МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

РЯДЫ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по разделам «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2001

УДК 517.9

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды» общего курса высшей математики для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольных работ.

Составители: А.В. Санюкевич, к.ф.-м.н., доцент
Л.Т. Мороз, доцент

Содержание

Методические указания к выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом студенты-заочники II курса всех технических специальностей в III семестре выполняют две письменные контрольные работы по курсу «Высшая математика».

Задания в контрольных работах составлены в тридцати вариантах. Выбор варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки студента. Приступая к выполнению контрольной работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями, изучить литературу. Далее следует предварительно наметить схему решения задачи.

Требования к выполнению контрольной работы.

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена в установленные сроки.

2. В начале работы должен быть указан номер варианта работы.

3. Задачи нужно решать в том порядке, в каком они даны в задании.

4. Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Необходимо отделить решение задачи от ее условия некоторым интервалом. В том случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.

5. Решение задачи следует сопровождать необходимыми формулами, развернутыми расчетами и краткими пояснениями. Задачи, к которым даны ответы без развернутых расчетов, пояснений и кратких выводов, будут считаться нерешенными.

6. Выполненная контрольная работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво, чисто, без помарок и зачеркиваний. Запрещается произвольно сокращать слова (допускаются лишь общепринятые сокращения).

7. В конце работы следует привести список использованной литературы (автор, название учебника, главы, параграфа, страницы). Работа должна быть подписана студентом с указанием даты ее выполнения.

8. При удовлетворительном выполнении работа оценивается “допущена к защите”. К собеседованию студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления и дополнения. После успешного прохождения собеседования студент получает зачет по работе и допускается к экзамену. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом работам, к экзаменам не допускаются.

На обложку контрольной работы необходимо наклеить бланк установленного образца и разборчиво заполнить все имеющиеся там реквизиты, отсутствие которых может задержать отправку проверенной работы. Указывайте индекс вашего предприятия связи, разборчиво пишите свою фамилию.

Если студент не может самостоятельно выполнить контрольную работу или какую-то ее часть, следует обратиться к ведущему преподавателю за консультацией. В письменном запросе надо точно указать, что именно непонятно и какая литература использована при написании работы.

Вопросы по разделам
«Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды»

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Определение, теорема существования и свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Повторные интегралы.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Переход в двойном интеграле от декартовых к полярным координатам.
5. Вычисление площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.
6. Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла.
7. Физические приложения двойного интеграла.
8. Определение, свойства и вычисление тройного интеграла. Цилиндрические и сферические координаты.
9. Геометрические и механические приложения тройного интеграла.
10. Криволинейный интеграл I рода. Задача, приводящая к криволинейному интегралу I рода.
11. Определение и свойства криволинейного интеграла I рода.
12. Криволинейный интеграл II рода. Задача о работе переменной силы вдоль криволинейного пути.
13. Определение, свойства и вычисление криволинейного интеграла II рода.
14. Циркуляция вектора по замкнутому контуру. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.
15. Числовые ряды. Общие понятия числового ряда.
16. Геометрическая прогрессия и гармонический ряд.
17. Основные свойства сходящихся рядов.
18. Необходимый признак сходимости рядов.
19. Признаки сравнения.
20. Признаки сходимости рядов Д'Аламбера.
21. Признаки сходимости рядов Коши.
22. Интегральный признак сходимости рядов Коши. Ряд Дирихле.
23. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
24. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
25. Функциональные ряды. Общие понятия функциональных рядов.
26. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
27. Степенные ряды. Общие понятия. Свойства степенных рядов.
28. Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора.
29. Приближенное вычисление функций с помощью рядов.
30. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов.
31. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
32. Тригонометрические ряды Фурье. Коэффициенты Фурье.
33. Разложение функций в ряд Фурье.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

"Кратные и криволинейные интегралы"

Задание 1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями. Вычислить любой из найденных интегралов для случая $f(x;y)=1$.

1.1 $y=x^2+1,\ x-y+3=0;$
1.2 $x=y^2+2,\ x-2y-10=0;$
1.3 $y=x^2+3,\ 3x-y+21=0;$
1.4 $x=y^2+4,\ x-4y-36=0;$
1.5 $y=x^2+5,\ 5x-y+55=0;$
1.6 $x=y^2+6,\ x-y-8=0;$
1.7 $y=x^2+7,\ 2x-y+15=0;$
1.8 $x=y^2+8,\ x-3y-26=0;$
1.9 $y=x^2+9,\ 4x-y+41=0;$
1.10 $x=y^2+10,\ x-5y-60=0;$
1.11 $y=2x^2+x+1,\ 3x-y+5=0;$
1.12 $x=2y^2+y+2,\ x-5y-18=0;$
1.13 $y=2x^2+x+3,\ 7x-y+39=0;$
1.14 $x=2y^2+y+4,\ x-9y-68=0;$
1.15 $y=2x^2+x+5,\ 11x-y+105=0;$
1.16 $x=2y^2+y+6,\ x-3y-10=0;$
1.17 $y=2x^2+x+7,\ 5x-y+23=0;$
1.18 $x=2y^2+y+8,\ x-7y-44=0;$
1.19 $y=2x^2+x+9,\ 9x-y+73=0;$
1.20 $x=2y^2+y+10, x-11y-110=0;$
1.21 $y=3x^2+2x+1,\ 5x-y+7=0;$
1.22 $x=3y^2+2y+2,\ x-8y-26=0;$
1.23 $y=3x^2+2x+3,\ 11x-y+57=0;$
1.24 $x=3y^2+2y+4, x-14y-100=0;$
1.25 $y=3x^2+2x+5,\ 17x-y+155=0;$
1.26 $x=3y^2+2y+6,\ x-5y-12=0;$
1.27 $y=3x^2+2x+7,\ 8x-y+31=0;$
1.28 $x=3y^2+2y+8,\ x-11y-62=0;$
1.29 $y=3x^2+2x+9,\ 14x-y+105=0;$
1.30 $x=3y^2+2y+8, x-17y-160=0;$

Задание 2. Вычислить массу материальной пластины, занимающей область D плоскости xOy, если поверхностная плотность $\rho(x,y)$ и границы области заданы уравнениями:

2.1 $x^2+y^2=2y,\quad y=x,\quad y=-x,\quad \rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2};$

2.2 $x^2+y^2=2x,\quad y=x,\quad y=-\sqrt{3}\cdot x,\quad \rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2};$

2.3 $x^2+y^2=4y,\quad y=\sqrt{3}\cdot x,\quad y=-x,\quad \rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2};$

2.4 $x^2+y^2=4x$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y=-\sqrt{3}\cdot x$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.5 $x^2+y^2=9y$, $y=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y=-x$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.6 $x^2+y^2=9x$, $y=x$, $y=-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.7 $x^2+y^2=16y$, $y=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y=-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.8 $x^2+y^2=16x$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y=-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.9 $x^2+y^2=25y$, $y=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y=-\sqrt{3}\cdot x$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.10 $x^2+y^2=25x$, $y=x$, $y=-x$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.11 $x^2+y^2=-2y$, $y=x$, $y=-\sqrt{3}\cdot x$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.12 $x^2+y^2=-2x$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y=-x$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.13 $x^2+y^2=-4y$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y=-\sqrt{3}\cdot x$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.14 $x^2+y^2=-4x$, $y=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y=-x$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.15 $x^2+y^2=-9y$, $y=x$, $y=-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.16 $x^2+y^2=-9x$, $y=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y=-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.17 $x^2+y^2=-16y$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y=-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.18 $x^2+y^2=-16x$, $y=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y=-\sqrt{3}\cdot x$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.19 $x^2+y^2=-25y$, $y=x$, $y=-\sqrt{3}\cdot x$, $\rho(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2.20 $x^2+y^2=-25x$, $y=\sqrt{3}\cdot x$, $y=-x$, $\rho(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

