Министерство образования Республики Беларусь

Брестский политехнический институт

Кафедра высшей математики

Методические указания

к выполнению курсовой работы по курсу «Высшая математика»
(для студентов специальностей Т 19.06, С 04.02)

Брест 1999

УДК 519.2 (076)

Методические указания предназначены для пользования при выполнении курсовой работы по высшей математике студентами специальностей Т 19.06, С 04.02 факультета ВиГ.

Составители: О.К. Денисович, ассистент,
И.В. Лизунова, доцент.

Рецензент: В.Ф. Савчук

Методические указания содержат решения некоторых задач, включенных в курсовую работу для студентов специальностей Т.19.06:

Задача I. Определение максимального потока.
Задача III. Приложения теории корреляции к статистической обработке расходов воды двух рек.

и специальности С.04.02:

Задача II. Построение и расчет сетевого графика строительства гидротехнического сооружения.
Задача III. Приложения теории корреляции к статистической обработке расходов воды двух рек.

Методические указания могут быть использованы в качестве образца для решения и оформления соответствующих заданий курсовой работы.

Задача по статистической обработке экспериментальных данных, включенная в курсовую работу обеих специальностей, описана в "Методических указаниях к выполнению курсовой работы по курсу «Высшая математика» для студентов всех специальностей", Брест, 1997.

I. Определение максимального потока в сети.

Сеть задана матрицей инциденций

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	u_{19}
x_1	1	1	1	1															
x_2	1				1	1	1												
x_3		1						1											
x_4			1		1				1	1	1	1							
x_5				1				1	1				1	1					
x_6						1				1					1		1		
x_7							1								1	1			
x_8											1		1					1	
x_9														1					1
x_{10}												1				1	1	1	1
	4	*8*	*2*	*5*	*5*	*2*	*1*	*7*	*3*	*1*	*6*	*3*	*9*	*4*	*4*	*5*	*7*	*8*	*7*

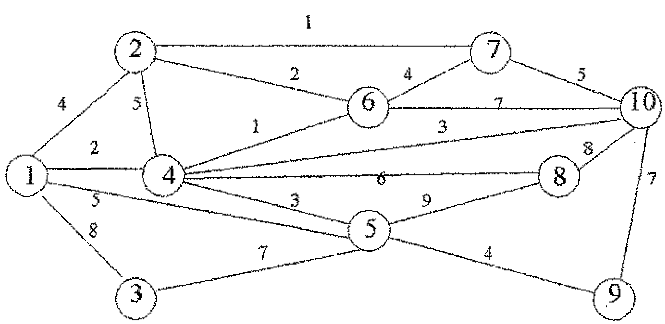
В последней строке таблицы задана матрица пропускных способностей дуг.

Требуется:

1) Построить граф сети, отметив пропускные способности дуг.
2) Предполагая, что пропускные способности дуг в обеих направлениях одинаковы, сформировать начальный поток X^0, направленный от источника I в сток S и записать его в матричном виде.
3) Сформировать поток максимальной мощности, направляемый от источника I в сток S.
4) Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

---

1) Граф, заданный матрицей инциденций имеет 10 вершин и 19 ребер. Вершины будем изображать кружками, внутри которых проставим номера вершин. Ребра строим согласно матрице инциденций. Соединяя вершины x_1 и x_2 получим ребро u_1, соединяя x_1 и x_3 – ребро u_2 и т. д. Над каждой дугой проставим её пропускную способность. Получим граф



Составим матрицу пропускных способностей дуг, считая пропускные способности в обеих направлениях одинаковыми.

Матрица R

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	8	2	5	0	0	0	0	0
2	4	0	0	5	0	2	1	0	0	0
3	8	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	2	5	0	0	3	1	0	6	0	3
5	5	0	7	3	0	0	0	9	4	0
6	0	2	0	1	0	0	4	0	0	7
7	0	1	0	0	0	4	0	0	0	5
8	0	0	0	6	9	0	0	0	0	8
9	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7
10	0	0	0	3	0	7	5	8	7	0

2) Сформируем начальный поток X^0. Сделаем это, например, следующим образом. По пути 1-2-7-10 пропустим 1 ед., по пути 1-2-6-10 – 2 ед., по пути 1-3-5-8-10 – 7 ед., по пути 1-4-10 – 2 ед., по пути 1-5-9-10 – 4 ед. В результате потоки x_{ij} по ребрам сети будут равны: $x_{12}=3$, $x_{13}=7$, $x_{14}=2$, $x_{15}=4$, $x_{26}=2$, $x_{27}=1$, $x_{35}=7$, $x_{4\,10}=2$, $x_{58}=7$, $x_{59}=4$, $x_{6\,10}=2$, $x_{7\,10}=1$, $x_{8\,10}=7$, $x_{9\,10}=4$. Потоки по остальным ребрам сети равны нулю. Совокупность перечисленных потоков по ребрам и составляет поток X^0 по сети. Легко видеть, что поток по каждому ребру не превышает пропускную способность ребра и количество вещества втекающего в вершину равно количеству вещества вытекающего из нее.

