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{-3}$; $-3(x-1)=2(y-7)$; $-3x+3=2y-14$.

Общее уравнение прямой (АВ): $3x+2y-17=0$.

б) Угловой коэффициент прямой (АВ) определим из ее уравнения, записав его в виде $y=kx+b$, т.е. $2y=-3x+17$; $y=-\frac{3}{2}x+\frac{17}{2}\Rightarrow k_{AB}=-\frac{3}{2}$.

Тогда угловой коэффициент прямой $(CH)\perp(AB)$ определим из условия $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1$, $k_{CH}=\frac{2}{3}$.

Уравнение прямой (СН): $y-y_C=k_{CH}(x-x_C)$; $y+3=\frac{2}{3}(x+2)$;

$3y+9=2x+4$.

Общее уравнение высоты (СН): $2x-3y-5=0$.

в) Находим координаты точки М – середины отрезка [СВ]

$x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$; $y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$; $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Уравнение медианы (АМ): $\frac{x-x_A}{x_M-x_A}=\frac{y-y_A}{y_M-y_A}$;

$\frac{x-1}{0{,}5-1}=\frac{y-7}{0{,}5-7}$; $\frac{x-1}{-0{,}5}=\frac{y-7}{-0{,}5}$; $13(x-1)=y-7$;

Общее уравнение медианы (АМ): $13x-y-6=0$.

г) Точку пересечения медианы (АМ) и высоты (СН) получим, решив систему из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases}2x-3y-5=0,\\13x-y-6=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3(13x-6)-5=0,\\y=13x-6.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-37x+13=0,\\y=13x-6.\end{cases}$$

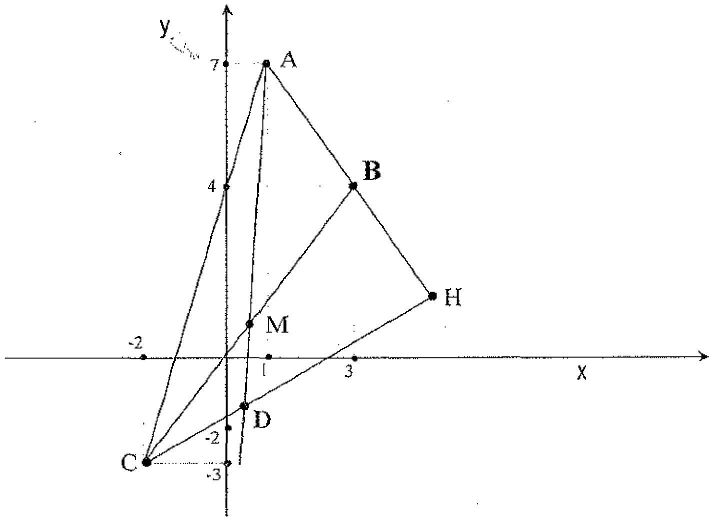
$x=\frac{13}{37}$; $y=\frac{13\cdot13}{37}-6=\frac{169-222}{37}=-\frac{53}{37}$, $D\left(\frac{13}{37};-\frac{53}{37}\right)$ *или* $D(0{,}35;-1{,}43)$.

д) Расстояние от точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Расстояние от точки С (-2;-3) до прямой (АВ) $3x+2y-17=0$

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+2\cdot(-3)-17|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|-6-6-17|}{\sqrt{13}}=\frac{29}{\sqrt{13}}=8{,}03.$$

Построим в системе координат ΔABC, прямые (CH), (AM), т. D.



Задание 3. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 2x + 3}$.

При $x \to \infty$ числитель и знаменатель неограниченно возрастают, получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь делением числителя и знаменателя на старшую степень многочленов в числителе и знаменателе, т.е. на x^2. Получим

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{3 - 0 + 0}{4 + 0 + 0} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

б) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-5}}{x^2 + 49}$.

При $x \to 7$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, надо сократить на множитель, стремящийся к нулю, т.е. на $(x - 7)$. В знаменателе раскладываем на множители, а в числителе избавимся от иррациональности умножением на сопряженное выражение

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-5}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-5})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-5})}{(x^2-49)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-5})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x+2-2x+5}{(x^2-49)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-5})}=\lim_{x\to 7}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-5})}=$$

$$=\frac{-1}{(7+7)(\sqrt{7+2}+\sqrt{14-5})}=\frac{-1}{14\cdot 6}=\frac{-1}{84}=-0{,}012.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 6x-\cos^2 4x}{8x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Для раскрытия неопределенности в случае наличия тригонометрической функции используем первый замечательный предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 6x-\cos^2 4x}{8x^2}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 6x-\cos 4x)(\cos 6x+\cos 4x)}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}(\cos 6x+\cos 4x)=$$

$$=\frac{2}{8}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{6x+4x}{2}\cdot\sin\frac{6x-4x}{2}}{x^2}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\sin x}{x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 1=-\frac{5}{2}=-2{,}5.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,6x}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,6x}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,6x}{x}=$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,6x}{x}=\left|\begin{array}{c} arctg\,6x=y\\ 6x=tg\,y\\ x\to 0,\ mo\,u\ \ y\to 0\end{array}\right|=\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot 6}{tg\,y}=$$

$$=\frac{6}{4}\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\cos y}{\sin y}=\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1=1{,}5.$$

Задание 4. При нахождении производной заданных функций следует пользоваться таблицей производных основных элементарных функций, правилами дифференцирования и теоремой о дифференцировании сложной функции. Приведем некоторые формулы:

1. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$,	5. $(\sin x)'=\cos x$,	8. $(ctg\ x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
2. $(a^x)'=a^x\ln a$,	6. $(\cos x)'=-\sin x$,	9. $(\arcsin\ x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. $(e^x)'=e^x$,	7. $(tg\ x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,	10. $(arctg\ x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,		

Правила дифференцирования:

1. $(C)'=0, \qquad C-\forall const,$
2. $(C\,u(x))'=C\cdot u'(x),$
3. $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x),$
4. $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x),$
5. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x)\neq 0.$

Если $y=f[\varphi(x)]$, т.е. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ - сложная функция, то $y'_x=f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

Примеры. Найти y':

а) $y=\sqrt[4]{x^9}+\dfrac{8}{x}-5x^7+\dfrac{10}{x^6}$;

$$y'=\left(x^{9/4}+8\cdot x^{-1}-5x^7+10x^{-6}\right)'=\left(x^{9/4}\right)'+8(x^{-1})'-5(x^7)'+10\cdot(x^{-6})'=$$

$$=\frac{9}{4}x^{5/4}-8x^{-2}-35x^6-60x^{-7}=2{,}25x\cdot\sqrt[4]{x}-\frac{8}{x^2}-35x^6-\frac{60}{x^7}.$$

б) $y=(x^3-4x^2+6)\cdot\sin 7x;$

$$y'=(x^3-4x^2+6)'\cdot\sin 7x+(x^3-4x^2+6)\cdot(\sin 7x)'=(3x^2-8x)\cdot\sin 7x+$$
$$+7(x^3-4x^2+6)\cos 7x.$$