2.21 $x^2+y^2=2y,\quad x^2+y^2=2x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.22 $x^2+y^2=4y,\quad x^2+y^2=-4x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.23 $x^2+y^2=-9y,\quad x^2+y^2=9x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.24 $x^2+y^2=-16y,\quad x^2+y^2=-16x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.25 $x^2+y^2=25y,\quad x^2+y^2=25x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.26 $x^2+y^2=2y,\quad x^2+y^2=-2x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.27 $x^2+y^2=-4y,\quad x^2+y^2=4x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{7}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.28 $x^2+y^2=-9y,\quad x^2+y^2=-9x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{8}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.29 $x^2+y^2=16y,\quad x^2+y^2=16x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{9}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.30 $x^2+y^2=25y,\quad x^2+y^2=-25x,\qquad \rho(x,y)=\dfrac{10}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Задание 3. Вычислить координаты центра масс однородной ($\rho(x,y)=1$) материальной пластины D, ограниченной данными линиями:

3.1 $y=x^2+1,\quad y=5$;	**3.2** $x=y^2+2,\quad x=6$;	**3.3** $y=3-x^2,\quad y=-1$;
3.4 $x=4-y^2,\quad x=0$;	**3.5** $y=x^2+5,\quad y=9$;	**3.6** $x=y^2+6,\quad x=7$;
3.7 $y=7-x^2,\quad y=3$;	**3.8** $x=8-y^2\quad x=-1$;	**3.9** $y=x^2+9,\quad y=10$;
3.10 $x=y^2+10,\quad x=11$;	**3.11** $y=1-2x^2,\quad y=-7$;	**3.12** $x=2-2y^2\quad x=-6$;
3.13 $y=2x^2+3,\quad y=5$;	**3.14** $x=2y^2+4,\quad x=6$;	**3.15** $y=5-2x^2,\quad y=-3$;
3.16 $x=6-2y^2\quad x=-2$;	**3.17** $y=2x^2+7,\quad y=9$;	**3.18** $x=2y^2+8,\quad x=10$;
3.19 $y=9-2x^2,\quad y=1$;	**3.20** $x=10-2y^2\quad x=2$;	**3.21** $y=3x^2+1,\quad y=4$;
3.22 $x=3y^2+2,\quad x=5$;	**3.23** $y=3-3x^2,\quad y=0$;	**3.24** $x=4-3y^2\quad x=1$;
3.25 $y=3x^2+5,\quad y=8$;	**3.26** $x=3y^2+6,\quad x=9$;	**3.27** $y=7-3x^2,\quad y=-5$;
3.28 $x=8-3y^2\quad x=-4$;	**3.29** $y=3x^2+9,\quad y=12$;	**3.30** $x=3y^2+10,\quad x=13$.

Задание 4. Используя кратные интегралы вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

4.1 $x^2+y^2=1,\ x+z=1,\ z=4-x^2-y^2;$ **4.2** $x^2+y^2=z,\ x^2+y^2=2-z;$

4.3 $y=1-2x,\ y=x+5,\ z=1-x^2, z=0;$ **4.4** $x^2+y^2=z^2,\ z=2-x^2-y^2;$

4.5 $y=5-x,\ y=x+5,\ z=1-y^2, z=0;$ **4.6** $x^2+y^2=z,\ 2x+z=0;$

4.7 $x^2+y^2=4,\ y+z=1,\ z=9-x^2-y^2;$ **4.8** $x^2+y^2=z,\ z=8-x^2-y^2;$

4.9 $y=1-x\ \ y=x+6,\ z=4-x^2, z=0;$ **4.10** $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=6-z;$

4.11 $y=4-2x,\ y=x+2,\ z=4-y^2,\ z=0;$ **4.12** $x^2+y^2=z,\ 4x-z=0;$

4.13 $x^2+y^2=1,\ x+z=2,\ z=6-x^2-y^2;$ **4.14** $x^2+y^2=2z,\ z=6-x^2-y^2;$

4.15 $y=x+1,\ y=2x+3,\ z=1-x^2, z=0;$ **4.16** $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=2z;$

4.17 $y=3-x,\ y=9-2x,\ z=1-y^2, z=0;$ **4.18** $x^2+y^2=z,\ 2y+z=0;$

4.19 $x^2+y^2=4,\ y+z=2,\ z=x^2+y^2-9;$ **4.20** $x^2+y^2=2z,\ z=3-x^2-y^2;$

4.21 $y=x+3,\ y=3x+8,\ z=4-x^2, z=0;$ **4.22** $x^2+y^2=4z^2,\ x^2+y^2=8z;$

4.23 $y=2x+4,\ y=x+8,\ z=4-y^2, z=0;$ **4.24** $x^2+y^2=z,\ z-4y=0;$

4.25 $x^2+y^2=1,\ x-z=1,\ z=x^2+y^2-9;$ **4.26** $x^2+y^2=3z,\ x^2+y^2=12-z;$

4.27 $y=1-x,\ y=-3-2x,\ z=1-x^2, z=0;$ **4.28** $x^2+y^2=2z^2,\ x^2+y^2=3-z;$

4.29 $y=x+2,\ y=3x-2,\ z=1-y^2, z=0;$ **4.30** $x^2+y^2=z,\ 4x+z=0.$

Задание 5. Вычислить данный криволинейный интеграл вдоль линии L. Сделать чертеж.

5.1 $\int\limits_L y^2dx-2xydy$, где L – ломаная OBA: $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;1)$;

5.2 $\int\limits_L ydx+(xy-x^2)dy$, где L – дуга параболы $x=2y^2$ от т. $O(0;0)$ до т. $A(2;1)$;

5.3 $\int\limits_L (y-x^2)dx-(y^2-x)dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=4\cos t, \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$;

5.4 $\int\limits_L (xy-y^2)dx+xdy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от т. $A(1;2)$ до т. $B(4;4)$;

5.5 $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, где L – дуга верхней половины эллипса $\begin{cases} x=6\sin t, \\ y=3\cos t, \end{cases}$

"пробегаемая" по ходу часовой стрелки;

5.6 $\int\limits_L \cos ydx-\sin xdy$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;3)$ и $B(2;5)$;

5.7 $\int\limits_L (x^2-y)dx-(x-y^2)dy$, вдоль дуги L окружности $\begin{cases} x=5\sin t, \\ y=5\cos t, \end{cases}$ обходя ее против хода часовой стрелки от т. $A(5;0)$ до т. $B(0;5)$;

5.8 $\int\limits_L (2xy-x^2)dx+(2xy+y^2)dy$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от т. $O(0;0)$ до т. $A(-2;4)$;

5.9 $\int\limits_L ydx+xydy$, где L – дуга верхней половины окружности $x^2+y^2=2x$ при положительном направлении обхода контура;

