МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»
Кафедра высшей математики

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2002

УДК 519.2. (076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты двух контрольных работ по разделам "Векторный анализ", "Ряды", "Теория функций комплексной переменной" курса "Высшая математика", изучаемым студентами технических специальностей заочной формы обучения в третьем семестре, даны решения типовых вариантов и некоторые методические рекомендации полезные для успешного выполнения контрольных работ.

Составители: И. В. Лизунова, доцент,
Л. Т. Мороз, доцент.

СОДЕРЖАНИЕ

Организационно-методические указания

В контрольную работу №5 " Элементы векторного анализа. Ряды " включены шесть заданий: одно задание по теме 12 " Элементы векторного анализа ", одно по теме 13 " Числовые ряды ", три задания по теме 14 "Функциональные и степенные ряды" и одно по теме 15 " Ряды Фурье".

Контрольная работа №6 " Теория функций комплексной переменной " состоит из семи заданий по теме 17 " Элементы ТФКП " .

В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта.

Контрольная работа должна выполнятся студентом в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Условия задач необходимо записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта. Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

Каждую контрольную работу надо выполнять в отдельной тетради, оставляя поля.

Вопросы программы курса "Высшая математика"
1 семестр

Тема 12. Элементы векторного анализа.

Поверхностные интегралы первого рода.

Определение и свойства поверхностного интеграла. Вычисление поверхностного интеграла первого рода. Приложения поверхностного интеграла первого рода.

Поверхностные интегралы второго рода.

Ориентация поверхности. Нормаль к поверхности. Определение поверхностных интегралов второго рода. Свойства и вычисление поверхностного интеграла второго рода. Связь между поверхностными интегралами первого и второго родов.

Скалярные и векторные поля.

Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Векторное поле. Векторные линии. Производная по направлению. Градиент и его свойства.

Поток и дивергенция векторного поля.

Поток вектора. Инвариантное определение дивергенции. Гидромеханический смысл потока и дивергенции. Формула Остроградского-Гаусса.

Циркуляция и ротор векторного поля.

Циркуляция вектора. Инвариантное определение ротора. Формула Стокса. Плотность циркуляции в точке.

Простейшие векторные поля.

Операторы Гамильтона и Лапласа. Простейшие векторные поля. Понятие дифференциально-векторных операций второго порядка.

Тема 13. Числовые ряды.

Числовые ряды.

Числовой ряд и его сумма. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Сходимость рядов с положительными членами.

Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши.

Знакопеременные ряды.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Тема 14. Функциональные и степенные ряды.

Функциональные ряды.

Функциональный ряд и его область сходимости. Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Степенные ряды.

Степенной ряд. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

Ряды Тейлора.

Условия представления функции рядом Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

Приложения степенных рядов.

Ряды с комплексными числами.

Понятие ряда с комплексными числами. Свойства и сходимость рядов с комплексными числами. Степенной ряд в комплексной области.

Тема 15. Ряды Фурье.

Ряды Фурье.

Тригонометрический ряд Фурье для 2π - периодической функции. Теорема Дирихле (без доказательства). Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Ряды Фурье для функций, заданных на отрезке $[0,\pi]$.

Ряды Фурье.

Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины 2π. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом. Понятие о спектрах.

Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Ортогональные системы функций. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Тема 16. Уравнения математической физики.

Понятие об уравнениях математической физики.

Понятие об уравнении в частных производных. Основные типы уравнений матеметической физики. Постановка задач для уравнений матеметической физики.

Методы решения уравнений математической физики.

Метод Даламбера. Метод Фурье решения двумерного волнового уравнения.

Метод конечных разностей.

Метод сеток для уравнения теплопроводности. Решение задачи Дирихле методом конечных разностей.

Тема 17. Элементы ТФКП.

Функции комплексной переменной.

Понятие функции комплексной переменной. Геометрическая интерпретация. Предел и непрерывность функции в точке. Основные элементарные функции комплексной переменной.

Дифференцирование функции комплексной переменной.

Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Правильные и особые точки аналитической функции. Гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Понятие конформного отображения.

Интегрирование по комплексной переменной.

Интеграл от функции комплексной переменной, его свойства и вычисление. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Формулы для производных.

Ряды Тейлора и Лорана.

Ряд Тейлора в комплексной области. Ряд Лорана. Нули и изолированные особые точки аналитической функции.

Вычеты и их приложения.

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Вычет в абсолютно удаленной точке. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

" Элементы векторного анализа. Ряды"

Задание 1. Дано векторное поле $\vec{a}(M)$ и пирамида, образованная координатными плоскостями и плоскостью (P). Требуется:

1. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды двумя способами: а) используя определение потока, б) по формуле Остроградского-Гаусса.
2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости (P) с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двумя способами:

   а) используя определение циркуляции, б) по формуле Стокса.

1.01. $\vec{a}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, (P): $x+3y+z=3$;

1.02. $\vec{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+4z\vec{k}$, (P): $2x-y-2z=2$;

1.03. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, (P): $3x+3y+z=3$;

1.04. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+x\vec{k}$, (P): $x+y+z=2$;

1.05. $\vec{a}(M)=y\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, (P): $2x+y+2z=2$;

1.06. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y)\vec{k}$, (P): $x+2y+z=2$;

1.07. $\vec{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, (P): $2x-3y+z=6$;

1.08. $\vec{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, (P): $x-y+z=2$;

1.09. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, (P): $2x-y-2z=-2$;

1.10. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, (P): $x+2y+z=2$;

1.11. $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, (P): $2x+y+z=2$;

1.12. $\vec{a}(M)=y\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, (P): $2x+y+2z=2$;

1.13. $\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, (P): $3x+2y+2z=6$;

1.14. $\vec{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, (P): $2x+y+z=4$;

1.15. $\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+x\vec{j}+3z\vec{k}$, (P): $x+4y+2z=8$;

1.16. $\vec{a}(M)=4z\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, (P): $x-y+2z=2$;