в) $y=\dfrac{3x^2+4x+7}{(2x+3)(3x-1)}=\dfrac{3x^2+4x+7}{6x^2+7x-3};$

$$y'=\frac{(3x^2+4x+7)'(6x^2+7x-3)-(3x^2+4x+7)(6x^2+7x-3)'}{(6x^2+7x-3)^2}=$$

$$=\frac{(6x+4)(6x^2+7x-3)-(3x^2+4x+7)(12x+7)}{(6x^2+7x-3)^2}=$$

$$=\frac{36x^3+42x^2-18x+24x^2+28x-12-36x^3-21x^2-48x^2-28x-84x-49}{(6x^2+7x-3)^2}=$$

$$=\frac{-3x^2-102x-61}{(2x+3)^2(3x-1)^2}.$$

г) $y = \ln(x+4) \cdot tg2x$;

$$y' = (\ln(x+4))' \cdot tg2x + \ln(x+4) \cdot (tg2x)' = \frac{1}{x+4} \cdot tg2x + \ln(x+4) \cdot \frac{2}{\cos^2 2x} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{(x+4)\cos 2x} + \frac{2\ln(x+4)}{\cos^2 2x} = \frac{0{,}5\sin 4x + 2(x+4)\ln(x+4)}{(x+4)\cos^2 2x}.$$

д) $y = \cos 3x \cdot ctg(x^4)$;

$$y' = (\cos 3x)' \cdot ctg(x^4) + \cos 3x \cdot (ctg(x^4))' = -3\sin 3x \cdot ctg\, x^4 - 4x^3 \times$$

$$\times \cos 3x \frac{1}{\sin^2 x^4}.$$

Задание 5. Пусть $a = 5,\ b = 4,\ c = 19,\ x = 12,\ \Delta x = 2,$

$C(x) = \ln(5x^2 - 4x + 19).$

При переходе от $x = 12$ к значению $x + \Delta x = 12 + 2 = 14$ функция $C(x)$ получит приращение, равное $\Delta C(x) = C(x + \Delta x) - C(x)$.

Изменение издержек определится величиной

$$\Delta C = C(14) - C(12) = \ln(5 \cdot 14^2 - 4 \cdot 14 + 19) - \ln(5 \cdot 12^2 - 4 \cdot 12 + 19) =$$

$$= \ln\frac{5 \cdot 196 - 56 + 19}{5 \cdot 144 - 48 + 19} = \ln\frac{943}{691} = \ln 1{,}365 = 0{,}3109.$$

При увеличении объема выпуска с 12 ед. до 14 ед. издержки увеличатся на 0,3109. Дифференциал функции $C(x)$ в точке x численно равен

$dC = C'(x) \cdot \Delta x.$

Находим производную функции $C(x)$

$$C'(x) = \frac{10x - 4}{5x^2 - 4x + 19}.$$

Тогда $dC(12) = C'(12) \cdot (14 - 12) = \dfrac{10 \cdot 12 - 4}{5 \cdot 12^2 - 4 \cdot 12 + 19} \cdot 2 = \dfrac{120 - 4}{691} \cdot 2 = 0{,}336.$

При малых приращениях Δx получаем приближенное равенство $\Delta C \approx dC$.

$\Delta C(12) = 0{,}31;\quad dC(12) = 0{,}34.$

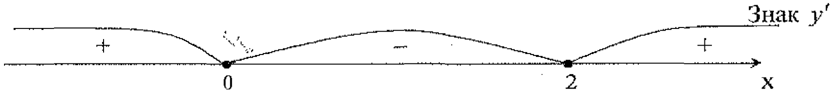
Задание 6. Исследуем функцию $y = (x-1)^3 - 3x + 4$ на экстремум, выпуклость, вогнутость, точки перегиба и построим график.

Областью определения функции является вся числовая ось: $D(y) = R$. Находим первую производную y' и приравниваем ее нулю.

$$y' = 3(x-1)^2 - 3,\quad 3(x-1)^2 - 3 = 0,\quad (x-1)^2 = 1,\quad x - 1 = \pm 1,$$

$$x = 1 \pm 1,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 2.$$

Отметим знак производной на интервалах $(-\infty; 0)$; $(0; 2)$; $(2; +\infty)$:



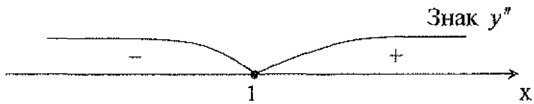
$y'(-1) = 3\cdot(-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9 > 0;$ $\quad y'(1) = -3 < 0;$

$y'(3) = 3\cdot 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9 > 0.$

Значит, на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, а на интервале (0; 2) – убывает. $x = 0$ - точка максимума, $x = 2$ - точка минимума, $y_{\min}(2) = (2-1)^3 = 3\cdot 2 + 4 = 1 - 6 + 4 = -1$, $y_{\max}(0) = (-1)^3 + 4 = 3$.

Для исследования графика функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба находим вторую производную функции y''.

$y'' = 6(x-1)$, $\quad y'' = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$.



$y'' > 0$, если $x > 1$, значит график функции на интервале $(1; \infty)$ вогнутый.

$y'' < 0$, если $x < 1$, значит график функции на этом интервале выпуклый.

$x = 1$, $y = 0 - 3 + 4 = 1$. Точка (1; 1) – точка перегиба графика функции.

Строим график.

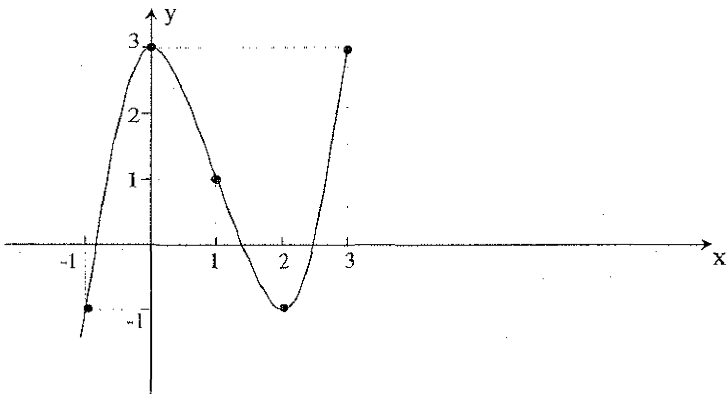


Рис.3

Задание 7. $D = D(x) = \dfrac{3x(x+6)}{x^2+11}$, $\alpha = 3$, $\beta = 6$, $\gamma = 11$.

1. Область определения: $x \geq 0$, т.к. по смыслу $D(x) \geq 0$.
2. Точка (0; 0) принадлежит графику $D = D(x)$.
3. Находим производную D'.

$$D'(x) = 3\left(\frac{x^2+6x}{x^2+11}\right)' = 3\frac{(2x+6)(x^2+11)-(x^2+6x)\cdot 2x}{(x^2+11)^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{2x^3+22x+6x^2+66-2x^3-12x^2}{(x^2+11)^2} = 3\cdot\frac{-6x^2+22x+66}{(x^2+11)^2} =$$

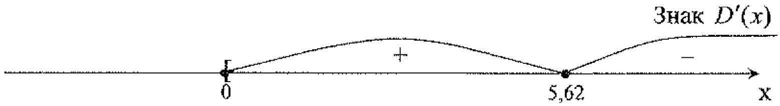
$$= -6\cdot\frac{3x^2-11x-33}{(x^2+11)^2}.$$

4. Приравниваем производную нулю

$$D'(x) = 0, \quad -6\cdot\frac{3x^2-11x-33}{(x^2+11)^2} = 0, \quad 3x^2-11x-33 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121+12\cdot 33}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{517}}{6} = \frac{11 \pm 22{,}74}{6};$$

$$x > 0, \quad x_1 = \frac{11+22{,}74}{6} = 5{,}62.$$



$$D'(1) = (-6)\cdot\frac{3-11-33}{(1+11)^2} = 1{,}71 > 0; \quad D'(6) = (-6)\cdot\frac{108-66-33}{47^2} = -\frac{54}{47^2} < 0.$$

На промежутке [0; 5,62) функция $D = D(x)$ возрастает, а на промежутке (5,62; $+\infty$) – убывает.