5.10 $\int\limits_L x^2dx-xdy$, где L – дуга синусоиды $y=\sin x$, от т. $(\pi;0)$ до т. $(0;0)$;

5.11 $\int\limits_L (xy+y)dx+(y+x)dy$, где L – дуга параболы $y=2x^3$ от т. $A(1;2)$ до т. $B(-1;-2)$;

5.12 $\int\limits_L \frac{1}{y-2}dy+\frac{x}{y}dx$, где L – дуга циклоиды $\begin{cases} x=2t-2\sin t, \\ y=2-2\cos t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$;

5.13 $\int\limits_L ydx+\frac{x}{y}dy$, вдоль дуги L кривой $y=e^{-x}$ от т. $A(0;1)$ до т. $B(-1;e)$;

5.14 $\oint\limits_L ydx-xdy$, где L – дуга окружности $x^2+y^2=2y$ при положительном направлении обхода контура;

5.15 $\int\limits_L (xy+x)dx+\frac{x^2}{y}dy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от т. $A(4;4)$ до т. $B(1;2)$;

5.16 $\int\limits_L ydx-xdy$, где L – четверть дуги окружности $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ лежащая во втором квадранте и "пробегаемая" против хода часовой стрелки;

5.17 $\int\limits_L (xy-y)dx+x^2dy$, где L – дуга параболы $y=\sqrt{3-x}$ от т. $A(2;1)$ до т. $B(-1;2)$;

5.18 $\int\limits_L y^2dx-x^2dy$, где L – дуга нижней половины эллипса $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ "пробегаемая" против хода часовой стрелки;

5.19 $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$, где L – дуга параболы $x^2=4y$ от т. $A(-2;1)$ до т. $B(-4;4)$;

5.20 $\int\limits_L ydx-xdy$, где L – дуга верхней половины эллипса $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=8\sin t, \end{cases}$ "пробегаемая" против хода часовой стрелки;

5.21 $\int\limits_L (xy-y^3)dx+xy^2dy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt[3]{x}$ от т. $A(1;2)$ до т. $B(8;4)$;

5.22 $\int\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, вдоль границы L треугольника OBA, обходя ее против хода часовой стрелки, если $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;1)$;

5.23 $\int\limits_L \frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x}{y}dy$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;3)$ и $B(2;5)$;

5.24 $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+xydy$, вдоль дуги L кривой $y=\ln x$ от т. $A(1;0)$ до т. $B(e;1)$;

5.25 $\int\limits_L (x-\frac{1}{y})dx+xdy$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от т. $A(-2;4)$ до т. $B(-3;9)$;

5.26 $\int\limits_L (x^2y-2x)dx-(y^2x+2y)dy$, где L – дуга эллипса $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ лежащая в первом квадранте и "пробегаемая" против хода часовой стрелки;

5.27 $\int\limits_L 4\cos ydx-y\sin xdy$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;2)$ и $B(2;4)$;

5.28 $\oint\limits_L ydx-xdy$, где L – дуга эллипса $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ при положительном направлении обхода контура;

5.29 $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, где L – дуга параболы $y=x^3$ от т. $A(1;1)$ до т. $B(2;8)$;

5.30 $\int\limits_L (x-y)dx+xdy$, где L – дуга верхней половины окружности $x^2+y^2=16$ при положительном направлении обхода контура;

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

"Ряды"

Задание 1. Исследовать числовые ряды на сходимость.

1.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+4}$;

1.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{5n^2-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^3}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+9)}{n^2+2}$;

1.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)^2}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-3}$;

1.4 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+5}$;

1.5 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+6}{(n+5)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$;

1.6 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+6)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(n+5)\cdot 6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+5}}{n+6}$;

1.7 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{(n+7)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+5)(n-2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+7)}$;

1.8 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(n+8)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^2}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+3}}{8n+4}$;

1.9 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+9)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cdot n!}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$;

1.10 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{n(n+10)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(n+2)}{(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$;

1.11 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+10}{(n+1)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+7}$;

1.12 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7n-2}{n^2+2n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+2n}$;

1.13 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+2n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$;

1.14 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n(n^2+4)}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)^4}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+5}}$;

1.15 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(2n+5)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$;

1.16 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{(n+6)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^4}{n\cdot n!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+6}}$;

1.17 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+7)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+5)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n(n+7)}}$;

1.18 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+4}{(n+8)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{n(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{8n+10}$;

1.19 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(n+9)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 9^n}{(n+1)\cdot(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+9)^2}$;

1.20 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+20}{(5n+10)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+10}}$;

1.21 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{21n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)^2}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$;

1.22 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{(3n+2)\cdot n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)^5}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$;

1.23 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{(n^2+2)(n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)\sqrt{n}}$;

1.24 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n^2+4)\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\cdot n^4}{(n+1)^4\cdot 4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+5)}$;

1.25 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{(2n+5)^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+5)n}$;

1.26 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{(n+6)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+6}$;

1.27 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+7)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7^{n+2}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{(n+3)(n+7)}$;

1.28 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{(n+8)^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 3^{2n+1}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+8)}$;

1.29 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n-1}{(n+9)\cdot n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)!}{(n+1)\cdot 9^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+9)^2}}$;

1.30 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+30}{\sqrt{(5n+10)^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(n+10)^2}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+10}}$;

Задание 2. Для данного степенного ряда написать первые четыре члена ряда и исследовать его на сходимость:

2.1 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3(x-1)^n}{2^n\sqrt{(n+1)^5}}$; 2.2 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{4^n\cdot(n+2)}$; 2.3 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-3)^{n+1}}{2\sqrt{n+3}}$;

2.4 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+4)^{n-1}}{(n+4)^2}$; 2.5 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-5)^{n+1}}{5\sqrt{n+1}}$; 2.6 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+6)^n}{(n+2)\cdot 2^n}$;

2.7 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-7)^{n+1}}{5^n\sqrt{(n+3)^3}}$; 2.8 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+8)^n\cdot 8^n}{5(n+1)^2}$; 2.9 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-9)^{n-1}}{(n+2)\cdot 2^n}$;

2.10 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+10)^n}{2(n+10)^5}$; 2.11 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x-1)^{n-1}}{4^n\cdot(n+11)}$; 2.12 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(x+2)^{n+1}}{2^n\cdot\sqrt{n+10}}$;

2.13 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x-3)^{n-1}}{\sqrt[3]{(n+13)^2}}$; 2.14 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(x+4)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n+1}}$; 2.15 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x-5)^n}{(n+15)\cdot 2^n}$;

2.16 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-6)^{n+1}}{\sqrt{5^n(n+16)}}$; **2.17** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x+7)^n\cdot 7^n}{4^n\cdot(n+1)}$; **2.18** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{6(x-8)^{n-1}}{(n+7)\cdot 2^n}$;

2.19 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n\cdot(x+9)^n}{2^n\cdot(n+1)\sqrt{n}}$; **2.20** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n\cdot(x-10)^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+5)}$; **2.21** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5^n\cdot(x+1)^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt{n+7}}$;

2.22 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n\cdot(x-2)^{n-1}}{(n^2+22n)\cdot 7^n}$; **2.23** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x+3)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n^2+1}}$; **2.24** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-4)^n\cdot 9^n}{(n^3+1)\cdot 2^n}$;