1.17. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$, (P): $3x-2y+2z=6$;

1.18. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2z\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $2x+3y+z=6$;

1.19. $\vec{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+x\vec{k}$, (P): $x-y+z=2$;

1.20. $\vec{a}(M)=(2y-x)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, (P): $x+2y+2z=4$;

1.21. $\vec{a}(M)=2z\vec{i}+(x-y)\vec{j}+3x\vec{k}$, (P): $x+y+2z=2$;

1.22. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $x+y+2z=2$;

1.23. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+2x\vec{k}$, (P): $2x+2y+z=4$;

1.24. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $x+2y+z=2$;

1.25. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+2x\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $2x+y+3z=6$;

1.26. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+3y\vec{k}$, (P): $x+2y+2z=2$;

1.27. $\vec{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $x+3y+2z=6$;

1.28. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $2x+2y+z=2$;

1.29. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+2x\vec{k}$, (P): $3x+2y+z=6$;

1.30. $\vec{a}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, (P): $2x+y+2z=2$;

Задание 2. Исследовать сходимость числового ряда.

2.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

2.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+1}$

2.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$

2.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

2.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(2n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$

2.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$

2.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}$

2.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

2.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(2n+8)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}$

2.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+4)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$

2.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+8n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

2.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

2.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

2.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}$

2.15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$

2.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n+1}}$

2.17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2}{n^2+3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

2.18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n(n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 6^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$

2.19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+5}}$

2.20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n^3+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

2.21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+1}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

2.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$

2.23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n^2+4n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+1}$

2.24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}$

2.25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$

2.26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+4}$

2.27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

2.28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

2.29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

2.30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+5)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n\cdot 5^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+6}$

Задание 3. Дан степенной ряд $\sum\frac{a^n\cdot x^n}{b^n\cdot\sqrt[k]{n}}$

а) написать первые четыре члена ряда;

б) найти интервал сходимости ряда;

в) выявить вопрос о сходимости ряда на концах интервала.

Значения a, b, k даны в таблице:

№ варианта	a	b	k
1	2	3	4
2	2	7	3
3	3	4	2
4	3	5	3
5	5	2	3
6	5	7	4
7	6	5	3
8	7	2	2
9	8	3	4
10	7	2	3
11	5	6	2
12	9	2	3
13	8	3	5
14	9	2	4
15	8	7	3
16	7	6	6
17	7	9	4

№ варианта	a	b	k
18	6	7	3
19	5	8	2
20	6	5	4
21	5	8	3
22	5	7	4
23	4	7	3
24	4	9	2
25	3	8	3
26	4	9	2
27	3	5	4
28	4	3	3
29	5	6	4
30	6	7	5

Задание 4. Найти при первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$.

4.1. $y' = 3\cos x + y^2$, $y(0) = 1$;

4.2. $y' = 2y + y^2$, $y(0) = 3$;

4.3. $y' = 4\sin x + y^2$, $y(0) = 1$;

4.4. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 2$;

4.5. $y' = 2e^y + xy$, $y(0) = 0$;

4.6. $y' = e^x + y^2$; $y(0) = 0$;

4.7. $y' = 2e^y - xy$, $y(0) = 0$;

4.8. $y' = e^x + y$, $y(0) = 4$;

4.9. $y' = \sin x + 3y^2$, $y(0) = 1$;

4.10. $y' = x + x^2 + y^3$, $y(0) = 5$;

4.11. $y' = 2x^2 + y^3$, $y(0) = 3$;

4.12. $y' = 3x^2 - yx$, $y(0) = 3$;

4.13. $y' = xy - e^{2x}$, $y(0) = 0$;

4.14. $y' = 3xy^2 + y$, $y(0) = 1$;

4.15. $y' = x^2 y - 3x + 1$, $y(0) = 0$;

4.16. $y' = 3xy - e^x + 4$, $y(0) = 0$;

4.17. $y' = 2\sin x - x^2 y$, $y(0) = 1$;

4.18. $y' = xy^3 - 2x$, $y(0) = 2$;

4.19. $y' = 3xy - \sin x$, $y(0) = 2$;

4.20. $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 0$;

4.21. $y' = 2\sin x + xe^y + 2$, $y(0) = 1$;

4.22. $y' = 4xy^2 - x^3$, $y(0) = 2$;

4.23. $y' = 4xy^2 - 2x$, $y(0) = 3$;

4.24. $y' = 5xy^2 - e^x + 1$, $y(0) = 0$;

4.25. $y' = 4x^3 - xy^2$, $y(0) = 1$;

4.26. $y' = e^{3x} - \sin x$, $y(0) = 1$;

4.27. $y' = 3xy - \cos 3x$, $y(0) = 1$;

4.28. $y' = x^2 y + \sin 2x$, $y(0) = 2$;

4.29. $y' = 3xy^2 - \sin 3x$, $y(0) = 3$;

4.30. $y' = xy^2 + e^{3x}$, $y(0) = 2$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав почленно.

5.1.	$f(x)=e^{-\frac{x^2}{3}}$	$b=1$	5.2.	$f(x)=x\cdot arctg(x)$	$b=0,5$
5.3.	$f(x)=x\cdot\ln(1-x^2)$	$b=0,5$	5.4.	$f(x)=arctg(x^2)$	$b=0,5$
5.5.	$f(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}$	$b=0,5$	5.6.	$f(x)=\cos\sqrt{x}$	$b=1$
5.7.	$f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$	$b=0,5$	5.8.	$f(x)=x\cdot e^{-x}$	$b=0,5$
5.9.	$f(x)=\sin(x^2)$	$b=1$	5.10.	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$	$b=0,5$
5.11.	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	$b=1$	5.12.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$b=0,25$
5.13.	$f(x)=e^{-x^2}$	$b=1$	5.14.	$f(x)=\sqrt{1+x^3}$	$b=0,25$
5.15.	$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{x}{4}$	$b=1$	5.16.	$f(x)=\cos(x^2)$	$b=1$
5.17.	$f(x)=e^{-6x^2}$	$b=0,1$	5.18.	$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x}$	$b=0,1$
5.19.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$	$b=1,5$	5.20.	$f(x)=\sin(100x^2)$	$b=0,1$
5.21.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$	$b=0,5$	5.22.	$f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}$	$b=1$
5.23.	$f(x)=e^{-3x^2}$	$b=0,2$	5.24.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$	$b=1$
5.25.	$f(x)=\cos(25x^2)$	$b=0,2$	5.26.	$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$	$b=0,2$
5.27.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}}$	$b=2$	5.28.	$f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x}$	$b=0,1$
5.29.	$f(x)=\cos\left(\frac{5}{2}x\right)^2$	$b=0,4$	5.30.	$f(x)=\sqrt{1+x^3}$	$b=0,25$