Точка $x_1 = 5{,}62$ - точка локального максимума, т.к. в окрестности этой точки производная $D'(x)$ меняет знак с плюса на минус.

Найдем максимальное значение функции D(x).

$$D_{\max}(x_1) = 3\frac{x_1^2+6x_1}{x_1^2+11} = 3\frac{5{,}62^2+6\cdot 5{,}62}{5{,}62^2+11} = 4{,}60.$$

5. Вертикальных асимптот у графика $D = D(x)$ нет. Ищем наклонные асимптоты в виде $D = k \cdot x + b$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{D(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x(x+6)}{x(x^2+11)} = 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{x+6}{x^2+11} = 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{11}{x^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(D(x) - k \cdot x\right) = \lim_{x \to +\infty} D(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3(x^2+6x)}{x^2+11} = 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{6}{x}}{1 + \frac{11}{x^2}} = 3.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ прямая D = 3 – горизонтальная асимптота.

6. Строим график $y = D(x)$

x	7	8	9	12	30	40
D (x)	4,55	4,48	4,40	4,18	3,55	3,43

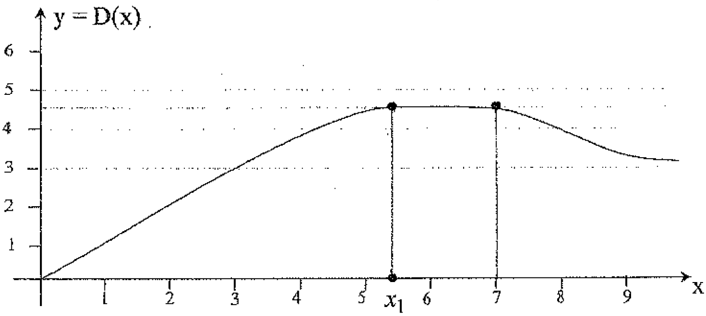


Рис. 4

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ДЛЯ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

Занятие 1. Вычисление определителей. Матрицы, действия над матрицами. Решение систем линейных алгебраических уравнений

1. Вычисление определителей. Теоретические сведения

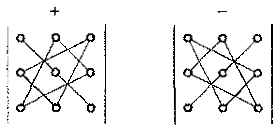
Определителем матрицы второго порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Правило вычисления определителя третьего порядка называется *правилом треугольников (правилом Саррюса)*. Схематически запись этого правила приведена ниже:



Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} *определителя n-го порядка* называется определитель (*n-1*)-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} *определителя n-го порядка* называется минор этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Свойства определителей:

1. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}, i = 1,2,3, \qquad (1)$$

где A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} - алгебраические дополнения строк.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}, j = 1,2,3; \qquad (2)$$

где A_{1j}, A_{2j}, A_{3j} - алгебраические дополнения столбцов.

Равенство (1) называется разложением определителя по элементам i-й строки; равенство (2) называется разложением определителя по элементам j-го столбца.

2. Если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Если в определителе поменять две строки (два столбца) местами, то определитель поменяет знак.

4. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца) равен нулю.

5. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Аудиторные задания

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Индивидуальные задания

5. Вычислить определитель

а) разложив его по элементам i-ой строки;

б) получив предварительно нули в i-ом столбце.

5.1	5.2	5.3	5.4
$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$,	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,
$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=1$

Решение типового варианта

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$, если $i=2$.

Решение.

а) По первому свойству определителей получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{21} + (-2)\cdot A_{22} + 1\cdot A_{23} = 3\cdot(-1)^{2+1}M_{21} + (-2)\cdot(-1)^{2+2}M_{22} + 1\cdot(-1)^{2+3}M_{23} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3(56-12) - 2(7+3) - (4+8) = -132 - 20 - 12 = -164.$$

б) Получим нули во втором столбце, последовательно умножим вторую строку на 4 и сложим ее с первой, потом умножим вторую строку на 2 и сложим с третьей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -2\cdot A_{22} = -2\cdot(-1)^{2+2}M_{22} = -2\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -2(13\cdot 9 - 7\cdot 5) = -2\cdot 82 = -164$$

2. Матрицы, действия над матрицами.
Теоретические сведения

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размерности $m \times n$ и записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы a_{ij} называются элементами матрицы, индекс i обозначает номер строки, j – номер столбца в котором стоит элемент.

Матрицы называются *равными*, если они одинаковой размерности и все их соответствующие элементы равны. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*.

Основные операции над матрицами.

1. *Сложение и вычитание матриц. Суммой (разностью)* матриц одинаковой размерности A и B, обозначаемой A+B (A-B), называется матрица C, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij}-соответственно элементы матриц A и B.

2. *Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число* λ называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} элементы матрицы A, т. е. при умножении матрицы на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

3. *Умножение матриц.* Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p} = A \cdot B$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B. Число строк матрицы произведения равно числу строк матрицы A, а число столбцов равно числу столбцов матрицы B.

4. *Транспонирование матриц. Транспонированной матрицей* A^T называется матрица, полученная из матрицы A заменой ее строк столбцами с теми же номерами.

Аудиторные задания

1. Найти матрицу **А-3В**, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц **АВ** и **ВА**, если

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Найти матрицу A^T, транспонированную данной, если

1) $A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 3\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix}$.

Индивидуальные задания

Найти произведение матриц.

4.1 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ BA-?	4.2 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ BA-?
4.3 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -8 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 11 & 7\end{bmatrix}$ AB-?	4.4 $A=\begin{bmatrix}1 & 9 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -8 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 11 & 7\end{bmatrix}$ AB-?

Решение типового варианта

Найти произведение матриц AB и BA, если

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Решение.

а) Так как сомножители имеют размеры 2×3 и 3×2, то их произведение определено и имеет размеры 2×2: $A_{2\times3}\cdot B_{3\times2}=C_{2\times2}$:

$$C_{2\times2}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+3\cdot(-2)+5\cdot3 & 1\cdot4+3\cdot5+5\cdot(-1)\\ 2\cdot1+(-1)\cdot(-2)+0\cdot3 & 2\cdot4+(-1)\cdot5+0\cdot(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1-6+15 & 4+15-5\\ 2+2+0 & 8-5+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

б) $B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}=D_{3\times3}$,

$$D_{3\times3}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot3+4\cdot(-1) & 1\cdot5+4\cdot0\\ -2\cdot1+5\cdot2 & -2\cdot3+5\cdot(-1) & -2\cdot5+5\cdot0\\ 3\cdot1+(-1)\cdot2 & 3\cdot3+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot5+(-1)\cdot0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1+8 & 3-4 & 5+0\\ -2+10 & -6-5 & -10+0\\ 3-2 & 9+1 & 15+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1 & 5\\ 8 & -11 & -10\\ 1 & 10 & 15\end{bmatrix}.$$

3. Решение линейных алгебраических систем

Теоретические сведения

Понятие обратной матрицы A^{-1} вводится только для квадратных невырожденных матриц $A(\det A \neq 0)$. Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной невырожденной матрицы А, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Известно, что для A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица A^* называется присоединенной матрицей, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} транспонированной матрицы A^T.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

1) перестановка строк местами;
2) умножение каждого элемента строки на один и тот же множитель $\lambda \neq 0$;
3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на один и тот же множитель.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц А и В обозначается $A \sim B$. Любую матрицу при помощи элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Рангом матрицы называется число не нулевых строк ступенчатой матрицы.