Запишем начальный поток X^0 в матричном виде:

Матрица X^0

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	7	2	4	0	0	0	0	0
2	-3	0	0	0	0	2	1	0	0	0
3	-7	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	-4	0	-7	0	0	0	0	7	4	0
6	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	2
7	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	-7	0	0	0	0	7
9	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	4
10	0	0	0	-2	0	-2	-1	-7	-4	0

Мощность этого потока равна 3+7+2+4=2+2+1+7+4=16 ед.

3) Составим матрицу R-X^0, элементы r_{ij}-x_{ij} которой позволяют судить о ненасыщенности ребер сети. Насыщенным ребрам соответствуют нулевые элементы матрицы R-X^0, а ненасыщенным – ненулевые.

Матрица $R\text{-}X^0$

i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
2	7	0	0	5	0	0	0	0	0	0
3	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	5	0	0	3	1	0	6	0	1
5	9	0	14	3	0	0	0	2	0	0
6	0	4	0	1	0	0	4	0	0	5
7	0	2	0	0	0	4	0	0	0	4
8	0	0	0	6	16	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	8	0	0	0	0	3
10	0	0	0	5	0	9	6	15	11	0

Зная матрицу $R\text{-}X^0$, можно сформировать подмножество A вершин, в которые можно попасть из источника I, двигаясь только по ненасыщенным дугам. Вершины подмножества A выделяют постепенно, начиная с источника I. Просматриваем первую строку матрицы $R\text{-}X^0$ и выписываем номера вершин, соответствующих ненулевым элементам строки. Это и будут вершины, в которые можно попасть из источника I, перемещаясь по ненасыщенным дугам. В нашем случае: I ‖ 2,3,5.

Далее рассматриваем каждую из вершин полученного списка и составляем для нее аналогичный список. При этом вершины, встречавшиеся в прежних списках, повторно не выписываются: 2 ‖ 4, 3 ‖ ., 4 ‖ 6,8,10.

Так как в подмножество A попал сток S (он оказался в списке вершины 4), то поток X^0 немаксимален. Существует путь из источника I в сток S состоящий из ненасыщенных ребер: (1,2), (2,4), (4,10), по которому возможно увеличение потока. По ребру (1,2) поток можно увеличить на 1 ед., по всему пути возможно увеличение потока на величину $\Delta=\min(1;5;1)=1$.

Для построения матрицы нового потока X к соответствующим элементам x^0_{ij} матрицы X^0 прибавляется найденное значение Δ. Получим матрицу X^1

i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	0	4	7	2	4	0	0	0	0	0
2	-4	0	0	1	0	2	1	0	0	0
3	-7	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0	3
5	-4	0	-7	0	0	0	0	7	4	0
6	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	2
7	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	-7	0	0	0	0	7
9	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	4
10	0	0	0	-3	0	-2	-1	-7	-4	0

Мощность потока стала равной 16+1=17 ед.
Построенный поток X^1 вновь проверяем на оптимальность. С этой целью вновь составляем матрицу $R\text{-}X^1$.

i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	8	0	0	4	0	0	0	0	0	0
3	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	6	0	0	3	1	0	6	0	0
5	9	0	14	3	0	0	0	2	0	0
6	0	4	0	1	0	0	4	0	0	5
7	0	2	0	0	0	4	0	0	0	4
8	0	0	0	6	16	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	8	0	0	0	0	3
10	0	0	0	6	0	9	6	15	11	0

По матрице $R\text{-}X^1$ составим списки вершин, достижимых из источника *1* по ненасыщенным путям. В результате получим такие списки:

1 ‖ 3,5; 3 ‖ . ; 5 ‖ 4,8; 4 ‖ 6; 6 ‖ 2,7,10.

Так как сток *S* вновь попал в список вершин, то поток X^1 немаксимален и возможно его увеличение по пути: (1,5), (5,4), (4,6), (6,10). Рассматривая возможное увеличение потока по каждому из ненасыщенных ребер, образующих этот путь, находим, что по всему пути поток можно увеличить на Δ=min(1,3,1,5)=1. Прибавляя Δ к соответствующим элементам x^1_{ij} матрицы X^1, получим поток X^2,…

Матрица X^2

i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	0	4	7	2	5	0	0	0	0	0
2	-4	0	0	1	0	2	1	0	0	0
3	-7	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	-2	-1	0	0	-1	1	0	0	0	3
5	-5	0	-7	1	0	0	0	7	4	0
6	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	3
7	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	-7	0	0	0	0	7
9	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	4
10	0	0	0	-3	0	-3	-1	-7	-4	0