Задание 6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $w = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

6.1.	$f(x)=\begin{cases}7x-10, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.16.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.2.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 3-8x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.17.	$f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.3.	$f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.18.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.4.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \dfrac{x}{5}-2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.19.	$f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.5.	$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{4}, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.20.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.6.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.21.	$f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.7.	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.22.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.8.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 4-9x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.23.	$f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.9.	$f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.24.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 3-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.10.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.25.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \dfrac{x}{2}+1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.11.	$f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.26.	$f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.12.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.27.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x+2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
6.13.	$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.28.	$f(x)=\begin{cases}-x+\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.14.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	6.29.	$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
6.15.	$f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$	6.30.	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6

"Теория функций комплексной переменной"

Задание 1. Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа

1. $(4-3i)^i$	2. $ch(3+\frac{\pi}{4}i)$	3. $\sin(\frac{\pi}{4}+i)$
4. $tg\frac{\pi}{2}i$	5. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$	6. $\cos(\frac{\pi}{4}-i)$
7. $Ln(-1-i)$	8. $\cos(\frac{\pi}{6}-i)$	9. $sh(1-\frac{\pi}{2}i)$
10. $\sin(\frac{\pi}{6}-i)$	11. $(-1-i)^{4i}$	12. $\cos(\frac{\pi}{2}+i)$
13. $\sin\ \pi i$	14. $tg\ \pi i$	15. $Ln(1+\sqrt{3}\ i)$
16. $Ln(1-i)$	17. $ch(2-\frac{\pi i}{6})$	18. $ch(1+\frac{\pi i}{3})$
19. $sh(2-\pi i)$	20. $sh(3+\frac{\pi i}{6})$	21. $Ln(\sqrt{3}+i)$
22. $(-1)^{4i}$	23. $Ln(1+i)$	24. $(-i)^{5i}$
25. $sh(1+\frac{\pi i}{2})$	26. $\cos(\frac{\pi}{3}+3i)$	27. $\cos(\frac{\pi}{6}+2i)$
28. $Ln6$	29. i^{3i}	30. $(-12+5i)^i$

Задание 2. Построить область, заданную неравенствами

1. $|z-1|\le 1, \quad |z+1|>2.$
2. $|z+i|\ge 1, \quad |z|<2.$
3. $|z-1-i|\le 1, \quad \operatorname{Im} z>1, \quad \operatorname{Re} z\ge 1.$
4. $|z-i|\le 2, \quad \operatorname{Re} z>1.$
5. $z\cdot\bar{z}\le 2, \quad \operatorname{Im} z>-1, \quad \operatorname{Re} z<1.$
6. $|z+i|\ge 1, \quad |z+i|<1.$
7. $|z-i|\le 1, \quad -\frac{\pi}{2}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{4}.$
8. $|z|-3\operatorname{Im} z\le 6.$
9. $|z-2-i|\le 1, \quad 1<\operatorname{Re} z\le 3, \ 0<\operatorname{Im} z\le 3.$
10. $3|z|-\operatorname{Re} z>12$

11. $1 < z \cdot \bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 1.$

12. $\operatorname{Re}(1+z) \le |z|$

13. $|z+i| > 1, \quad -\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-i) < 0$

14. $|z-i| < 1, \quad \arg z \ge \dfrac{\pi}{4}$

15. $|z| < 2, \quad -\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \dfrac{\pi}{4}$

16. $\arg(z+1-i) \le \dfrac{\pi}{4}$

17. $|z-1-i| \ge 1, \quad 0 \le \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z \le 2$

18. $|z+i| < 1, \quad -\dfrac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\dfrac{\pi}{4}$

19. $|z-1| > 1, \quad 0 \le \operatorname{Re} z < 3, \quad -1 \le \operatorname{Im} z < 0$

20. $|z| > 1, \quad 0 < \operatorname{Re} z \le 2, \quad -1 < \operatorname{Im} z \le 1$

21. $|z-i| \le 1, \quad 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$

22. $|z+i| \le 2, \quad |z-i| > 2$

23. $|z+1| < 1, \quad |z-i| \le 1$

24. $|z+i| < 2, \quad 0 < \operatorname{Re} z \le 1$

25. $|z+1| \ge 1, \quad |z+i| < 1$

26. $|z-i| < 1, \quad \arg z \ge \dfrac{\pi}{4}, \arg(z+1-i) \le \dfrac{\pi}{4}$

27. $1 < |z-1| \le 2, \quad \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z \ge 0$

28. $1 \le |z-i| < 2, \quad \operatorname{Re} z \le 0, \quad \operatorname{Im} z > 1$

29. $|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \ge 1, \quad \arg z < \dfrac{\pi}{4}$

30. $|z| > 1, \quad 0 < \operatorname{Re} z \le 2, \quad -1 < \operatorname{Im} z \le 1$

Задание 3. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

№	$u(x,y)$	$v(x,y)$	z_0
1	$3x^2y - y^3$	$3xy^2 - x^3$	$-i+1$
2	$e^{1+y}\cos x$	$-e^{1+y}\sin x$	$\dfrac{\pi}{4} + i$
3	$x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$	$3x^2y - y^3 + 2xy$	$\dfrac{2}{3}i$