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3)$$

где числа $a_{ij}\,(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \ldots, b_m$ - *свободными членами. Решением системы (3)* называется совокупность n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая при подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных каждое из уравнений обращает в тождество.

Если система (3) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, называется основной матрицей системы (1). Матрица

$$A\,|\,B=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

называется *расширенной матрицей* системы (1).

Теорема (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть $r(A)=r(A\,|\,B)=r$. Причем, если ранг равен числу неизвестных $(r=n)$, то система (1) имеет единственное решение; если $r<n$, то система (1) имеет бесконечное множество решений, которые зависят от $(n-r)$ параметров. Если $r(A)\neq r(A\,|\,B)$, то система решений не имеет.

Рассмотрим три метода решения систем линейных алгебраических уравнений.

Метод Гаусса. Метод Гаусса состоит в следующем:

1. Составляется расширенная матрица системы.
2. С помощью элементарных преобразований расширенная матрица приводится к ступенчатому виду.
3. Решается вопрос о совместности системы, и если система совместна, то о количестве решений.
4. Если система имеет единственное решение, то по ступенчатой матрице составляется эквивалентная система уравнений и находится решение, начиная с последней переменной.
5. Если система имеет бесконечное множество решений, то базисные переменные выражаются через свободные переменные и записывается общее решение.

Матричный метод. Матричный метод для решения неоднородных систем используется, если число уравнений системы равно числу неизвестных $(m=n)$. Рассмотрим этот метод на примере решения системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) можно записать в матричной форме: $AX=B$, где матрица А – основная матрица системы, В – матрица-столбец свободных членов, Х – матрица-столбец переменных, т. е.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix};X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Если матрица A невырожденная, тогда $X = A^{-1}B$.

Формулы Крамера. Если матрица А для системы (1) невырожденная, то для вычисления неизвестных x_1, x_2, x_3 верны формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы A, $\Delta_i (i = \overline{1,3})$ - определители, которые получаются из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов исходной системы.

Аудиторные задания

1. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера, матричным методом и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = \quad -6, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 16; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$ 7)

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

Индивидуальные задания

1. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице А

1.1	1.2	1.3	1.4
$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее:

2.1	2.2
$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=3,\\ x_1+x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}5x_1-6x_2+4x_3=0,\\ 3x_1-3x_2+x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3=0;\end{cases}$	$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=12,\\ x_1+2x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+x_2+2x_3=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\ 2x_1-4x_2+x_3=0,\\ 3x_1-2x_2-4x_3=0;\end{cases}$
2.3	**2.4**
$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+3x_2-x_3=11,\\ x_1-2x_2+2x_3=-7;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 3x_1-2x_2+5x_3=0;\end{cases}$	$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=12,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=6,\\ 2x_1-x_2-x_3=-9;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=0,\\ 5x_1+x_2+2x_3=0,\\ 4x_1-x_2-2x_3=0;\end{cases}$

Решение типового варианта

1. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице А, если

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&4\end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы и алгебраические дополнения:

$$A=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\0&-3&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-3&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1=1;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=8-9=-1;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-(8-9)=1;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\2&3\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-(8-9)=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&4\end{vmatrix}=4-9=-5;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix}=-(3-6)=3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}=-(3-6)=3;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=2-4=-2.$$

С учетом полученных результатов составляем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-5&3\\0&3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-5&3\\0&3&-2\end{bmatrix}.$$

3. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3=-7;\\ 3x_1+2x_2-x_3=-1;\\ -2x_1-x_2+5x_3=9.\end{cases}$$

а) С помощью элементарных преобразований найдем ранг основной матрицы системы и расширенной: Для этого приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -7 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 9 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 10 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Значит ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен числу переменных, то есть $r_A=r_{A|B}=n=3$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли исходная система имеет единственное решение. Решим систему методом Гаусса. По ступенчатой матрице составим систему уравнений эквивалентную данной.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=-7; \\ \quad x_2+10x_3=19; \\ \qquad x_3=2. \end{cases}$$

Из системы находим переменные: $x_3=2, x_2=-1, x_1=1$.

б) Метод обратной матрицы.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1}. Вычислим определитель матрицы

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Найдем присоединенную матрицу:

$A^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, тогда присоединенная матрица имеет вид

$$A^*=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -13 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Значит $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -13 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -13 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Находим столбец переменных:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ -13 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63+1+63 \\ 91-2-90 \\ -7+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

в) Формулы Крамера.

$$\Delta = \det A = 1;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -4 \\ 13 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -19 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 25 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -19 & 3 \\ 25 & -4 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

4. Проверить совместность однородной системы и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Приведем основную матрицу системы к ступенчатому виду

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -17 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы равен двум ($r = 2$), значит система имеет бесконечное множество решений, зависящее от одного параметра ($n - r = 3 - 2 = 1$). Выберем в качестве базисных переменных - переменные x_1, x_2, а в качестве свободной – переменную x_3. Выразим переменные x_1, x_2 через x_3.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -x_3, \\ 7x_2 = 17x_3, \end{cases} \begin{cases} 3x_1 = -x_3 + \dfrac{34}{7}x_3, \\ x_2 = \dfrac{17}{7}x_3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{7}x_3, \\ x_2 = \dfrac{17}{7}x_3. \end{cases}$$

Запишем ответ: $\left(\frac{9}{7}x_3; \frac{17}{7}x_3; x_3\right), x_3 \in R.$

Занятие 2. Линейные операции над векторами. Прямая на плоскости
1. Линейные операции над векторами.
Теоретические сведения

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overline{AB}$ (или одной буквой $\overline{a}$, $\overline{b}$,...). Длина отрезка AB называется *длиной*, или *модулем* вектора $\overline{AB}$, и обозначается $|\overline{AB}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Условие коллинеарности двух векторов $\overline{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ и $\overline{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$ записывается в виде

$$\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}.$$

К линейным операциям над векторами относятся:

1. *Умножение вектора на число. Произведением вектора $\overline{a}\neq 0$ на число $\lambda\neq 0$* называется вектор $\lambda\overline{a}$, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$.

2. *Сложение векторов. Суммой* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ с концом вектора $\overline{b}$, отложенного от конца вектора $\overline{a}$. Обозначается $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма».

3. *Вычитание векторов. Разностью двух векторов $\overline{a}$* и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, который нужно сложить с вектором $\overline{b}$, чтобы получить $\overline{a}$.

Пусть даны два вектора $\overline{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\overline{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$. Тогда:

1. $\overline{a}\pm\overline{b}=(x_a\pm x_b;\ y_a\pm\ y_b;\ z_a\pm z_b)$;
2. $\lambda\overline{a}=(\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a)$;
3. $|\overline{a}|=\sqrt{x_a^2+\ y_a^2+\ z_a^2}$.

Если начало и конец вектора в прямоугольной системе координат заданы координатами $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, тогда вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $\overline{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, тогда длина вектора $\overline{AB}$ вычисляется по формуле $|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a}=(x_a,y_a,z_a)$, $\overline{b}=(x_b,y_b,z_b)$, то скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется формулой

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b.$$

Тогда косинус угла между двумя векторами вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|},\ \text{т.е.}\ \cos\varphi=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+\ y_a^2+\ z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+\ y_b^2+\ z_b^2}}.$$

Аудиторные задания

1. Найти длину вектора $\vec{a}=(2;3;-6)$.