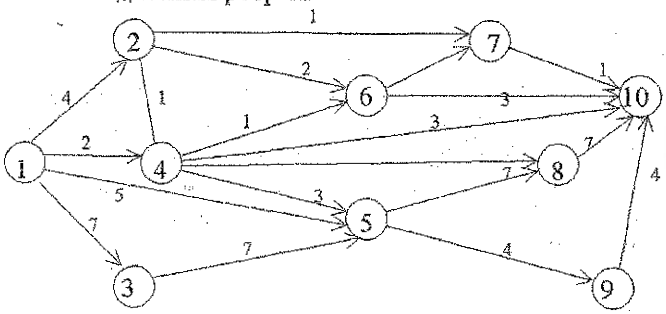
Находим матрицу $R\text{-}X^2$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	8	0	0	4	0	0	0	0	0	0
3	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	6	0	0	4	0	0	6	0	0
5	10	0	14	2	0	0	0	2	0	0
6	0	4	0	2	0	0	4	0	0	4
7	0	2	0	0	0	4	0	0	0	4
8	0	0	0	6	16	0	0	0	0	1
9	0	0	0	8	0	0	0	0	0	3
10	0	0	0	6	0	10	6	15	11	0

Так как в список вершин, составленный по матрице $R\text{-}X^2$:

1 ‖ 3; 3 ‖ .

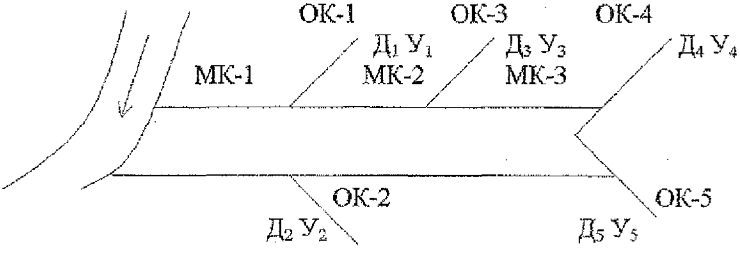
не входит сток S, то поток X^2 максимален. Его мощность равна f_{max}=17+1=18 ед. Нанесем поток X^2 на сеть с указанием направления потоков по отдельным ребрам.



4) Используя списки, составленные по матрице $R\text{-}X^2$ выделим подмножества A и B, на которые оказалось разбито множество всех вершин: $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$. Выделим ребра, образующие разрез A/B минимальной пропускной способности: (1,2), (1,4), (1,5), (3,5).

II. Построение и расчет сетевого графика строительства гидротехнического сооружения.

1) Составить модель сетевого графика строительства осушительно-увлажнительной системы



МК – магистральный канал,

ОК – открытый коллектор,

Д – закрытый дренаж,

У – освоение участка (вспашка, разделка пласта, дискование, выравнивание)

Затраты времени даны в табл.1.

Таблица 1.

N	МК	ОК	Д	У
1	20	4	2	6
2	14	10	10	5
3	12	16	8	4
4		14	9	3
5		30	11	2

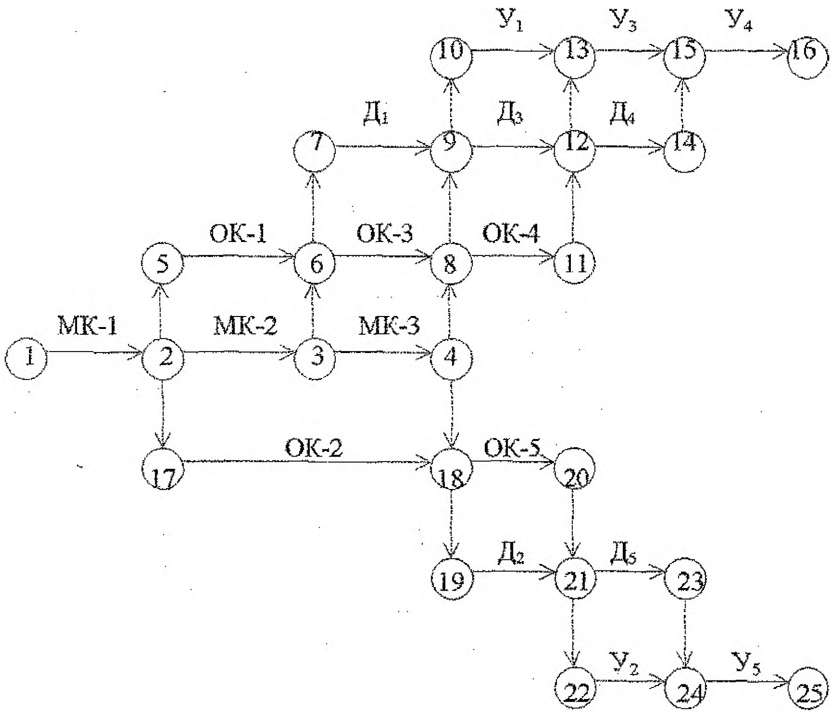
2) Выполнить расчет сетевого графика четырехсекторным способом
   а) найти ранние сроки наступления событий,
   б) найти поздние сроки наступления событий,
   в) найти резерв времени,
   г) найти критический путь,
   д) найти время выполнения проекта