2.25 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{8(x+5)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n^3+3n}}$; **2.26** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5\cdot(x-6)^n\cdot 8^n}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$; **2.27** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n\cdot(x+7)^{n-1}}{(2n\sqrt{n}+5)\cdot 7^n}$;

2.28 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n\cdot(x-8)^n}{8^n\cdot\sqrt{4n^2-n}}$; **2.29** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{7^n\cdot(x+9)^{n-1}}{4^n\cdot\sqrt[4]{n+2}}$; **2.30** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n\cdot(x-10)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n^3+3n}}$;

Задание 3: Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x;y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

3.1 $y'=3x\cdot y-\sin x$, $y(0)=2$;	**3.2** $y'=4x\cdot y^2-e^x+2$, $y(0)=0$;
3.3 $y'=3x^3+x\cdot y^2$, $y(0)=1$;	**3.4** $y'=3\sin x+y\cdot e^x+2$, $y(0)=1$;
3.5 $y'=4x+e^x+y$, $y(0)=3$;	**3.6** $y'=3x^2y-2xy+4$, $y(0)=0$;
3.7 $y'=4xy^2-x^2y$, $y(0)=3$;	**3.8** $y'=6x\cdot y^2+e^{2x}$, $y(0)=2$;
3.9 $y'=x+2y^2+3x^3y$, $y(0)=6$;	**3.10** $y'=2\cos x+y^2$, $y(0)=1$;
3.11 $y'=4e^x-xy$, $y(0)=0$;	**3.12** $y'=4x^2y^2-2x+y$, $y(0)=4$;
3.13 $y'=x^2y+\sin 2x$, $y(0)=2$;	**3.14** $y'=3x^2y-e^x+4$, $y(0)=0$;
3.15 $y'=3x^2y-\cos 3x+1$, $y(0)=1$;	**3.16** $y'=2x\cdot y^2+e^{4x}$, $y(0)=0$;
3.17 $y'=\sin 2x+3y^2-x$, $y(0)=1$;	**3.18** $y'=x^2+y^2-x+y$, $y(0)=2$;
3.19 $y'=3x\cdot y^2-\sin 5x$, $y(0)=3$;	**3.20** $y'=3\sin x+x^2y+x$, $y(0)=2$;
3.21 $y'=2x^3+3y^2+y$, $y(0)=3$;	**3.22** $y'=3x^2-yx+\cos x$, $y(0)=4$;
3.23 $y'=\cos x+y+e^{4x}$, $y(0)=1$;	**3.24** $y'=4\sin x+y^2+2x$, $y(0)=1$;
3.25 $y'=3y+2y^2$, $y(0)=4$;	**3.26** $y'=x+2y^2+3e^{3x}$, $y(0)=0$;
3.27 $y'=5e^x+xy-\sin x$, $y(0)=0$;	**3.28** $y'=3xy-e^{2x}+2$, $y(0)=0$;
3.29 $y'=3x\cdot y^2+y$, $y(0)=2$;	**3.30** $y'=3x\cdot y^3-2y+2x$, $y(0)=2$.

Задание 4: Вычислить определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью $0,001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав почленно:

4.1 $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$, $a=0$, $b=0,2$;

4.2 $f(x)=\cos\left(25x^2\right)$, $a=0$, $b=0,4$;

4.3 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, $a=0$, $b=1,5$;

4.4 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{4}$, $a=0$, $b=1$;

4.5 $f(x)=e^{-4x^2}$, $a=0,1$, $b=0,2$;

4.6 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, $a=0$, $b=1$;

4.7 $f(x)=\sin\left(100x^2\right)$, $a=0$, $b=0,1$;

4.8 $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}$, $a=0,1$, $b=0,2$;

4.9 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}}$, $a=0$, $b=2$;

4.10 $f(x)=e^{-6x^3}$, $a=0$, $b=0,1$;

4.11 $f(x)=\cos\left(x^2\right)$, $a=0$, $b=1$;

4.12 $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{x}$, $a=0$, $b=0,1$;

4.13 $f(x)=\dfrac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x^2}$, $a=0,5$, $b=1$;

4.14 $f(x)=\cos\left(\dfrac{5}{2}x^2\right)$, $a=0$, $b=0,4$;

4.15 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$, $a=0$, $b=0,25$;

4.16 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, $a=0,5$, $b=1$;

4.17 $f(x)=e^{-x^2}$, $a=0,1$, $b=1$;

4.18 $f(x)=\sqrt{1+x^3}$, $a=0$, $b=0,25$;

4.19 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $a=0$, $b=0,5$;

4.20 $f(x)=x\cdot e^{-x^3}$, $a=0$, $b=1$;

4.21 $f(x)=x\cdot \operatorname{arctg} x$, $a=0$, $b=0,5$;

4.22 $f(x)=e^{-\frac{1}{3}x^3}$, $a=0$, $b=1$;

4.23 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $a=0$, $b=0,5$;

4.24 $f(x)=\sin\left(x^2\right)$, $a=0$, $b=1$;

4.25 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$, $a=0$, $b=0,5$;

4.26 $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$, $a=0$, $b=0,5$;

4.27 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $a=0$, $b=1$;

4.28 $f(x)=\sin\sqrt{x}$, $a=0$, $b=1$;

4.29 $f(x)=\cos\sqrt{x}$, $a=0$, $b=1$;

4.30 $f(x)=x\ln(1-x^2)$, $a=0$, $b=0,5$;

Решение типового варианта контрольной работы № 5

"Кратные и криволинейные интегралы"

Задание 1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана линиями:

$$y = 4x^2 + 3x + 5,\ 23x - y + 205 = 0.$$

Вычислить любой из найденных интегралов для случая $f(x;y) = 1$.

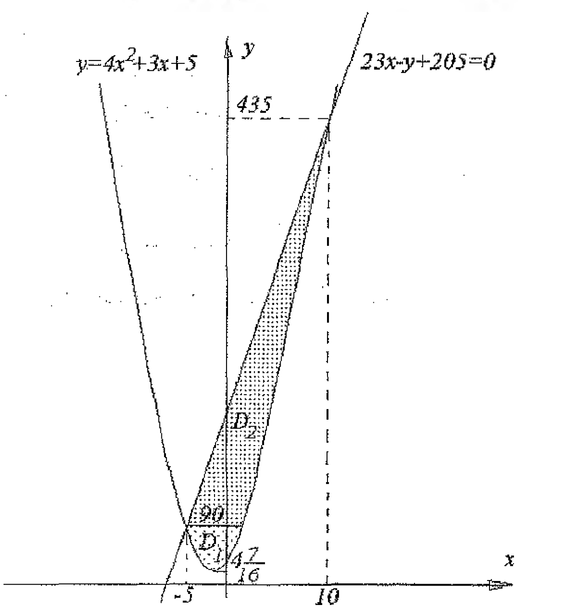
Решение: Будем называть область D правильной относительно оси Oy, если она определяется системой неравенств: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. Двойной интеграл в этом случае вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy. \quad (1)$$

Область D будет правильной относительно оси Ox, если она определяется системой неравенств: $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$. В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx. \quad (1)$$