2. Определить длины сторон параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $\vec{c}=(2;-1;3)$ и $\vec{d}=(1;2;-1)$.

3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(3;4;7)$ и $\vec{b}=(2;-3;2)$.

4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, а угол между ними $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

5. Найти угол между векторами $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(6;4;-2)$.

Индивидуальные задания

По координатам точек А, В, С для указанных векторов найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$;

б) скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

в) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вариант	1	2	3	4
A	(2;-3;0)	(2;2;7)	(3;-3;1)	(1;4;-1)
B	(1;1;-4)	(0;1;6)	(5;1;-2)	(-2;4;-5)
C	(3;-2;0)	(-2;5;7)	(4;1;-3)	(8;4;0)
$\vec{a}$	$\overline{AB}+\overline{AC}$	$\overline{AB}-3\overline{BC}$	$\overline{AB}+2\overline{AC}$	$2\overline{AB}+\overline{AC}$
$\vec{b}$	$\overline{BC}-2\overline{AC}$	$2\overline{AB}+\overline{AC}$	$4\overline{AC}-\overline{BC}$	$\overline{AB}-3\overline{BC}$

Решение типового варианта

A(-1;2;-3); B(3;4;-6); C(1;1;-1); $\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$, зная, что, для того чтобы найти координаты вектора, надо от координат конца отнять координаты начала, то есть $x_{AB}=x_B-x_A$; $y_{AB}=y_B-y_A$; $z_{AB}=z_B-z_A$. Тогда получаем: $\overrightarrow{AB}=(4;2;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(-2;-3;5)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-1;2)$.

Тогда:

$\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=4(4;2;-3)+3(-2;-3;5)=(10;-1;3)$;

$\vec{b}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(4;2;-3)-2(2;1;-2)=(0;4;-7)$.

а) Модуль вектора $\overline{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$ найдем по формуле

$|\overline{a}|=\sqrt{x_a^{\ 2}+\ y_a^{\ 2}+\ z_a^{\ 2}}=\sqrt{10^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{110}$.

б) Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами $\overline{a}=(x_a,y_a,z_a)$, $\overline{b}=(x_b,y_b,z_b)$ определяется по формуле

$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b=10\cdot0+(-1)\cdot4+3\cdot(-7)=-25$.

в) Косинус угла между двумя векторами вычисляется по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

Так как $\overline{a}\cdot\overline{b} = -25$, а $|\vec{b}| = \sqrt{0^2+4^2+(-7)^2} = \sqrt{65}$, то $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \dfrac{-25}{\sqrt{110}\cdot\sqrt{65}} = -\dfrac{5}{\sqrt{286}}$.

2. Прямая на плоскости. Теоретические сведения

Различные виды уравнений прямой на плоскости:

1. *Общее уравнение прямой:*

$$Ax + By + C = 0,$$

где *A, B, C* – некоторые числа, причём *A* и *B* одновременно не обращаются в нуль. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен прямой и называется *нормальным вектором* прямой.

2 . *Уравнение прямой по точке и нормальному вектору:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где *A, B* – координаты нормального вектора, а точка $M(x_0; y_0)$ – координаты точки, которая лежит на прямой.

3. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:*

$$y = kx + b,$$

где *k* – угловой коэффициент прямой ($k = tg\,\alpha$, где α – угол между прямой и положительным направлением оси *Ox*), а *b* – ордината точки пересечения прямой с осью *Oy*.

4. *Уравнение прямой по точке* $M(x_0; y_0)$ *и угловому коэффициенту k:*

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

5. *Уравнение прямой в отрезках:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где *a, b* – величины длины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях *OX* и *OY* соответственно.

6. *Уравнение прямой по двум точкам.* Если известны координаты двух точек прямой $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, то прямую можно задать уравнением:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

где $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ - точки, принадлежащие прямой.

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Углом между прямыми будем называть наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие параллельности этих прямых имеет вид: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности этих прямых: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2. Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними (с точностью до смежного) находится по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Прямые параллельны, если выполняется равенство $k_1 = k_2$, и перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Аудиторные задания

1. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках на осях.
2. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-1)$ и параллельно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 4x + 5$.
3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3)$ и перпендикулярно прямой $2x - 3y + 8 = 0$.
4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $O(0;0)$ и образующей угол $\frac{\pi}{4}$ с прямой $y = 2x + 5$.
5. Точка $A(2;-5)$ - вершина квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Найти площадь квадрата.
6. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 и 6 см, приняв большую диагональ за ось абсцисс и меньшую за ось ординат.

Индивидуальные задания

Пусть заданы координаты точки $M(x;y)$ и общее уравнение прямой $l: Ax + By + C = 0$. Найти:

а) угловой коэффициент прямой l;

б) уравнение прямой l_1, проходящей через точку M и параллельной прямой l;

в) уравнение прямой l_2, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой l;

г) расстояние от точки M до прямой l.

Вариант	1	2	3	4
M	(3;4)	(-4;-5)	(-3;5)	(3;-2)
l	$6x - y - 13 = 0$	$5x + 2y - 21 = 0$	$x - 6y - 22 = 0$	$5x - 2y + 17 = 0$

Решение типового варианта

Пусть $M(2;5)$ и $l: 6x - y + 22 = 0$.

а) Для того, чтобы найти угловой коэффициент прямой l, надо из общего уравнения выразить переменную y. Тогда угловой коэффициент k будет равен коэффициенту, *стоящему при переменной* x. В нашем случае получаем:

$y = 6x + 22$, тогда $k = 6$.

б) Так как прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. Значит, угловой коэффициент искомой прямой $k_1 = k = 6$. Для составления уравнения прямой l_1 воспользуемся уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту: $y - y_0 = k_1(x - x_0)$. В нашем случае получим:

$$l_1: y - 5 = 6(x - 2);$$

$$y - 5 = 6x - 12;$$

$$y = 6x - 7.$$

в) Так как прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1, то есть $k \cdot k_2 = -1$. Значит, $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{6}$. Для составления уравнения прямой l_2 воспользуемся уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту: $y - y_0 = k_1(x - x_0)$. То есть:

$$l_2: y - 5 = -\frac{1}{6}(x - 2);$$

$$6y - 30 = -x + 2;$$

$$x + 6y - 32 = 0.$$

г) Для вычисления расстояния от точки до прямой воспользуемся формулой:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 2 - 1 \cdot 5 + 22|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}} = \frac{29}{\sqrt{37}}.$$

Занятие 3. Предел и непрерывность функции

1. Предел функции. Теоретические сведения

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0.

Тогда число А называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если А – предел функции $f(x)$ в точке x_0, то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Операции над пределами.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (разности) их пределов:
$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right] = A\pm B.$$
2. Предел произведения функций равен произведению их пределов:
$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = A\cdot B.$$
3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B\neq 0$):
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$
4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела функции:
$$\lim_{x\to x_0}\alpha f(x) = \alpha\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha A, \forall\alpha\in R.$$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$, где $A\neq 1, B\neq\infty$.

Замечательные пределы:

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1.$

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \left(1^\infty\right) = e.$

Аудиторные задания

1. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-4}{x^2-5x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+5}{x^3-4x^2-10x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{16+x^2}-4}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x-8}{x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$.