---

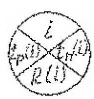
1) При составлении сетевого графика под работой будем понимать строительство магистрального канала, строительство открытого коллектора, выполнение закрытого дренажа, освоение участка. Причем работы выполняются последовательно друг за другом. На сетевом графике работу будем изображать направленными отрезками, под которыми проставим сроки выполнения работ. Если работа не требует затрат времени (фиктивная работа), то её будем изображать штриховой линией. Под событием будем понимать результат завершения одной

или нескольких работ. На сетевом графике события будем изображать кружками, в которых укажем порядковый номер события.

Составим модель сетевого графика согласно плану осушительно-увлажнительной системы и порядка выполнения работ.



2) Произведем расчет сетевого графика четырехсекторным способом. Каждый кружок, моделирующий событие, разделим диаметрами на четыре сектора. В верхнем секторе запишем номер i события, в левом секторе будем записывать ранний срок $t_p(i)$ наступления события i, в правом – поздний срок $t_н(i)$, в нижнем – резерв $R(i)$ времени события:



а) Ранний срок $t_p(j)$ совершения события j – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+} (t_p(i) + t(i,j)),$$

где U_j^+ – множество работ, заканчивающихся j-м событием;
$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i,j);

$t(i,j)$ – продолжительность работы (i,j). Предполагается, что $t_p(1)=0$, $t_p(S)=t_{кр}$.

При вычислении ранних сроков свершения событий будем перемещаться по сетевому графику от исходного события 1 вправо, по мере возрастания номеров событий. Ранние сроки будем записывать в левых секторах кружков.

$t_p(1)=0$,
$t_p(2)=\max(t_p(1)+t(1,2)) = 0+20 = 20$,
$t_p(3)=\max(t_p(2)+t(2,3)) = 20+14 = 34$,
$t_p(4)=\max(t_p(3)+t(3,4)) = 34+12 = 46$,
$t_p(5)=\max(t_p(2)+t(2,5)) = 20+0 = 20$,
$t_p(6)=\max(t_p(5)+t(5,6),\ t_p(3)+t(3,6)) = \max(20+0,\ 34+0) = 34$,
$t_p(7)=\max(t_p(6)+t(6,7)) = 34+0 = 34$,
$t_p(8)=\max(t_p(4)+t(4,8),\ t_p(6)+t(6,8)) = \max(46+0,\ 34+16) = 50$,
$t_p(9)=\max(t_p(8)+t(8,9),\ t_p(7)+t(7,9)) = \max(50+0,\ 34+2) = 50$,
$t_p(10)=\max(t_p(9)+t(9,10)) = 50+0 = 50$,
$t_p(11)=\max(t_p(8)+t(8,11)) = 50+14 = 64$,
$t_p(12)=\max(t_p(11)+t(11,12),\ t_p(9)+t(9,12)) = \max(64+0,\ 50+8) = 64$,
$t_p(13)=\max(t_p(12)+t(12,13),\ t_p(10)+t(10,13)) = \max(64+0,\ 50+6) = 64$,
$t_p(14)=\max(t_p(12)+t(12,14)) = 64+9 = 73$,
$t_p(15)=\max(t_p(14)+t(14,15),\ t_p(13)+t(13,15)) = \max(73+0,\ 64+4) = 73$,
$t_p(16)=\max(t_p(15)+t(15,16)) = 73+3 = 76$,
$t_p(17)=\max(t_p(2)+t(2,17)) = 20+0 = 20$,
$t_p(18)=\max(t_p(17)+t(17,18),\ t_p(4)+t(4,8)) = \max(20+10,\ 46+0) = 46$,
$t_p(19)=\max(t_p(18)+t(18,19)) = 46+0 = 46$,
$t_p(20)=\max(t_p(18)+t(18,20)) = 46+30 = 76$,
$t_p(21)=\max(t_p(19)+t(19,21),\ t_p(20)+t(20,21)) = \max(46+10,\ 76+0) = 76$,
$t_p(22)=\max(t_p(21)+t(21,22)) = 76+0 = 76$,
$t_p(23)=\max(t_p(21)+t(21,23)) = 76+11 = 87$,
$t_p(24)=\max(t_p(22)+t(22,24),\ t_p(23)+t(23,24)) = \max(76+5,\ 87+0) = 87$,
$t_p(25)=\max(t_p(24)+t(24,25)) = 87+2 = 89$,
$t_p(26)=\max(t_p(25)+t(25,26)) = 89+0 = 89$.