Построим область D на плоскости xOy. Данная область ограничена снизу



параболой $y = 4x^2 + 3x + 5$, сверху прямой $23x - y + 205 = 0$. Найдем их точки пересечения. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = 4x^2 + 3x + 5, \\ 23x - y + 205 = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения y и подставляя его в первое, получим квадратное уравнение

$$4x^2 - 20x - 200 = 0,$$

корнями которого являются $x_1 = -5$ и $x_2 = 10$. При этом $y_1 = 90$ и $y_2 = 435$. Область интегрирования D является правильной относительно оси Oy. Следовательно, согласно формуле (1), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-5}^{10} dx \int\limits_{4x^2+3x+5}^{23x+205} f(x;y)dy.$$

С другой стороны, данная область не является правильной относительно оси Ox. Поэтому разобьем ее на области являющиеся правильными относительно оси Ox. Так как правый участок границы области D задан двумя линиями $y=4x^2+3x+5$ и $23x-y+205=0$, то прямая $y=90$ разбивает ее на две области: D_1 и D_2, являющиеся правильными относительно оси Ox. Для того чтобы определить границы этих областей, преобразуем уравнение параболы, выделяя полный квадрат:

$$y=4x^2+3x+5 \quad \Leftrightarrow \quad y=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+5 \quad \Leftrightarrow$$

$$y=\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+5 \quad \Leftrightarrow \quad y=\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2+4\frac{7}{16}.$$

Отсюда находим координаты вершины параболы $\left(-\frac{3}{8};4\frac{7}{16}\right)$ и уравнения ветвей параболы: $x=-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}$ и $x=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}$.

В уравнении прямой выразим x через y: $x=\frac{y-205}{23}$.

Тогда, область D_1 определяется системой неравенств: $4\frac{7}{16}\le y\le 90$, $-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}\le x\le -\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}$. Область D_2 определяется системой неравенств: $90\le y\le 435$, $\frac{y-205}{23}\le x\le -\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}$.

Для представления двойного интеграла в виде повторных, воспользуемся формулой (2) по каждой из полученных областей:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{4\frac{7}{16}}^{90} dy \int\limits_{-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}}^{-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}} f(x;y)dx + \int\limits_{90}^{435} dy \int\limits_{\frac{y-205}{23}}^{-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}} f(x;y)dx.$$

Вычислить для случая $f(x;y)=1$ первый найденный интеграл:

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-5}^{10} dx \int\limits_{4x^2+3x+5}^{23x+205} dy = \int\limits_{-5}^{10} dx(y)\Big|_{4x^2+3x+5}^{23x+205} = \int\limits_{-5}^{10}\left((23x+205)-(4x^2+3x+5)\right)dx =$$

$$= \int_{-5}^{10} \left(-4x^2+20x+200\right)dx = \left(-\frac{4}{3}x^3+10x^2+200x\right)\Bigg|_{-5}^{10} =$$

$$= \left(-\frac{4}{3}\cdot 10^3+10\cdot 10^2+200\cdot 10\right)-\left(-\frac{4}{3}\cdot(-5)^3+10\cdot(-5)^2+200\cdot(-5)\right)=250.$$

Ответ: $\iint\limits_D dxdy = 250$;

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-5}^{10}dx\int_{4x^2+3x+5}^{23x+205} f(x;y)dy = \int_{4\frac{7}{16}}^{90}dy\int_{-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}}^{-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}} f(x;y)dx + \int_{90}^{435}dy\int_{\frac{y-205}{23}}^{-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{y-4\frac{7}{16}}} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить массу материальной пластины, занимающей область D плоскости xOy, если поверхностная плотность $\rho(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и границы области заданы уравнениями: $x^2+y^2=24y$ и $x^2+y^2=-24x$.

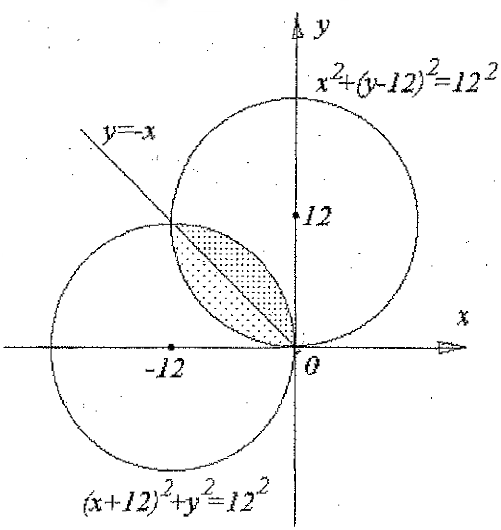
Решение: Как известно, масса материальной пластины с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$, занимающей область D, определяется по формуле:

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy.$$

Построим область D. Преобразуем уравнения линий, ограничивающих область:

$$x^2+y^2=24y \;\Rightarrow\; x^2+y^2-24y+144=144 \;\Rightarrow\; x^2+(y-12)^2=12^2,$$

$$x^2+y^2=-24x \;\Rightarrow\; x^2+24x+144+y^2=144 \;\Rightarrow\; (x+12)^2+y^2=12^2.$$



Видим, что это уравнения окружностей радиуса $r=12$ с центрами $(0;12)$ и $(-12;0)$, соответственно. В данном случае, так как мы имеем окружности, проходящие через начало координат удобнее вычислять двойной интеграл в полярных координатах.

Переход в двойном интеграле от декартовых $(x;y)$ к полярным $(r;\varphi)$ координатам осуществляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi,\; r\ge 0)$.

Область D преобразуется в область D', в которой уравнению границы $x^2+y^2=24y$ соответствует уравнение $r^2=24r\sin\varphi$ или $r=24\sin\varphi$; уравнению границы $x^2+y^2=-24x$ соответствует уравнение $r=-24\cos\varphi$. По рисунку видно, что r меняется от 0 до кривой, состоящей из двух частей: до $r=-24\cos\varphi$ при $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; до $r=24\sin\varphi$ при $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$. В полярных координатах поверхностная плотность имеет вид:

$$\rho(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\rho(r,\varphi)=\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}}=\cos\varphi$$

Таким образом,

$$m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}r\cos\varphi drd\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{-24\cos\varphi}r\cos\varphi dr+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{24\sin\varphi}r\cos\varphi dr=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\frac{r^2}{2}\cos\varphi\Bigg|_0^{-24\cos\varphi}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\frac{r^2}{2}\cos\varphi\Bigg|_0^{24\sin\varphi}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}288\cos^3\varphi d\varphi+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}288\sin^3\varphi d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}288(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}288(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}288(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}288(\cos^2\varphi-1)d\cos\varphi=$$

$$=288\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+288\left(\frac{\cos^3\varphi}{3}-\cos\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=288\left(1-\frac{1}{3}\right)+288\left(-\frac{1}{3}+1\right)=396.$$

Ответ: *396.*

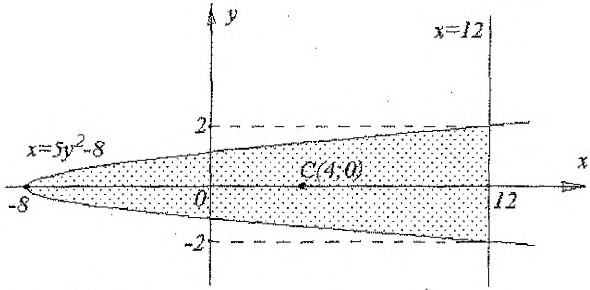
Задание 3. Вычислить координаты центра масс однородной ($\rho(x,y)=1$) материальной пластины D, ограниченной линиями: $x=5y^2-8$ и $x=12$.