Индивидуальные задания

Вычислить пределы:

1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+4x+6x^2}{2x^2-3x-1}$, 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-12x+20}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-8-x}$.	2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{4x^2+5x-81}$, 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{3x^2-11x+6}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-x-1}$.
3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x+3}{x^2-3x+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{-2x-1}$.	4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+1}{2x^2-x+6}$, 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{-3x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{-3x}$.

Решение типового варианта

Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x+2x^2}{x^2+5x+1}$, 2) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-2x-4}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{4x^2+5x-81}$,

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы ее раскрыть, разделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела почленно на x в наибольшей степени, т. е. на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x+2x^2}{x^2+5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}+\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x}+2}{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{0+0+2}{1+0+0}=2.$$

2) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, а затем под знаком предела сократим дробь на общий множитель $x+5\neq0$.

Так как $x_1 = 7$ и $x_2 = -5$ – корни уравнения $x^2 - 2x - 35 = 0$, то верно следующее равенство: $x^2 - 2x - 35 = (x-7)(x+5)$.

Аналогично, $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = -5$ – корни уравнения $2x^2 + 11x + 5 = 0$, тогда $2x^2 + 11x + 5 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+5) = (2x+1)(x+5)$. Подставляя в предел, получим:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -5} \frac{(x-7)(x+5)}{(2x+1)(x+5)} = \lim_{x\to -5} \frac{x-7}{(2x+1)} = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-2x-4}$.

Имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом. Для этого прибавим и вычтем в скобке 1, и (-1) приведем к общему знаменателю с дробью:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-2x-4} = (1^\infty) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x-1}{2x+4} - 1\right)^{-2x-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x-1-2x-4}{2x+4}\right)^{-2x-4} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{-5}{2x+4}\right)^{-2x-4}.$$

Преобразуем показатель степени:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-2x-4} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-5}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{-5}}\right]^{(-2x-4)\cdot\frac{-5}{2x+4}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} (-2x-4)\cdot\frac{-5}{2x+4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{10x+20}{2x+4}} = e^5.$$

2. Непрерывность функции.

Теоретические сведения

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если в точке x_0 существуют односторонние пределы функции, они равны между собой и равны значению функции в точке x_0, т. е. если

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \text{ или } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Те точки области определения, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва функции*.

Классификация точек разрыва. Если точка разрыва функции $f(x)$ принадлежит множеству $D(f)$ и является двухсторонней предельной точкой этого множества, то различают разрывы двух видов.

1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв первого рода, если в этой точке существуют односторонние пределы функции, но по крайней мере один из них не равен значению данной функции в точке x_0. При этом возможны случаи:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0),$$

в этом случае $f(x)$ в точке x_0 имеет *устранимый разрыв*; если

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0),$$

то в этом случае $f(x)$ в точке x_0 имеет *разрыв с конечным скачком*. При этом число $|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ называют *скачком функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

2. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

Отметим важное свойство элементарных функций. Элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причем в точке *а* она непрерывна справа ($f(a+0)=f(a)$), а в точке b - слева ($f(b-0)=f(b)$).

Аудиторные задания

1. Установить область непрерывности функции $y=\dfrac{3x+3}{2x+4}$ и найти ее точки разрыва.

2. При каких значениях *A* функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, x\neq 3,\\ A, x=3\end{cases}$ будет непрерывной в точке $x=3$? Построить ее график.

Индивидуальные задания

Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

1. $f(x)=\begin{cases}x+4, x<1,\\ x^2+2, -1\le x<1,\\ 2x, \quad x\ge 1.\end{cases}$	2. $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le 0,\\ (x+1)^2, 0<x\le 2,\\ -x+4, \quad x>2.\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1,\\ x^2+1, -1<x\le 1,\\ -x+3, \quad x>1.\end{cases}$	4. $f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0,\\ -(x-1)^2, 0<x<2,\\ x-3, \quad x\ge 2.\end{cases}$

Решение типового варианта

Исследовать данную функцию на непрерывность $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 0,\\ x^2, 0<x<2,\\ 2x, \quad x\ge 2.\end{cases}$

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ и $(2;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=0$ и $x_2=2$.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_1=0$. Для этого вычислим односторонние пределы и значение функции в точке $x_1=0$. Имеем:

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-1)=-1,$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} x^2=0,$

$f(0)=(x-1)\big|_{x=0}=-1.$

Так как $f(0-0)\neq f(0+0)$, то в точке $x_1=0$ данная функция имеет разрыв с конечным скачком, и этот скачок равен $|f(0-0)-f(0+0)|=|-1+0|=1$.

Для точки $x_2=2$ имеем:

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x^2=4,$

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} 2x=4,$

$f(2)=2x\big|_{x=2}=4.$

Так как $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$, то в точке $x_2=2$ функция непрерывна.

Занятие 4. Производная.
Теоретические сведения

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется *производной функции* $y=f(x)$ *в точке* x и обозначается одним из следующих символов: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$. Таким образом

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Если указанный предел существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x, а операцию нахождения производной y' – *дифференцированием*.

Если C– постоянное число и $u=u(x)$, $v=v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

1. $(u\pm v)=u'\pm v'$;
2. $(Cu)'=Cu'$;
3. $(uv)'=u'v+v'u$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

Производная сложной функции. Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, т.е. $y=f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $y'_x=y'_u u'_x$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \ (\alpha \in R)$;
2. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a \cdot u'$;
3. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;
4. $\left(\log_{a} u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$;
5. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}u'$;
6. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;
7. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;
8. $\left(tg\ u\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} u}u'$;
9. $\left(ctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} u}u'$;
10. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}u'$;
11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}u'$
12. $\left(arctg\ u\right)' = \dfrac{1}{1+u^{2}}u'$;
13. $\left(arcctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^{2}}u'$;

Аудиторные задания

1. Найти производные следующих функций:

1) $y = 5x^{4} - 3\sqrt[7]{x^{3}} + 7/x^{8} + 12$; 2) $y = x^{5}\sin x$; 3) $y = \dfrac{x^{4}+1}{x^{4}-1}$.

2. Используя формулы и правила дифференцирования, найти производные данных функций:

1) $y = e^{x}\ tg\ 3x$;
2) $y = \sin^{5}\left(3x^{2}+1\right)$;
3) $y = \ln^{3}\left(x - 2^{-x}\right)$;
4) $y = x\ \sin^{2} x \cdot 2^{x^{2}}$;
5) $y = x^{3}\ \ln^{2} x$;
6) $y = \dfrac{\sin 5x}{e^{-x^{2}}}$;
7) $y = \left(x^{9}+1\right)\cos 5x$;
8) $y = \dfrac{tg 5x}{e^{4x^{2}}}$;
9) $y = \dfrac{tg^{2} 3x}{\ln^{4} x}$;
10) $y = x^{3}\mathrm{tg}5x$;
11) $y = x\ \mathrm{ctg}^{2}\left(7x+2\right)$;
12) $y = \sqrt[3]{x^{4} + \sin^{4} 3x}$;
13) $y = \dfrac{(x-4)^{2}}{\arccos 2x}$;
14) $y = e^{x}\ln\ \sin x$;
15) $y = \dfrac{arctg 2x}{e^{\sqrt{x}}}$;

Индивидуальные задания

Найти производные данных функций:

Вариант 1	Вариант 2
1) $y = 9x^{3} + 5/x - 7/x^{4} + \sqrt[3]{x^{7}}$,	1) $y = 3\sqrt{x} + 4/x^{5} + \sqrt[3]{x^{2}} - 7/x$,
2) $y = x^{2}\ \sin^{3} 3x$,	2) $y = \sqrt[3]{x}\left(e^{3x} - 5\right)$,
3) $y = \dfrac{\ln 5x}{e^{x^{2}}}$.	3) $y = \dfrac{\arcsin^{2} x}{e^{\sqrt{x}}}$.