б) Поздний срок $t_п(i)$ совершения события i – такой предельный момент, после которого остаётся ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием:

$$t_п(i) = \max_{(i,j)\in U_i^-} (t_п(j) - t(i,j)),$$

где U_j^- – множество работ, начинающихся i-м событием;
$t_п(i)$ –поздний срок свершения конечного события работы (i,j); Для завершающего события S предполагается, что $t_п(S)=t_p(S)$.

При вычислении поздних сроков свершения событий будем перемещаться по сетевому графику от завершающего события S влево, по мере убывания номеров событий. Поздние сроки будем записывать в правых секторах кружков.

$t_п(26) = 89$,
$t_п(25) = \min(t_п(26)\text{-}t(25,26)) = 89\text{-}0 = 89$,
$t_п(24) = \min(t_п(25)\text{-}t(24,25)) = 89\text{-}2 = 87$,
$t_п(23) = \min(t_п(24)\text{-}t(23,24)) = 87\text{-}0 = 87$,
$t_п(22) = \min(t_п(24)\text{-}t(22,24)) = 87\text{-}5 = 82$,
$t_п(21) = \min(t_п(23)\text{-}t(21,23),\ t_п(22)\text{-}t(21,22)) = \min(87\text{-}11,\ 82\text{-}0) = 76$,
$t_п(20) = \min(t_п(21)\text{-}t(20,21)) = 76\text{-}0 = 76$,
$t_п(19) = \min(t_п(21)\text{-}t(19,21)) = 76\text{-}10 = 66$,
$t_п(18) = \min(t_п(20)\text{-}t(18,20),\ t_п(19)\text{-}t(18,19)) = \min(76\text{-}30,\ 66\text{-}0) = 46$,
$t_п(17) = \min(t_п(18)\text{-}t(17,18)) = 46\text{-}10 = 36$,
$t_п(16) = \min(t_п(26)\text{-}t(16,26)) = 89\text{-}0 = 89$,
$t_п(15) = \min(t_п(16)\text{-}t(15,16)) = 89\text{-}3 = 86$,
$t_п(14) = \min(t_п(15)\text{-}t(14,15)) = 86\text{-}0 = 86$,
$t_п(13) = \min(t_п(15)\text{-}t(13,15)) = 86\text{-}4 = 82$,
$t_п(12) = \min(t_п(14)\text{-}t(12,14),\ t_п(13)\text{-}t(12,13)) = \min(86\text{-}9,\ 82\text{-}0) = 77$,
$t_п(11) = \min(t_п(12)\text{-}t(11,12)) = 77\text{-}10 = 67$,
$t_п(10) = \min(t_п(13)\text{-}t(10,13)) = 82\text{-}6 = 76$,
$t_п(9) = \min(t_п(12)\text{-}t(9,12),\ t_п(10)\text{-}t(9,10)) = \min(77\text{-}8,\ 76\text{-}0) = 69$,
$t_п(8) = \min(t_п(9)\text{-}t(8,9),\ t_п(11)\text{-}t(8,11)) = \min(69\text{-}0,\ 77\text{-}14) = 63$,
$t_п(7) = \min(t_п(9)\text{-}t(7,9)) = 69\text{-}2 = 67$,
$t_п(6) = \min(t_п(8)\text{-}t(6,8),\ t_п(7)\text{-}t(6,7)) = \min(63\text{-}16,\ 67\text{-}0) = 47$,
$t_п(5) = \min(t_п(6)\text{-}t(5,6)) = 47\text{-}4 = 43$,
$t_п(4) = \min(t_п(8)\text{-}t(4,8),\ t_п(18)\text{-}t(4,18)) = \min(63\text{-}0,\ 46\text{-}0) = 46$,
$t_п(3) = \min(t_п(4)\text{-}t(3,4),\ t_п(6)\text{-}t(3,6)) = \min(46\text{-}12,\ 47\text{-}0) = 34$,
$t_п(2) = \min(t_п(17)\text{-}t(2,17),\ t_п(5)\text{-}t(2,5),\ t_п(3)\text{-}t(2,3)) = 20$,
$t_п(1) = \min(t_п(2)\text{-}t(1,2)) = 20\text{-}20 = 0$,

в) Резерв времени $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задерживаться свершение события i без нарушения срока поступления завершенного события:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i)$$

Найдем резервы времени всех событий сетевого графика. Для этого из чисел, записанных в правых секторах кружков, вычитаем числа, записанные в левых секторах, и разность записываем в нижние секторы.