Решение: Координаты центра масс $C(x_c;y_c)$ материальной пластины с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ определяются по формулам:

$$x_c=\frac{M_y}{m},\ y_c=\frac{M_x}{m},$$

где $m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ - масса пластины, а величины $M_x = \iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dxdy$, $M_y = \iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dxdy$ - статические моменты пластины D относительно осей Ox и Oy соответственно.

Построим область D на плоскости xOy. Данная область ограничена слева параболой $x = 5y^2 - 8$, справа – прямой $x = 12$. Их точками пересечения являются $(12;-2)$ и $(12;2)$.



Так как область D является правильной относительно оси Ox, то вычисляем искомые интегралы переходя к повторным:

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{2}dy\int_{5y^2-8}^{12}dx = \int_{-2}^{2}dy(x)\Big|_{5y^2-8}^{12} = \int_{-2}^{2}\left(12-(5y^2-8)\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(20-5y^2\right)dx =$$

$$= \left(20y - \frac{5}{3}y^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(20\cdot 2 - \frac{5}{3}\cdot 2^3\right) - \left(20\cdot(-2) - \frac{5}{3}\cdot(-2)^3\right) = 53\frac{1}{3},$$

$$M_x = \iint\limits_D ydxdy = \int_{-2}^{2}dy\int_{5y^2-8}^{12}ydx = \int_{-2}^{2}dy(yx)\Big|_{5y^2-8}^{12} = \int_{-2}^{2}\left(20y-5y^3\right)dx =$$

$$= \left(10y^2 - \frac{5}{4}y^4\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(10\cdot 2^2 - \frac{5}{4}\cdot 2^4\right) - \left(10\cdot(-2)^2 - \frac{5}{4}\cdot(-2)^4\right) = 0,$$

$$M_y = \iint\limits_D xdxdy = \int_{-2}^{2}dy\int_{5y^2-8}^{12}xdx = \int_{-2}^{2}dy\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{5y^2-8}^{12} = \int_{-2}^{2}\left(\frac{12^2}{2} - \frac{(5y^2-8)^2}{2}\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(40 + 40y^2 - \frac{25}{2}y^4\right)dx = \left(40y + \frac{40}{3}y^3 - \frac{5}{2}y^5\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(40\cdot 2 + \frac{40}{3}\cdot 2^3 - \frac{5}{2}\cdot 2^5\right) - \left(40\cdot(-2) + \frac{40}{3}\cdot(-2)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-2)^5\right) = 213\frac{1}{3}.$$

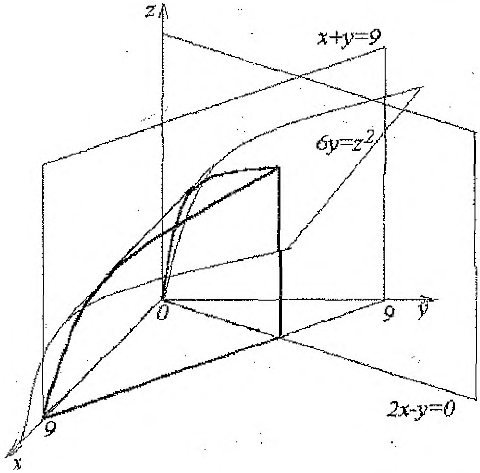
Найдем координаты центра масс:

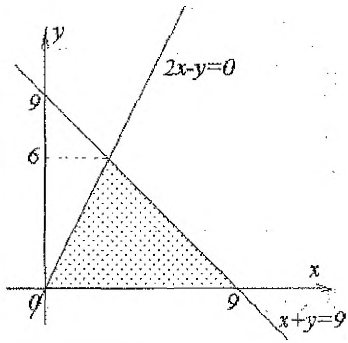
$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{213\frac{1}{3}}{53\frac{1}{3}} = \frac{\frac{640}{3}}{\frac{160}{3}} = 4,\ y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{0}{53\frac{1}{3}} = 0.$$

Ответ: $C(4;0)$.

Задание 4. Используя кратные интегралы вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x+y=9$, $2x-y=0$, $6y=z^2$, $z=0$ $(z\geq 0)$. Сделать чертеж.

Решение: Определим типы поверхностей, ограничивающих данное тело. Уравнения $x+y=9$ и $2x-y=0$ задают плоскости, параллельные оси Oz; $z=0$ – плоскость xOy. Уравнение $6y=z^2$ задает параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси Ox. Изобразим данное тело.





Объем тела будем вычислять с помощью тройного интеграла в соответствии с формулой $V=\iiint\limits_V dv=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}dz=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}dx\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}dz$, где V – объем области v; $a\leq x\leq b$, $\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)$, $\psi_1(x;y)\leq z\leq\psi_2(x;y)$ или $c\leq y\leq d$, $\phi_1(y)\leq x\leq\phi_2(y)$, $\psi_1(x;y)\leq z\leq\psi_2(x;y)$; область V – правильная относительно оси Oz.

В данной задаче V: $0\leq y\leq 6$, $\dfrac{y}{2}\leq x\leq 9-y$, $0\leq z\leq\sqrt{6y}$. Тогда

$$V=\iiint\limits_V dv=\int\limits_0^6 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{9-y}dx\int\limits_0^{\sqrt{6y}}dz=\int\limits_0^6 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{9-y}dx(z)\Big|_0^{\sqrt{6y}}=\int\limits_0^6 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{9-y}\sqrt{6y}dx=\int\limits_0^6 dy(x\sqrt{6y})\Big|_{\frac{y}{2}}^{9-y}=$$

$$=\int\limits_0^6\left((9-y)\sqrt{6y}-\frac{y}{2}\sqrt{6y}\right)dy=\int\limits_0^6\left(9\sqrt{6}y^{\frac{1}{2}}-\frac{3\sqrt{6}}{2}y^{\frac{3}{2}}\right)dy=\left(6\sqrt{6}y^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt{6}}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^6=$$

$$=6\sqrt{6}\cdot 6^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt{6}}{5}\cdot 6^{\frac{5}{2}}=86\frac{2}{5}.$$

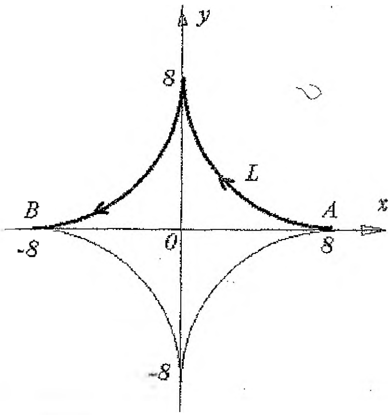
Ответ: $V=86\dfrac{2}{5}$ (куб.ед.).

Задание 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy$,

где линия L. – верхняя дуга астроиды $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ от т. $A(8;0)$ до т. $B(-8;0)$.

Сделать чертеж.

Решение: Выполним чертеж:



Найдем dx и dy:

$dx=d(8\cos^3 t)=24\cos^2 t(-\sin t)dt$,

$dy=d(8\sin^3 t)=24\sin^2 t\cdot\cos t dt$.