Вариант 3	Вариант 4
1) $y=\sqrt{x^3}+2/x^5-4/x^5-5x^3$,	1) $y=7x^2+3/x-\sqrt[5]{x^4}+8/x^3$,
2) $y=3x\ln(1-x)$,	2) $y=\left(xe^{2x}+3\right)^5$,
3) $y=\dfrac{\ln x}{arcctgx^2}$.	3) $y=\dfrac{\ln^3 x}{\sin 3x}$.

Решение типового варианта

Найти производные данных функций:

1) $y=6/x^4-3/x+3x^3-\sqrt{x}$,

2) $y=e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)$,

3) $y=\dfrac{\ln^5 x}{tg3x}$.

Решение.

1) $y=6/x^4-3/x+3x^3-\sqrt{x}$,

$$y'=\left(6/x^4\right)'-\left(3/x\right)'+\left(3x^3\right)'-\left(\sqrt{x}\right)=6\left(x^{-4}\right)'-3\left(x^{-1}\right)'+3\left(x^3\right)'-\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=6\cdot(-4)x^{-4-1}-3\cdot(-1)x^{-1-1}+3\cdot3x^{3-1}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=-24/x^3+3/x^2+9x^2-1/(2\sqrt{x}).$$

2) $y=e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)$,

$$y'=\left(e^{2x}\right)'\cdot\sin^3(7x+3)+e^{2x}\cdot\left(\sin^3(7x+3)\right)'=e^{2x}(2x)'\cdot\sin^3(7x+3)+$$

$$+e^{2x}\cdot3\sin^2(7x+3)\left(\sin(7x+3)\right)'=2e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)+e^{2x}\cdot3\sin^2(7x+3)\cdot$$

$$\cdot\cos(7x+3)(7x+3)'=2e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)+21e^{2x}\cdot\sin^2(7x+3)\cos(7x+3).$$

3) $y=\dfrac{\ln^5 x}{tg3x}$,

$$y'=\frac{\left(\ln^5 x\right)'\cdot tg3x-\left(tg3x\right)'\cdot\ln^5 x}{tg^2 3x}=\frac{5\cdot\ln^4 x\cdot\left(\ln x\right)'\cdot tg3x-}{tg^2 3x}$$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'\cdot\ln^5 x}{tg^2 3x}=\frac{5\cdot\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}\cdot tg3x-\frac{3}{\cos^2 3x}\cdot\ln^5 x}{tg^2 3x}=$$

$$=\frac{\ln^4 x\cdot\left(5\sin3x\cdot\cos3x-3x\cdot\ln x\right)}{x\cdot tg^2 3x\cdot\cos^2 3x}=\frac{\ln^4 x\cdot\left(5\sin6x-6x\cdot\ln x\right)}{2x\cdot\sin^2 3x}.$$

Занятие 5. Исследование функции и построение графиков. Теоретические сведения

1. Возрастание, убывание функции. Экстремумы функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на области D, если $\forall x_1>x_2$ $(x_1,x_2\in D)$ выполняется неравенство: $f(x_1)>f(x_2)$. (Рис. 5.1.)

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на области D, если $\forall x_1>x_2$ $(x_1,x_2\in D)$ выполняется неравенство: $f(x_1)<f(x_2)$. (Рис. 5.2.)

Теорема (достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если функция

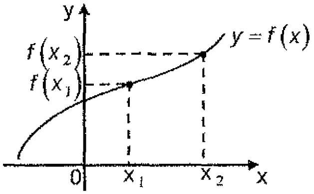


Рис. 1.

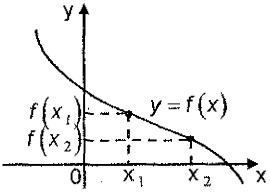


Рис. 2.

$y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, то функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Интервалы, на которых функция возрастает или убывает, называются интервалами монотонности функции.

Определение. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* функции $y=f(x)$, если для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0)\geq f(x)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой *локального минимума* функции $y=f(x)$, если для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0)\leq f(x)$.

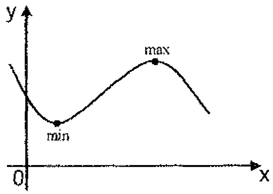


Рис. 3.

Значение функции в точке локального максимума (минимума) называется *максимумом (минимумом)* функции. Максимум и минимум функции называется *экстремумом функции*. (Рис. 5.3.)

2. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции.

Теорема (*необходимое условие существования экстремума*) *Если* дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x_0)=0$.

Замечание. *Обратная* теорема неверна, то есть если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что точка x_0 - точка экстремума.

Точки, в которых производная обращается в нуль или не существует, называются *критическими*.

Теорема (достаточное условие существования экстремума). Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 - точка локального максимума; если производная меняет свой знак с минуса на плюс, то точка x_0 - точка локального минимума.

Правило исследования функции на экстремум.

1. Найти точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, то есть найти критические точки.

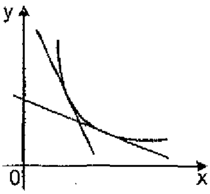
2. Среди критических точек выбрать те, которые принадлежат области определения функции.

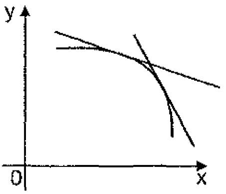
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой из выбранных точек.

3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Определение. График функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вниз (или вогнутым)* на интервале $(a;b)$, если на этом интервале график расположен выше касательной к графику функции, проведенной в любой точке интервала $(a;b)$.

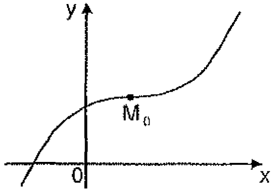
Определение. График функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вверх (или выпуклым)* на интервале $(a;b)$, если на этом интервале график расположен ниже касательной к графику функции, проведенной в любой точке интервала $(a;b)$.





Теорема. Если функция $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)>0$ для любого x из интервала $(a;b)$, то график функции на интервале $(a;b)$ вогнутый; если $f''(x)<0$ для любого x из интервала $(a;b)$, то график функции на интервале $(a;b)$ выпуклый.

Определение. Точка графика дифференцируемой функции называется *точкой перегиба* функции $y=f(x)$, если в ней характер выпуклости меняется на противоположный.

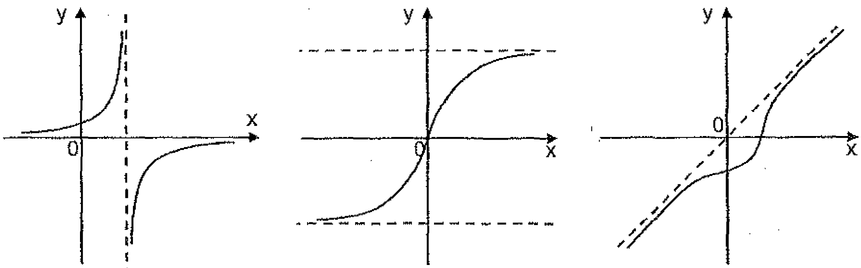


Теорема. Если для функции $y=f(x)$ вторая производная в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует, и при переходе через эту точку меняет свой знак на противоположный, то точка $M_0(x_0;f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y=f(x)$.