$R(1) = t_п(1) - t_р(1) = 0\text{-}0 = 0$
$R(2) = t_п(2) - t_р(2) = 20\text{-}20 = 0$
$R(3) = t_п(3) - t_р(3) = 34\text{-}34 = 0$
$R(4) = t_п(4) - t_р(4) = 46\text{-}46 = 0$

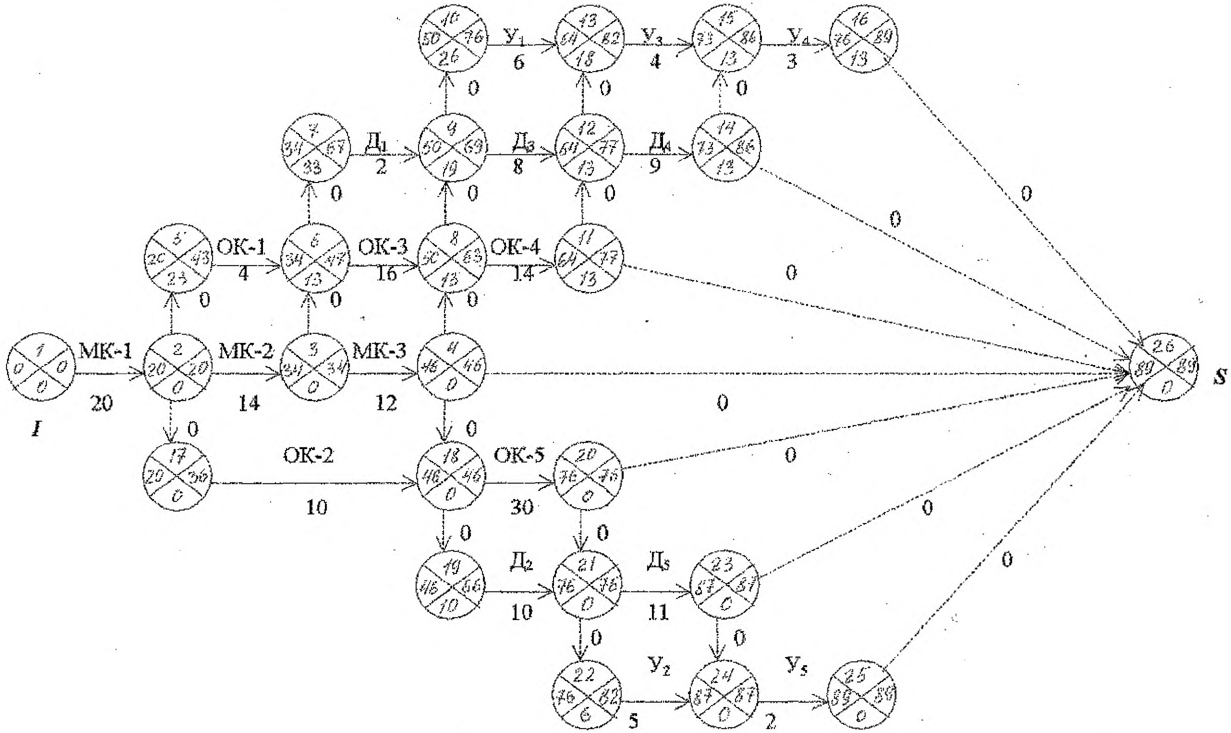
$R(5) = t_п(5) - t_р(5) = 43\text{-}20 = 23$
$R(6) = t_п(6) - t_р(6) = 47\text{-}34 = 13$
$R(7) = t_п(7) - t_р(7) = 67\text{-}34 = 33$
$R(8) = t_п(8) - t_р(8) = 63\text{-}50 = 13$
$R(9) = t_п(9) - t_р(9) = 69\text{-}50 = 19$
$R(10) = t_п(10) - t_р(10) = 76\text{-}50 = 26$
$R(11) = t_п(11) - t_р(11) = 77\text{-}64 = 13$
$R(12) = t_п(12) - t_р(12) = 77\text{-}64 = 13$
$R(13) = t_п(13) - t_р(13) = 82\text{-}64 = 18$
$R(14) = t_п(14) - t_р(14) = 86\text{-}73 = 13$
$R(15) = t_п(15) - t_р(15) = 86\text{-}73 = 13$
$R(16) = t_п(16) - t_р(16) = 89\text{-}76 = 13$
$R(17) = t_п(17) - t_р(17) = 36\text{-}20 = 16$
$R(18) = t_п(18) - t_р(18) = 46\text{-}46 = 0$
$R(19) = t_п(19) - t_р(19) = 66\text{-}46 = 20$
$R(20) = t_п(20) - t_р(20) = 76\text{-}76 = 0$
$R(21) = t_п(21) - t_р(21) = 76\text{-}76 = 0$
$R(22) = t_п(22) - t_р(22) = 82\text{-}76 = 6$
$R(23) = t_п(23) - t_р(23) = 87\text{-}87 = 0$
$R(24) = t_п(24) - t_р(24) = 87\text{-}87 = 0$
$R(25) = t_п(25) - t_р(25) = 89\text{-}89 = 0$
$R(26) = t_п(26) - t_р(26) = 89\text{-}89 = 0$

г) Критический путь – это наиболее протяженный по времени полный путь. Критических путей может быть несколько.