Подставляя координаты точек A и B в уравнение астроиды получаем, что при перемещении от точки $A(8;0)$ к точке $B(-8;0)$ параметр t меняется от 0 до π ($0\le t\le\pi$). Тогда

$$\int\limits_L \left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(\sqrt[3]{8\cos^3 t}+8\sin^3 t\right)\left(24\cos^2 t\right)(-\sin t)dt-\left(\sqrt[3]{8\sin^3 t}+8\cos^3 t\right)24\sin^2 t\cdot\cos t dt=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(\left(2\cos t+8\sin^3 t\right)\left(24\cos^2 t\right)(-\sin t)-\left(2\sin t+8\cos^3 t\right)24\sin^2 t\cdot\cos t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(-48\cos^3 t\cdot\sin t-192\cos^2 t\cdot\sin^4 t-48\cos t\cdot\sin^3 t-192\cos^4 t\cdot\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(-48\cos t\cdot\sin t(\cos^2 t+\sin^2 t)-192\cos^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(-48\cos t\cdot\sin t-192\cos^2 t\cdot\sin^2 t\right)dt=\int\limits_0^\pi\left(-24\sin 2t-48\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=12\cos 2t\Big|_0^\pi-24\int\limits_0^\pi(1-\cos 4t)dt=-(24t-6\sin 4t)\Big|_0^\pi=-24\pi.$$

Ответ: -24π.

Решение типового варианта контрольной работы № 6

"Ряды"

Задание 1. Исследовать числовые ряды на сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{4n+7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}$.

Решение:

а) Мы имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{4n+7}=\frac{3}{11}+\frac{4}{15}+\frac{5}{19}+\frac{6}{23}+\ldots$. Его члены положительны и убывают. Найдем к чему стремится его n-ый член при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{7}{n}}=\frac{1}{4}\neq 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда не выполняется и ряд расходится.

б) Мы имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}=\frac{3}{\sqrt{9}}+\frac{4}{\sqrt{24}}+\frac{5}{\sqrt{89}}+\frac{6}{\sqrt{264}}+\ldots$ Его члены положительны и убывают. Найдем к чему стремится его n-ый член при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{n^2+\frac{8}{n^2}}}=0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может как сходиться, так и расходиться.

Исследуем данный ряд по предельному признаку сравнения, согласно которому два ряда сходятся или расходятся одновременно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=t\neq 0$.

Так как в числителе максимальная степень n равна 1, а в знаменателе – 2, то сравнивать будем с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ $(\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n})$. Найдем предел отношения общих членов исходного и гармонического рядов при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}}=1\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, исходный ряд и гармонический сходятся или расходятся одновременно. Так как гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд.

в) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}=\frac{2}{21}+\frac{6}{72}+\frac{24}{243}+\frac{120}{810}+\ldots$ Его члены положительны и убывают. Так как в числителе общего члена ряда присутствует факториал, а в знаменателе степень, то при проверке стремления этого члена при стремлении n к бесконечности получим довольно сложный предел:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n},$$

то вычислять его не будем.

Исследуем данный ряд на сходимость по предельному признаку Д'Аламбера: если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то при $q<1$ данный ряд сходится, при $q>1$ – расходится, при $q=1$ – требуется исследовать по другим признакам.

Поскольку $a_n=\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+2)!}{(n+7)\cdot 3^{n+1}}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}}{\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}\cdot\frac{(n+6)\cdot 3^n}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+6)}{(n+7)3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+8n+12}{3n+21}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{21}{n^2}}=+\infty>1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

г) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}+\frac{1}{e^{\sqrt{3}}\sqrt{3}}+\frac{1}{2e^2}+\ldots$ Его члены положительны и убывают. Найдем к чему стремится его n-ый член при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}=0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может сходиться.

Исследуем этот ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши. В качестве функции $f(x)$ возьмем функцию $f(x)=\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ при $x \ge 1$. Эта функция на данном промежутке непрерывна и убывает, причем $f(n)=\dfrac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$. Тогда, по интегральному признаку, ряд будет сходиться или расходиться одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$. Вычислим этот интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}=t,\quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}},\ \begin{matrix} x=A, & t=\sqrt{A} \\ x=1, & t=1\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{A}}\frac{2dt}{e^t} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{2}{e^t}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{A}} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{2}{e^A}+\frac{2}{e}\right) = 0+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}.$$

Так как несобственный интеграл равен числу, то он сходится. Следовательно, исходный ряд – сходящийся.

д) Мы имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{11}+\dfrac{3}{21}-\dfrac{4}{35}+\ldots$. Так как любые два соседних члена этого ряда имеют разные знаки, то ряд – знакочередующийся.

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{2n^2+3}$. Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$. Найдем предел отношения их общих членов при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{2n^2+3}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\dfrac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд из абсолютных величин.

То есть исходный ряд не сходится абсолютно. Исследуем его на условную сходимость. По признаку Лейбница, если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ выполняются условия:

$$1)\ a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \text{ и } 2)\ \lim_{n\to\infty}a_n = 0,$$

то ряд сходится.

Исходный ряд знакочередующийся и удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) его общий член стремится к нулю при возрастании n ($\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}\right| = 0$);

2) члены ряда убывают по абсолютной величине

$$\left(\frac{1}{5}\ge\frac{2}{11}\ge\frac{3}{21}\ge\frac{4}{35}\ge\ldots\ge\frac{n}{2n^2+3}\ge\ldots\right).$$

Значит, ряд сходится. А так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

Ответ: а) ряд расходится; б) ряд расходится; в) ряд расходится; г) ряд сходится; г) ряд сходится условно.

Задание 2. Для степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}$ написать первые четыре члена ряда и исследовать его на сходимость.

Решение: Напишем первые четыре члена ряда, подставляя в формулу общего члена $u_n=\dfrac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}$ вместо n соответственно 1, 2, 3, 4:

$$u_1=\frac{17(x-9)}{12\cdot\sqrt[4]{3}},\ u_2=\frac{17(x-9)^2}{12^2\cdot\sqrt[4]{12}},\ u_3=\frac{17(x-9)^3}{12^3\cdot\sqrt[4]{33}},\ u_4=\frac{17(x-9)^4}{12^4\cdot\sqrt[4]{72}}.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}=\dfrac{17(x-9)}{12\cdot\sqrt[4]{3}}+\dfrac{17(x-9)^2}{12^2\cdot\sqrt[4]{12}}+\dfrac{17(x-9)^3}{12^3\cdot\sqrt[4]{33}}+\dfrac{17(x-9)^4}{12^4\cdot\sqrt[4]{72}}+\ldots$

Найдем интервал сходимости ряда, используя признак Д'Аламбера.

Поскольку

$$u_n=\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}},\ u_{n+1}=\frac{17(x-9)^{n+1}}{12^{n+1}\sqrt[4]{(n+1)^3+2n+2}}=\frac{17(x-9)^n\cdot(x-9)}{12^n\cdot12\sqrt[4]{n^3+3n^2+5n+3}},$$

то

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{17(x-9)^n\cdot(x-9)}{12^n\cdot12\sqrt[4]{n^3+3n^2+5n+3}}\cdot\frac{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}{17(x-9)^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-9)}{12}\cdot\sqrt[4]{\frac{n^3+2n}{n^3+3n^2+5n+3}}\right|=\frac{|x-9|}{12}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}}}=\frac{|x-9|}{12}.$$

Найдем значения x при которых $q<1$ и данный ряд сходится:

$$\frac{|x-9|}{12}<1\ \Leftrightarrow\ |x-9|<12\ \Leftrightarrow\ -12<x-9<12\ \Leftrightarrow\ -3<x<21.$$

Следовательно, на интервале $(-3;21)$ данный ряд сходится.