4	$2xy-2x$	y^2-2y-x^2+1	i
5	$e^x(x\cos y-y\sin x)$	$e^x(x\sin y+y\cos y)$	$-1+i\pi$
6	x^2+2x-y^2	$2xy+2y$	i
7	$e^{-1-y}\cos x$	$e^{1-y}\sin x$	$\pi-i$
8	$e^{-x}\cos y$	$-e^{-x}\sin y$	i
9	x^2-y^2	$2xy$	$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
10	$2xy$	y^2-x^2	$-i$
11	$2x^2-2y^2+y$	$4xy-x$	$-1+i$
12	$e^{y^2-x^2}\cos 2xy$	$-e^{y^2-x^2}\sin 2xy$	i
13	x^3-3xy^2+3x	$3x^2y-y^3+3y-1$	$-1+i$
14	$x^3+3xy^2+x^2-y^2$	$3x^2y-y^3+2xy$	$1-i$
15	$e^{-1+2y}\cos 2x$	$-e^{1+2y}\sin 2x$	$\frac{\pi}{6}$
16	x^3-3xy^2+2x	$3x^2y-y^3+2y-1$	$2i$
17	$3xy^2-x^3$	y^3-3x^2y	$-1+i$
18	$-e^{1+y}\sin x$	$-e^{1+y}\cos x$	$-\frac{\pi}{4}-i$
19	$3x^2y-y^3+2xy$	$x^3-3xy^2+x^2-y^2$	$\frac{2}{3}i$
20	x^2-y^2-x	$2xy-y$	$5-4i$
21	y^2-2y-x^2+1	$2x-2xy$	$1-2i$
22	$2xy+2y$	y^2-x^2-2x	$1+2i$
23	$e^{-x}\sin y$	$e^{-x}\cos y$	πi
24	x^2-y^2-3x+1	$2xy-3y$	4
25	$2xy-3y$	x^2-y^2+3x-1	i
26	$4xy-x$	$2y^2-y-2x^2$	$1-i$
27	$3x^2y-y^3+3y-1$	$3xy^2-x^3-3x$	$\frac{1}{2}i$
28	$3x^2y-y^3+2xy$	$y^2-x^3-3xy^2-x^2$	$2+i$
29	$e^{1+2y}\sin 2x$	$e^{1+2y}\cos 2x$	$\frac{\pi}{3}$
30	$3x^2y-y^3+2x-1$	$3xy^2-x^3-2x$	$3+2i$

Задание 4. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

1. $u=x^2-y^2+x$, $f(0)=0$;
2. $v=e^{-y}\sin x+y$, $f(0)=1$;
3. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$;
4. $u=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$;
5. $v=1-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$;
6. $v=x^2-y^2-x$, $f(0)=0$;
7. $u=x^3-3xy+1$, $f(0)=1$;
8. $u=e^{-y}\cos x+x$, $f(0)=1$;
9. $v=3x^2y-y^3-y$, $f(0)=0$;
10. $v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=2$;
11. $u=1-e^x\sin y$, $f(0)=1+i$;
12. $v=x^2-y^2+2x+1$, $f(0)=i$;
13. $u=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$, $f(0)=1$;
14. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x$, $f(1)=2$;
15. $v=3x^2y-y^3$, $f(0)=1$;
16. $v=3xy^2-x^3$, $f(1)=0$;
17. $u=x^2-y^2-2y$, $f(0)=0$;
18. $v=e^x\cos y$, $f(0)=1+i$;
19. $u=y-2xy$, $f(0)=0$;
20. $v=2xy+y$, $f(0)=0$;
21. $v=2xy+2x$, $f(0)=0$;
22. $v=2xy-2y$, $f(0)=1$;
23. $v=2xy+x$, $f(0)=0$;
24. $u=e^{-y}\cos x$, $f(0)=1$;
25. $v=e^{-y}\sin x$, $f(0)=1$;
26. $u=-2xy-2y$, $f(0)=i$;
27. $u=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$, $f(0)=2$;
28. $v=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$, $f(0)=1$;
29. $v=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y$, $f(0)=2$;
30. $v=e^x(y\cos y+x\sin y)$, $f(0)=0$.

Задание 5. Вычислить интегралы

1. $\int\limits_\gamma z^2dz$, γ - отрезок прямой между точками $z_1=0, z_2=1+i$
2. $\int\limits_\gamma z^3e^{z^4}dz$, γ - ломаная ABC с вершинами $z_A=i, z_B=1, z_c=0$
3. $\int\limits_\gamma \dfrac{\bar z}{z}dz$, γ - граница области $(1<|z|<2, \operatorname{Re} z>0)$

4. $\int\limits_{\gamma} z\cdot\bar{z}dz$, $\gamma:(|z|=1, \operatorname{Im} z=0)$

5. $\int\limits_{\gamma}(\sin iz+z)dz$, $\gamma:(|z|=1, \operatorname{Re} z\geq 0)$

6. $\int\limits_{\gamma} z\operatorname{Im} z^2 dz$, $\gamma=AB$ - отрезок прямой между точками $z_A=0,\ z_B=1+i$

7. $\int\limits_{\gamma}(3z^2+2z)dz$, γ - дуга параболы $y=x^2$ между точками $z=1+i,\ z=0$

8. $\int\limits_{\gamma} e^{|z|^2}\operatorname{Im} zdz$, γ - отрезок прямой между точками $z=1+i,\ z=0$

9. $\int\limits_{\gamma}(z^3+\sin z)dz$, $\gamma:(|z|=1, \operatorname{Re} z\geq 0)$

10. $\int\limits_{\gamma} z\operatorname{Im} z^2 dz$, $\gamma:(|z|=1, -\pi\leq\arg\leq 0)$

11. $\int\limits_{\gamma} z^2 dz$, γ - отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1,\ z_2=i$