У критических событий резерв времени равен нулю, так как ранние и поздние сроки свершения совпадают. В нашем случае критическими являются события 1,2,3,4,18,20,21,23,24,25,26. Они определяют критический путь 1-2-3-4-18-20-21-23-24-25-26.

Выделим этот путь на сетевом графике.

д) Продолжительность критического пути определяет критический срок или время выполнения проекта. В примере $t_{кр}$= 89.



Сетевой график строительства осушительно-увлажнительной системы

III. Приложение теории корреляции к статистической обработке расходов воды двух рек

Даны среднегодовые расходы воды двух рек в м^3/сек:

Годы	Расход X воды реки I	Расход Y воды реки II	Годы	Расход X воды реки I	Расход Y воды реки II
1940		165	1955	51,2	137
1941		193	1956	67,1	166
1942		168	1957	70,7	173
1943		225	1958	78,5	180
1944		248	1959	98,6	230
1945		181	1960	100	228
1946		216	1961	73,0	180
1947		232	1962	65,4	171
1948		211	1963	69,9	173
1949		207	1964	54,9	147
1950		174	1965	79,3	192
1951		169	1966	75,9	183
1952		135	1967	62,1	149
1953		149	1968	62,0	153
1954	53,3	141	1969	76,0	184

Требуется:

1) Вычислить числовые характеристики общих частей рядов X и Y.
2) Оценить тесноту линейной корреляционной связи X и Y.
3) Проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции, приняв α=0,05.
4) Составить уравнения прямых регрессии Y на X и X на Y.
5) Построить корреляционное поле и графики прямых регрессии Y на X и X на Y.
6) Вычислить для короткого ряда расходы воды за недостающие годы.

---

1) Для нахождения числовых характеристик общих частей рядов X и Y составим расчетную таблицу:

Годы	**№ п/п**	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1954	1	53,3	141	2840,89	19881	7515,3
1955	2	51,2	137	2621,44	18769	7014,4
1956	3	67,1	166	4502,41	27556	1138,6
1957	4	70,7	173	4998,49	29929	12231,1
1958	5	78,5	180	6162,25	32400	14130
1959	6	98,6	230	9721,96	52900	22678
1960	7	100	228	10000	51984	22800

Годы	№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1961	8	73,0	180	5329	32400	13140
1962	9	65,4	171	4277,16	29241	11183,4
1963	10	69,9	173	4886,01	29929	12092,7
1964	11	54,9	147	3014,01	21609	8070,3
1965	12	79,3	192	6288,49	36864	15225,6
1966	13	75,9	183	5760,81	33489	13889,7
1967	14	62,1	149	3856,41	22201	9252,9
1968	15	62,0	153	3844	23409	9486
1969	16	76,0	184	5776	33856	13984
Σ		**1137,9**	**2787**	**83 879,33**	**496 417**	**203 832**

Вычислить числовые характеристики:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1137,9}{16} = 71,119$$

$$\bar{y}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{2787}{16} = 174,187$$

$$\overline{x_в^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \frac{83879,33}{16} = 5242,458$$

$$\overline{y_в^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} = \frac{496417}{16} = 31026,062$$

$$\sigma_в^2(X) = \overline{x_в^2} - \bar{x}_в^2 = 5242,458 - 71,119^2 = 5242,458 - 5057,912 = 184,546$$

$$\sigma_в(X) = 13,585$$

$$\sigma_в^2(Y) = \overline{y_в^2} - \bar{y}_в^2 = 31026,062 - 174,187^2 = 31026,062 - 30341,11 = 684,952$$

$$\sigma_в(Y) = 26,172$$

$$\mu(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в = \frac{203832}{16} - 71,119 \cdot 174,187 =$$

$$= 12739,5 - 12388,005 = 351,495$$

$$r_в = \frac{\mu(x,y)}{\sigma_в(X) \cdot \sigma_в(Y)} = \frac{351,495}{13,585 \cdot 26,172} = 0,989$$

2) Проверим гипотезу о существовании связи между X и Y. Если $|r_в|\sqrt{n-1}\geq 3$, то связь между случайными величинами X и Y достаточно вероятна. В нашем случае $|r_в|\sqrt{n-1}=0{,}989\sqrt{15}=3{,}83>3$, следовательно, между X и Y достаточно вероятна линейная корреляционная связь.
3) Проверяем гипотезу о значимости коэффициента корреляции. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $r_Г=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины, при конкурирующей гипотезе H_1: $r_Г\neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $T_{набл}=\dfrac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}}$ и по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости и числу степеней свободы $k=n-2$, найти критическую точку $t_{кр}(\alpha,k)$.