Исследуем ряд на концах интервала.

При $x=21$ получим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{17\cdot 12^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{17}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$. Сравним этот ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$, который расходится. Найдем предел отношения их общих членов при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{17}{\sqrt[4]{n^3+2n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{17n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{n^3+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{17}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n^2}}}=17\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, данный ряд расходится.

При $x=-3$ получим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{17(-12)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{17(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$, который является знакочередующимся. Проверим для него выполнение условий признака Лейбница:

1) его общий член стремится к нулю при возрастании n ($\lim_{n\to\infty}\left|\frac{17(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2n}}\right|=0$);

2) члены ряда убывают по абсолютной величине ($\frac{17}{\sqrt[4]{3}}>\frac{17}{\sqrt[4]{12}}>\frac{17}{\sqrt[4]{33}}>\frac{17}{\sqrt[4]{72}}>\ldots$).

Значит, ряд сходится (*условно*, так как ряд из абсолютных величин расходится).

Прибавляя точку $x=-3$ к интервалу сходимости, получим область сходимости исходного ряда: $[-3;21)$.

Ответ: область сходимости исходного ряда: $[-3;21)$.

Задание 3: Найти пять первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=y^2+x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0.5$.

Решение: I вариант. Предположим, что решение данного уравнения раскладывается в степенной ряд: $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

Так как $y(0)=0.5$ по условию, то $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

Производная в этом случае имеет вид: $y'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$.

Подставим полученные разложения в исходное уравнение

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots=(0.5+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots)^2+x^2.$$

Приведем подобные члены и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^3 + ... = 0.25 + 2\cdot 0.5\cdot a_1x + (2\cdot 0.5\cdot a_2 + a_1^2)x^2 +$$
$$+ (2\cdot a_1\cdot a_2 + 2\cdot 0.5\cdot a_3)x^3 + ... + x^2,$$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^3 + ... = 0.25 + a_1x + (a_2 + a_1^2 + 1)x^2 +$$
$$+ (2\cdot a_1\cdot a_2 + a_3)x^3 + ...$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.25 \quad , \\ 2a_2 = a_1 \quad , \\ 3a_3 = a_2 + a_1^2 + 1 \quad , \\ 4a_4 = 2a_1a_2 + a_3 \quad , \\ \quad ..... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.25 \quad ; \\ a_2 = 0.125 \quad , \\ a_3 \approx 0.3958 \quad , \\ a_4 \approx 0.114575 \quad , \\ \quad ..... \quad . \end{cases}$$

Таким образом, решение данного уравнения раскладывается в степенной ряд:

$$y(x) = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.3958x^3 + 0.114575x^4 + ...$$

II вариант. Будем искать решение дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена: $y(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$

Из условия $y' = y^2 + x^2$, полагая $x = 0$, $y = 0.5$ получим $y'(0) = 0.5^2 + 0^2 = 0.25$.

Продифференцируем уравнение $y' = y^2 + x^2$ по x. Получим

$$y'' = 2yy' + 2x \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 2\cdot 0.5\cdot 0.25 + 2\cdot 0 = 0.25.$$

Дифференцируя далее, находим последовательно:

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 2\cdot 0.5\cdot 0.25 + 2\cdot 0.25^2 + 2 = 2.375;$$

$$y^{IV} = 2yy''' + 6y'y'' \quad \Rightarrow \quad y^{IV}(0) = 2\cdot 0.5\cdot 2.375 + 6\cdot 0.25\cdot 0.25 = 2.75; ... .$$

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид:

$$y(x) = 0.5 + \frac{0.25}{1}x + \frac{0.25}{2}x^2 + \frac{2.375}{6}x^3 + \frac{2.75}{24}x^4 + ... \text{ или}$$

$$y(x) = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.3958x^3 + 0.11458x^4 + ...$$

Ответ: $y(x) = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.3958x^3 + 0.11458x^4 + ...$

Задание 4: Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{32 + x^5}}$ с точностью $0,001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав почленно.

Решение: Для решения данного задания используем разложение в ряд:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$$

Так как $\frac{1}{\sqrt[5]{32+x^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{32\cdot\left(1+\frac{x^5}{32}\right)}}=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^5\right)^{-\frac{1}{5}}$, то подставляя в разложение

вместо $m \to -\frac{1}{5}$ и вместо $x \to \left(\frac{x}{2}\right)^5$, получим

$$\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^5\right)^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}+1)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^{10}-\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}+1)(\frac{1}{5}+2)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^{15}+\ldots=$$

$$=1-\frac{x^5}{5\cdot 2^5}+\frac{6\cdot x^{10}}{2\cdot 5^2\cdot 2^{10}}-\frac{6\cdot 11\cdot x^{15}}{6\cdot 5^3\cdot 2^{15}}+\ldots .$$

Заменяя в интеграле функцию на ее разложение, получим

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[5]{32+x^5}}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{x^5}{5\cdot 2^5}+\frac{6\cdot x^{10}}{2\cdot 5^2\cdot 2^{10}}-\frac{6\cdot 11\cdot x^{15}}{6\cdot 5^3\cdot 2^{15}}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{6\cdot x^{11}}{11\cdot 2\cdot 5^2\cdot 2^{10}}-\frac{6\cdot 11\cdot x^{16}}{16\cdot 6\cdot 5^3\cdot 2^{15}}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{6}{11\cdot 2\cdot 5^2\cdot 2^{10}}-\frac{6\cdot 11}{16\cdot 6\cdot 5^3\cdot 2^{15}}+\ldots\right).$$

Получили знакочередующийся ряд. Так как предел его n-го члена равен нулю при $n\to\infty$ и члены ряда убывают по абсолютной величине, то этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Значит, его n-ый остаток не превышает по абсолютной величине первого отброшенного члена. Видим, что третий член меньше указанной степени точности: $\frac{6}{11\cdot 2\cdot 5^2\cdot 2^{10}}<\frac{1}{1000}$.

Следовательно, достаточно взять сумму двух первых членов:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[5]{32+x^5}}\approx\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{960}\right)=\frac{959}{1920}\approx 0{,}4995$$

Ответ: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[5]{32+x^5}}\approx 0{,}4995.$

Учебно-методическая литература по дисциплине "Высшая математика".

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1985 г., т. I, II.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика., ч.3-4, Минск, ВШ, 1984-1988 г.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1985 г.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). М., Наука, 1981 г., ч. I, II.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко), Минск, ВШ, 1991, ч. 3.

Дополнительная литература.

6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1, 2. Минск, ВШ, 1988.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, ВШ, 1988.
8. Гусак А.А. Справочник по высшей математике. Минск, Навука і тэхніка, 1991.
9. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. Минск, 1988.
10. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ВШ,1983.
11. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. М., ВШ, 1983.

Учебное издание

Составители: Санюкевич Александр Викторович
Мороз Людмила Трофимовна

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

РЯДЫ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по разделам «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: А.В. Санюкевич
Редактор Т.В. Строкач

Подписано к печати 1.09.2001 г. Формат 60х84 $^1/_{16}$ Бумага писч. Гарнитура Times New Roman. Усл. п.л. 1,86 Уч. изд. л. 2,0 Тираж 150 экз Заказ № 518. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестского государственного технического университета». 224017, Брест, ул. Московская, 267.