12. $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2}$, γ - дуга параболы $y=x^2$ между точками $z=1+i,\ z=2+4i$

13. $\oint\limits_{\gamma} z\operatorname{Re} zdz$, $\gamma:|z|=1$

14. $\int\limits_{\gamma}\frac{\bar{z}}{z}dz$, $\gamma=ABC$, $AB:(|z|=1, \operatorname{Im} z\geq 0)$, BC - отрезок с концами в точках $z_1=1,\ z_2=2$

15. $\int\limits_{\gamma}(2z^2+3z)dz$, γ - дуга параболы $y=x^2$ между точками $z=0,\ z=1+i$

16. $\int\limits_{\gamma}(3z^2-4z)dz$, γ - отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0,\ z_2=2-i$

17. $\int\limits_{0}^{1} z\cos zdz$

18. $\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=1,\ z_B=1-i$

19. $\int\limits_{L}(z+1)e^z dz$, $L:(|z|=1, \operatorname{Re} z\geq 0)$

20. $\int\limits_{ABC}|z|dz$, ABC - ломаная, $z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_c=1+i$

21. $\int\limits_{ABC}(z^2+\cos z)dz$, ABC - ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_c=i$

22. $\int\limits_{L} z\,\mathrm{Re}\,z^2 dz$, $L:(|z|=R, \mathrm{Im}\,z\geq 0)$

23. $\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz$, ABC - ломаная, $z_A=0, z_B=-1+i, z_c=i$

24. $\int\limits_{AB}(2z+1)dz$, $AB:\ (y=x^3, z_A=0, z_B=1+i)$

25. $\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz$, $AB:(|z|=1, \mathrm{Re}\,z\geq 0, \mathrm{Im}\,z\geq 0)$

26. $\int\limits_{L}(\cos iz+3z^2)dz$, $L:(|z|=1, \mathrm{Im}\,z\geq 0)$

27. $\int\limits_{L}|z|dz$, $L:(|z|=\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\leq \arg z\leq \frac{5\pi}{4})$

28. $\int\limits_{ABC}(\sin z+z)dz$, ABC - ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_c=2i$

29. $\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=R}\bar{z}dz$

30. $\int\limits_{AB}\mathrm{Im}\,z^2 dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=0, z_B=2+2i$

Задание 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в кольце K

1. $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $K:\ 2<|z|<3$
2. $f(z)=\frac{z+2}{z^2+2z-8}$, $K:\ 2<|z+2|<4$
3. $f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $K:\ 1<|z|<2$
4. $f(z)=\frac{2}{z^2-1}$, $K:\ 1<|z+2|<3$
5. $f(z)=\frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $K:\ 2<|z-1|<\infty$
6. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $K:\ 0<|z-i|<2$
7. $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $K:\ 0<|z-2|<1$

8. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $\quad K:\ 1<|z|<3$

9. $f(z)=(z^2+z)^{-1}$, $\quad K:\ 0<|z|<1$

10. $f(z)=\dfrac{4z-8}{(z+1)(z-3)}$, $\quad K:\ 3<|z|<\infty$

11. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $\quad K:\ 0<|z|<1$

12. $f(z)=\dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$; $\quad K:\ 3<|z|<+\infty$

13. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-4)}$, $\quad K:\ 1<|z|<4$

14. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $\quad K:\ 0<|z-2|<1$

15. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$, $\quad K:\ 0<|z-1|<1$

16. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $\quad K:\ 1<|z|<3$

17. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+4)}$, $\quad K:\ 1<|z|<4$

18. $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$, $\quad K:\ 2<|z|<\infty$

19. $f(z)=\dfrac{3z+1}{z^2-7z+6}$, $\quad K:\ 1<|z|<6$

20. $f(z)=\dfrac{3z}{z^2-4z+3}$, $\quad K:\ 2<|z-1|<\infty$

21. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-6z+5}$, $\quad K:\ 5<|z|<\infty$

22. $f(z)=\dfrac{z}{z^2+9}$, $\quad K:\ 3<|z|<\infty$

23. $f(z)=\dfrac{1}{(z-4)(z+1)}$, $\quad K:\ 2<|z-1|<3$

24. $f(z)=\dfrac{2}{z(z-4)}$, $\quad K:\ 0<|z|<4$

25. $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $\quad K:\ 0<|z|<1$

26. $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $\quad K:\ 1<|z|<\infty$

27. $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$, $\quad K:\ 0<|z|<1$

28. $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $\quad K:\ 3<|z|<\infty$

29. $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4}$, $\quad K:\ 0<|z-2|<4$

30. $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+3)}$, $\quad K:\ 1<|z-1|<4$

Задание 7. Вычислить

1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$;

2. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{iz(z-i)}{\sin\pi z}dz$;

3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$;

4. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$, $\gamma:|z-1-i|=\dfrac{5}{4}$;

5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}dz$;

6. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz$;

7. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z(z-\pi)}dz$;

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1,5|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$;

9. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$;

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz$;

11. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{tgz+2}{4z^2+\pi z}dz$;

12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{2z+3}{(z-1^2(z+3)}dz$;

13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}dz$;

14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}dz$;

15. $\oint\limits_{\gamma} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$, $\gamma: \left|z-\frac{3}{2}\right|=1$;

16. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2+4)}$, $\gamma: |z-i|=\frac{3}{2}$;

17. $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$;

18. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z}dz$;

19. $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$;

20. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz$;

21. $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)}dz$;

22. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)}$;

23. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz$;

24. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}dz$;

25. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}dz$;

26. $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz$;

27. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz$;

28. $\oint\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{\sin z}$;

29. $\oint\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz$;

30. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}dz$.