4. Асимптоты графика функции.

Определение. *Асимптотой графика функции* $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки графика этой функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности.



Замечание. Вертикальные асимптоты существуют в точках разрыва функции.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной*.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то график функции наклонной асимптоты не имеет.

Аудиторные задания

1. Найти точки экстремума функций:

а) $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$; в) $y = x\ln^2 x$;

б) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$; г) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

2. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$; в) $y = 2x^2 + \ln x$;

б) $y = x^3 - 6x^2$; г) $y = xe^x$.

3. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \dfrac{3 - 4x}{2 + 5x}$; г) $y = \dfrac{3x^5}{2 + x^4}$;

б) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; д) $y = \dfrac{2x^3 \ln x}{1 + x^2}$.

в) $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$;

Индивидуальные задания

1. Найти экстремумы функции.
2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
3. Найти асимптоты кривой.

Вариант 1	Вариант 2
1. $y=\frac{x^2}{x-2}$; 2. $y=e^{-x^2}$; 3. $y=\frac{x^2}{x-1}$.	1. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$; 2. $y=x-\ln x$; 3. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $y=x-2\ln x$; 2. $y=x^3-6x^2+x$; 3. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.	1. $y=x^2e^{-x}$; 2. $y=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$; 3. $y=x+\frac{27}{x^3}$.

Решение типового варианта

1. Исследовать на экстремум функцию $y=x(x-1)^3$.
2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y=x(x-1)^3$.
3. Найти асимптоты функции $y=\frac{1}{x^2-1}$.

Решение.

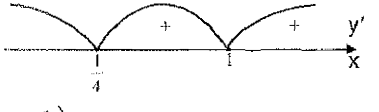
1. Найдем производную функции:

$$y'=\left(x(x-1)^3\right)'=(x-1)^3+x\cdot 3(x-1)^2=(x-1)^2(x-1+3x)=(x-1)^2(4x-1).$$

Найдем критические точки, то есть точки, в которых производная обращается в нуль или не существует:

$$y'=0:(x-1)^2(4x-1)=0\Rightarrow x=1, x=\frac{1}{4}.$$

Областью определения функции является вся числовая прямая, значит обе критические точки принадлежат области определения. Методом интервалов исследуем знак первой производной слева и справа от каждой из критических точек.



Следовательно, для $x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$ $y'(x)<0$, значит, функция убывает на этом промежутке; для $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ - $y'(x)>0$, значит, функция возрастает на этом промежутке.

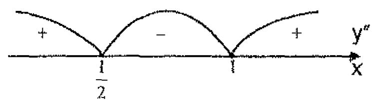
По достаточному условию существования экстремума в точке $x=\frac{1}{4}$ функция имеет локальный минимум, так как при переходе через эту точку производная меняет свой знак с минуса на плюс. При этом $y_{\min}=y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)^3=-\frac{27}{256}$. Точка $x=1$ не является точкой экстремума.

2. Выше была найдена первая производная функции: $y'=(x-1)^2(4x-1)$. Найдем вторую производную:

$$y''=\left((x-1)^2(4x-1)\right)'=2(x-1)(4x-1)+4(x-1)^2=(x-1)(8x-2+4x-4)=$$
$$=(x-1)(12x-6).$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в нуль:

$y''=0:(x-1)(12x-6)=0\Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$. Методом интервалов исследуем знак второй производной слева и справа от каждой из полученных точек.



Следовательно, для $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$ $y''(x)>0$ и график функции вогнутый, а для $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$ $y''(x)<0$ и график функции выпуклый. Таким образом, при переходе через точки $x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$ меняется характер выпуклости. Следовательно, точки $M_1\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{16}\right)$ и $M_2(1;0)$ являются точками перегиба графика данной функции.

3. Найдем вертикальные асимптоты. Точками разрыва функции являются точки, в которых знаменатель обращается в нуль, то есть $x_1=1$ и $x_2=-1$. Вычислим односторонние пределы в точках разрыва функции. Для точки $x_1=1$ имеем:

$$\lim_{x\to1-0}y=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to1+0}y=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Для точки $x_2=-1$:

$$\lim_{x\to-1-0}y=\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to-1+0}y=\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

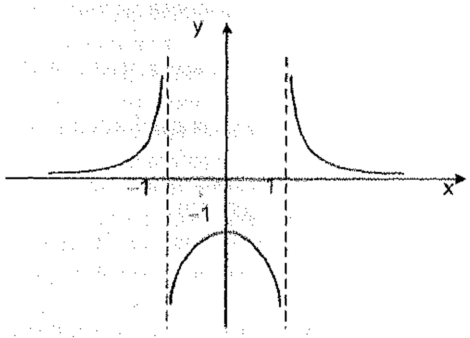
Следовательно, прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами.

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$, если она существует. Вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x\left(x^2-1\right)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой.



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ведина О.И., Десницкая В.Н. и др. Математика. Математический анализ для экономистов.-М.: «Филинъ», 2000.-356 с.

2. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш.Кремера. - 2-е изд. - М.: ЮНИТИ, 2000.-472 с.

3. Высшая математика: Общий курс / Под ред. С.А.Самаля. - 2-е изд. - Мн.: Выш. шк., 2000.-352 с.

4. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике.- Мн.: ТетраСистемс, 1999.-640 с.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.- 5-е изд. - М.: Высш.шк., 1997.-304 с.

6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. и др. Общий курс высшей математики. – Орша: АРФА, 1996.-318 с.

7. Идельсон А.В., Блюмкина И.А. Математика для экономистов: Аналитическая геометрия. Линейная алгебра.- М.: ИНФРА-М, 2000.-200 с.

8. Индивидуальные задания по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / Под ред. А.П.Рябушко.- Мн.: Выш. шк., 2000.- 304 с.

9. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов.- М.: ИНФРА-М, 1997.-208 с.

10. Красс М.С. Математика для экономических специальностей.- 3-е изд. - М.: Дело. – 2002.-704 с.

11. Малыхин В.И. Математика в экономике.- М.: ИНФРА-М, 1999.- 356 с.

12. Минюк С.А., Ровба Е.А. Высшая математика.- 3-е изд. - Гродно: ГрГУ, 2004.-408 с.

13. Минюк С.А., Самаль С.А., Шевченко Л.И. Высшая математика для экономистов. Т. 1. – МН.: «Элайда», 2003. – 526 с.

14. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова.-М.: ИНФРА-М, 2000.-656 с.

15. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч. 1/ Под ред. Е.И. Гурского.-Мн.: Выш. шк., 1989.-350 с.

16. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч 1.- М.: Финансы и статистика, 1999.-224 с.

17. Солодовников А.С., Бабайцев В.А. и др. Математика в экономике. Ч. 2.-М.: Финансы и статистика, 1999.-376 с.

18. Справочник по математике для экономистов / Под. ред. В.И.Ермакова.-М.: Высш. шк., 1997.-384 с.

19. Тузик А.И., Тузик Т.А. Высшая математика: Общий курс: Контрольные работы №1, №2; Методические указания и варианты заданий.-Брест: БрГТУ, 2006. -46с.

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Лебедь Светлана Федоровна
Тузик Татьяна Александровна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения
(первый курс, первый семестр)

Ответственный за выпуск: Тузик Т.А.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерный набор: Лебедь С.Ф.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 7.12.2007 г. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.
Усл. п. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,5. Заказ № 1301. Тираж 200 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г.Брест, ул. Московская, 267.