   Если $|T_{набл}|<t_{кр}$ – нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

   Если $|T_{набл}|>t_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

   Вычисляем:

$$T_{набл}=\frac{0{,}989\sqrt{15}}{\sqrt{1-0{,}989}}=\frac{0{,}989\sqrt{15}}{0{,}148}=25{,}881$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному $\alpha=0{,}05$ и числу степеней свободы $k=n-2=14$, находим $t_{кр}=2{,}14$.

Так как $T_{набл}>t_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем, т.е. $r_Г\neq 0$.

4) Составим уравнения прямых регрессии.

   Уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$\bar{y}_x-\bar{y}_в=r_в\frac{\sigma_в(Y)}{\sigma_в(X)}(x-\bar{x}_в),$$

   а X на Y:

$$\bar{x}_y-\bar{x}_в=r_в\frac{\sigma_в(X)}{\sigma_в(Y)}(y-\bar{y}_в).$$

   В примере

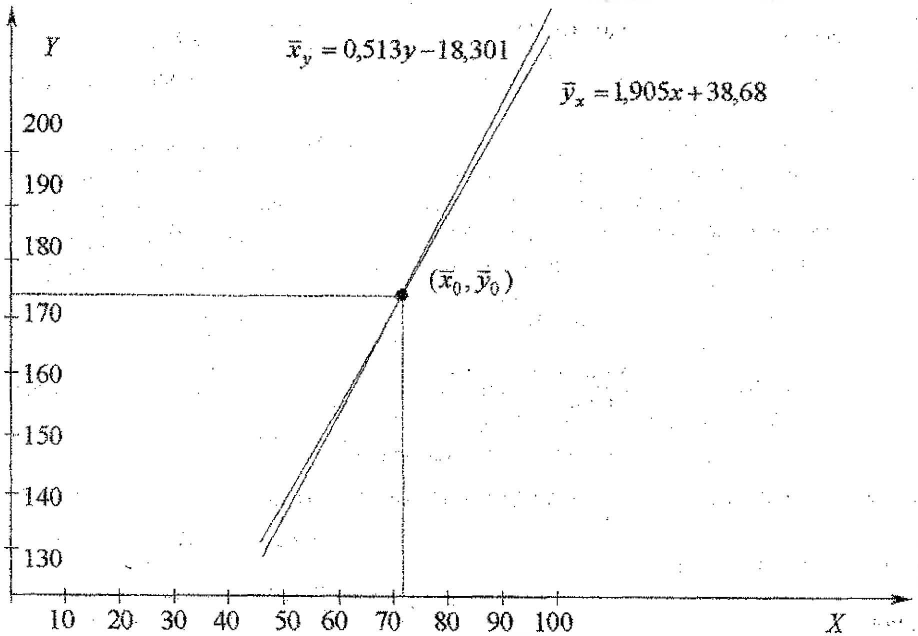
$$\bar{y}_x-174{,}187=0{,}989\frac{26{,}172}{13{,}585}(x-71{,}119)$$

$\bar{y}_x=1{,}905x+38{,}68$ – уравнение прямой регрессии Y на X,

$$\bar{x}_y-71{,}119=0{,}989\frac{13{,}585}{26{,}172}(y-174{,}187)$$

$\bar{x}_y=0{,}513y-18{,}301$ – уравнение прямой регрессии X на Y.

5) Построим корреляционное поле и прямые регрессии:



6) Вычислим для короткого ряда расходы воды за недостающие годы. Расходы воды за недостающие годы находим по уравнению прямой регрессии X на Y. Полная таблица будет иметь вид:

Годы	Расход X воды реки I	Расход Y воды реки II	Годы	Расход X воды реки I	Расход Y воды реки II
1940	66,34	165	1955	51,2	137
1941	80,71	193	1956	67,1	166
1942	67,88	168	1957	70,7	173
1943	97,12	225	1958	78,5	180
1944	108,92	248	1959	98,6	230
1945	74,55	181	1960	100	228
1946	92,51	216	1961	73,0	180
1947	100,72	232	1962	65,4	171
1948	89,94	211	1963	69,9	173
1949	87,89	207	1964	54,9	147
1950	70,96	174	1965	79,3	192
1951	68,40	169	1966	75,9	183
1952	50,95	135	1967	62,1	149
1953	58,14	149	1968	62,0	153
1954	53,3	141	1969	76,0	184

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Ольга Константиновна Денисович.
Ирина Владимировна Лизунова.

Методические указания к выполнению курсовой работы
по курсу «Высшая математика»
(для студентов специальностей Т 19.06, С 04.02)

Ответственный за выпуск: И.В. Лизунова
Редактор Т.В. Строкач

Подписано к печати 22.03. .99 г. Формат 60x84/16. Бумага писчая № 1.
Усл. п. л. 1,1 . Уч. изд. л. 1,25. Заказ № 207. Тираж 150 экз.
Бесплатно. Отпечатано на ротапринте Брестского политехнического института.
224017. Брест, ул. Московская, 267.