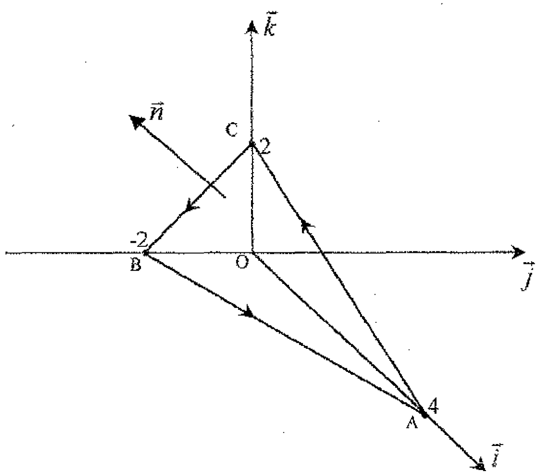
Решение типового варианта КР №5

Задача 1. Дано векторное поле $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+z\vec{k}$ и пирамида образованная координатными плоскостями и плоскостью $(P): x-2y+2z=4$. Требуется:

1) вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды двумя способами: а) используя определение потока; б) по форме Остроградского-Гаусса;
2) вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(P): x-2y+2z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении вектора $\vec{n}=(1;-2;2)$ двумя способами: а) используя определение циркуляции; б) по формуле Стокса.

Решение

1.а.) По определению поток векторного поля $\vec{a}(M)$ равен поверхностному интегралу $\Pi=\iint\limits_{S}\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{n^{\circ}}\,dS$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды $ABCO$.



Вычислим поток через каждую из четырех граней пирамиды.

Грань AOC лежит в плоскости $y=0$, нормаль к этой грани $\overline{n_1^\circ}=\vec{j}$, $dS=dx\,dz$. Тогда поток векторного поля через грань AOC равен

$$\Pi_1=-\iint\limits_{\Delta AOC} x\,dx\,dz=-\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_0^{2-\frac{x}{2}} dz=-\int\limits_0^4 x\left(2-\frac{x}{2}\right)dx=-\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4=-\frac{16}{3}.$$

Грань AOB лежит в плоскости $z=0$, нормаль к этой грани $\overline{n_2^\circ}=\vec{k}$, $dS=dx\,dy$. Тогда поток векторного поля через грань AOB равен

$$\Pi_2=\iint\limits_{\Delta AOB} 0\,dx\,dy=0.$$

Грань BOC лежит в плоскости $x=0$, нормаль к этой грани $\overline{n_3^\circ}=-\vec{i}$, $dS=dy\,dz$. Тогда поток векторного поля через грань BOC равен

$$\Pi_3=-\iint\limits_{\Delta BOC} z\,dy\,dz=-\int\limits_0^2 z\,dz\int\limits_{z-2}^0 dy=-\int\limits_0^2 z(-z+2)dz=-\left(z^2-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=-\frac{4}{3}.$$

Грань ABC лежит в плоскости $x-2y+2z-4=0$, нормаль к этой грани

$$\overline{n_4^\circ}=\frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{3},\quad dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy,\quad z=-\frac{1}{2}x+y+2,$$

$z'_x=-\frac{1}{2}$, $z'_y=1$, $dS=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,dx\,dy=\frac{3}{2}dx\,dy$. Тогда поток векторного поля через грань BOC равен

$$\Pi_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\iint\limits_{\Delta ABC}\big((x+z)-2(2y-x)+2z\big)dx\,dy=\frac{1}{2}\cdot\iint\limits_{\Delta ABC}\big(x+z-4y+2x+2z\big)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\iint\limits_{\Delta ABC}(3x-4y+3z)dx\,dy=\frac{1}{2}\cdot\iint\limits_{\Delta ABC}\left(3x-4y-\frac{3}{2}x+3y+6\right)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\iint\limits_{\Delta ABC}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx\,dy=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_0^{2y+4}\left(\frac{2}{3}x-y+6\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-2}^0 dy\left(\frac{3}{4}x^2-yx+6x\right)\Bigg|_0^{2y+4}=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-2}^0\left(\frac{3}{4}(2y+4)^2+(-y+6)(2y+4)\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{0}\left(3(y^2+4y+4)+12y+24-2y^2-4y\right)dy=\frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{0}\left(y^2+20y+36\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}+10y^2+36y\right)\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{52}{3}.$$

Поток через полную поверхность пирамиды ABCO равен:

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4=\frac{32}{3}.$$

1.б.) Вычислим поток векторного поля

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\Pi=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Находим

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(x+z)}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial(2y-x)}{\partial y}=2,\qquad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial z}=1.$$

Так как $\iiint_V dx\,dy\,dz$ равен объему прямоугольной пирамиды ABCO, то

$$\Pi=\iiint_V(1+2+1)dx\,dy\,dz=4\iiint_V dx\,dy\,dz=4\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABO}\cdot OC=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 2=\frac{32}{3}$$

.

2.а.) В соответствии с условием задачи укажем положительное направление обхода контура ACBA.

Вычислим циркуляцию C векторного поля

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

по формуле

$$C=\int_{ACBA}\vec{a}(M)\cdot\vec{dl}=\int_{AC}\vec{a}(M)\cdot\vec{dl}+\int_{CB}\vec{a}(M)\cdot\vec{dl}+\int_{BA}\vec{a}(M)\cdot\vec{dl}.$$

На отрезке AC имеем:

$$y=0,\ x+2z=4,\ x=4-2z,\ dx=-2\,dz,$$

$$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k},$$

$$\vec{dl}=dx\,\vec{i}+dz\,\vec{k},$$

$$\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{dl}=(x+z)\,dx+z\,dz,$$

$$\int\limits_{AC}\vec{a}(M)\overrightarrow{dl}=\int\limits_{AC}(x+z)\,dx+z\,dz=\int\limits_0^2\big((4-2z+z)(-2)+z\big)dz=\int\limits_0^2(3z-8)dz=$$

$$=\left(\frac{3}{2}z^2-8z\right)\Bigg|_0^2=6-16=-10.$$

На отрезке CB верны следующие соотношения:

$$x=0,\ -2y+2z=4,\ y-z=-2,\ y=z-2,\ dy=dz,$$

$$\vec{a}(M)=z\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k},$$

$$\overrightarrow{dl}=dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k},$$

$$\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{dl}=2y\,dy+z\,dz,$$

$$\int\limits_{CB}\vec{a}(M)\overrightarrow{dl}=\int\limits_{CB}2y\,dy+z\,dz=\int\limits_2^0(2z-4+z)dz=\int\limits_2^0(3z-4)dz=$$

$$=\left(\frac{3}{2}z^2-4z\right)\Bigg|_2^0=8-6=2.$$

На отрезке BA имеем:

$$z=0,\ x-2y=4,\ x=2y+4,\ dx=2dy,$$

$$\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{dl}=x\,dx+(2y-x)\,dy,$$

$$\int\limits_{BA}\vec{a}(M)\overrightarrow{dl}=\int\limits_{BA}x\,dx+(2y-x)\,dy=\int\limits_{-2}^0\big(2(2y+4)+2y-2y-4\big)dy=\int\limits_{-2}^0(4y+4)dy=$$

$$=\left(2y^2+4y\right)\Big|_{-2}^0=-(8-8)=0.$$

Следовательно, $C=-10+2+0=-8$.

2.б.) Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса:

$$C=\iint\limits_{\sigma}rot\,\vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{n^\circ}\,dS.$$

Найдем

$$rot\,\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+z&y-x&z\end{vmatrix}=\vec{j}-\vec{k}.$$

В качестве поверхности σ в формуле Стокса возьмем боковую поверхность пирамиды OABC: $\sigma = \sigma_{OBC} + \sigma_{OAC} + \sigma_{OAB}$.

Тогда

$$\overline{n^\circ}\, dS = dy\,dz\,\vec{i} - dx\,dy\,\vec{j} + dx\,dy\,\vec{k},$$

а

$$rot\,\vec{a}(M) \cdot \overline{n^\circ}\, dS = -dx\,dz - dxdy.$$

Следовательно,

$$C = -\iint_\sigma dx\,dz + dx\,dy = -\iint_{\sigma_{OAC}} dx\,dz - \iint_{\sigma_{OAB}} dx\,dy = -\frac{4\cdot 2}{2} - \frac{4\cdot 2}{2} = -8.$$

Задача 2. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+3)\cdot 3^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3};$$

Решение:

а) Исследуем ряд по признаку сравнения. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, который расходится. Сравним a_n с n-ым членом исходного ряда $b_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+8}}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{1+\frac{8}{n^4}}}{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{n^4}}}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

Согласно предельному признаку сравнения, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, то оба ряда сходятся либо расходятся одновременно, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}$ расходится, так как расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

Ответ: ряд расходится.

б) Исследуем ряд по признаку Д'Аламбера.

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)!}{(n+4)\cdot 3^{n+1}}\div\frac{(n+1)!}{(n+3)\cdot 3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!(n+3)\cdot 3^n}{(n+4)\cdot 3^{n+1}(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{3(n+4)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{n+4}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}=\infty$$

При $l>1$ ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

с) Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+3}$ используем интегральный признак.

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{2x^2+3}=\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{xdx}{2x^2+3}=\frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{d(2x^2+3)}{2x^2+3}=\frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}(\ln(2x^2+3))\Big|_1^a=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}(\ln(2a^2+3)-\ln 5)=\infty.$$

Ряд расходится.

Исследуем его на условную сходимость. Проверяем выполнение условий признака Лейбница для знакочередующихся рядов:

а) $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Для исходного ряда:

а) $\frac{1}{5}\ge\frac{2}{11}\ge\frac{3}{21}\ge\ldots$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=0.$

Оба условия признака Лейбница выполняются.

Ряд условно сходится.

Ответ: ряд сходится условно.

Задание 3. Дан степенной ряд $\sum\frac{a^n\cdot x^n}{b^n\cdot\sqrt[k]{n}}$. Написать первые четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда и выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала. Значения a, b, k даны: $a=2$, $b=9$, $k=6$

Решение

а) напишем первые четыре члена ряда $\sum \frac{2^n \cdot x^n}{9^n \cdot \sqrt[6]{n}}$ полагая последовательно $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$:

$$\frac{2x}{9} + \frac{4 \cdot x^2}{81 \cdot \sqrt[6]{2}} + \frac{8 \cdot x^3}{729 \cdot \sqrt[6]{3}} + \frac{16 \cdot x^4}{6561 \cdot \sqrt[6]{4}} + \ldots$$

б) находим интервал сходимости ряда, используя признак Д'Аламбера

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+1} \cdot x^{n+1}}{9^{n+1} \cdot \sqrt[6]{n+1}} \cdot \frac{9^n \cdot \sqrt[6]{n}}{2^n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2x \cdot \sqrt[6]{n}}{9 \cdot \sqrt[6]{n+1}} \right| =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{n+1}} \right| = \frac{2}{9} \cdot |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[6]{\frac{n}{n+1}} \right| = \frac{2}{9} \cdot |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[6]{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} \right| = \frac{2}{9} \cdot |x|.$$

Для сходимости ряда должно выполнятся условие $l < 1$, поэтому

$$\frac{2}{9} \cdot |x| < 1 \iff 2 \cdot |x| < 9 \iff |x| < \frac{9}{2} \iff -\frac{9}{2} < x < \frac{9}{2},$$

на интервале $\left(-\frac{9}{2}; \frac{9}{2} \right)$ ряд сходится.

в) исследуем ряд на концах интервала. При $x = \frac{9}{2}$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \left(\frac{9}{2} \right)^n}{9^n \cdot \sqrt[6]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}},$$

по итегральному признаку

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{1}{\sqrt[6]{x}} dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a x^{-\frac{1}{6}} dx = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{6}{5} \cdot x^{\frac{5}{6}} \right) \Bigg|_1^a = \frac{6}{5} \cdot \lim_{a \to \infty} \left(\sqrt[6]{a^5} - 1 \right) = \infty$$

ряд расходится.

При $x = -\frac{9}{2}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \left(-\frac{9}{2} \right)^n}{9^n \cdot \sqrt[6]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}}$, этот знакочередующийся ряд расходится. Проверим выполнение условий признака Лейбница (исследуем на условную сходимость):

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Для полученного ряда:

1) $1 \geq \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \geq \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \geq \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0$.

Значит, ряд условно сходится в точке $x = -\frac{9}{2}$. Поэтому область сходимости: $\left[-\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^b f(x)\,dx$ с точностью 0.001, разложив подинтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав почленно.

Решение

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8\cdot\left(1+\frac{x^3}{8}\right)}} = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+\frac{x^3}{8}}} = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 \left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} dx = A.$$

Используя разложение в ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots,$$

полагая, что $m = -\frac{1}{3}$ и $x = \left(\frac{x}{2}\right)^3$, находим:

$$\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^9 + \ldots.$$

Тогда

$$A=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\left(1-\frac{1}{3\cdot 2^3}x^3+\frac{4}{3^2\cdot 2^7}x^6-\frac{4\cdot 7}{3^4\cdot 2^{10}}x^9+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{32}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{4}{1152}\cdot\frac{x^7}{7}-\frac{4\cdot 7}{82944}\cdot\frac{x^{10}}{10}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1-0.0078+0.0005-\ldots)=0.496;$$

получили знакочередующийся ряд, для достижения заданной точности достаточно взять два члена разложения, т.е. ограничится вычислением частичной суммы S_2 сходящегося знакочередующегося ряда, т.к.

$$u_3\approx 0.0005<0.001.$$

Ответ: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}\approx 0.496$.

Задание 5. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=f(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

Решение

Будем искать решение дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена:

$$y=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots.$$

Из условия $y'=2x^2y-\cos(5x)$, полагая $x=0$, $y=3$, находим:

$$y'(0)=2\cdot 0\cdot 3-\cos(0)=-1.$$

Далее находим:

$$y''(x)=(2x^2y-\cos 5x)'_x=2\cdot 2x\,y+2x^2\cdot y'+5\cdot\sin 5x=4\,x\,y+2\,x^2y'+5\sin 5x,$$

при $x=0$, $y=3$, $y'=-1$, находим:

$$y''(0)=4\cdot 0\cdot 3+2\cdot 0\cdot(-1)+5\sin 0=0.$$

Находим:

$$y'''(x) = (4xy + 2x^2y' + 5\sin 5x)'_x = 4y + 4xy' + 4xy' + 2x^2y'' + 25\cdot\cos 5x,$$

при $x = 0$, $y = 3$, $y' = -1$, $y'' = 0$, находим:

$$y'''(0) = 4\cdot(-1) + 8\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 0 + 25\cos 0 = 21.$$

Следовательно, $y = 3 - \frac{1}{1!}x + \frac{21}{3!}x^3$.

Ответ: $y = 3 - \frac{1}{1!}x + \frac{21}{3!}x^3$.

Задание 6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом $\omega = 2\pi$)

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \le x < 0; \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(\pi+x)^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = \pi + x, & du = dx, \\ dv = \cos nx\,dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi + x}{n}\sin nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right) = \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = \pi + x, & du = dx, \\ dv = \sin nx\,dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi + x}{n}\cos nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right) = -\frac{1}{n}.$$

Тогда ряд Фурье для данной функции запишется в виде:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n x)}{n}.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №6

“Теория функций комплексной переменной”

Задание 1. Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа

а) $\cos(\frac{\pi}{6}-i)$,   б) $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$

Решение.

а) Так как $\cos(z_1-z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2+\sin z_1\cdot\sin z_2$, то

$$\cos(\frac{\pi}{6}-i)=\cos\frac{\pi}{6}\cos i+i\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin i=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos i+i\frac{1}{2}\sin i.$$

Найдем $\cos i$ и $\sin i$

$$\cos i=\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\frac{e^{-1}+e}{2}=\frac{1+e^2}{2e};$$

$$\sin i=\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2i}=\frac{e^{-1}+e}{2i}=\frac{e^2-1}{2e}i.$$

Следовательно,

$$\cos(\frac{\pi}{6}-i)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+e^2}{2e}+\frac{i^2}{2}\cdot\frac{e^2-1}{2e}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+e^2}{2e}-\frac{e^2-1}{2\cdot 2e}=\frac{\sqrt{3}(1+e^2)}{4e}-\frac{e^2-1}{4e}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1+e^2(\sqrt{3-1})}{4e}.$$

б) $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}=e^{-3iLn(-1+i\sqrt{3})}$.

Вычислим $Ln(-1+i\sqrt{3})=\ln\left|-1+i\sqrt{3}\right|+i\arg(-1+i\sqrt{3})+2\pi ki,\quad k\in Z$

Поскольку $\left|-1+i\sqrt{3}\right|=2,\quad \arg(-1+i\sqrt{3})=\frac{3}{2}\pi$, то

$$Ln(-1+i\sqrt{3})=\ln 2+i(\frac{2}{3}\pi+2\pi ki),\quad k\in Z, \text{ а}$$

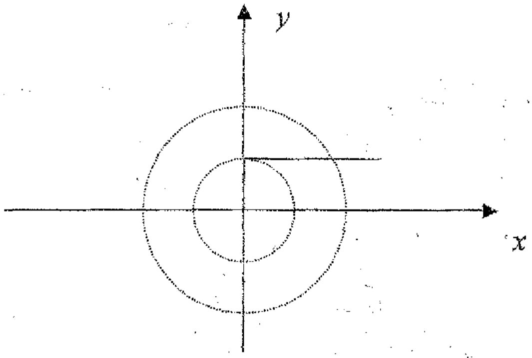
$$(-1+i\sqrt{3})^{-3i}=e^{-3i(\ln 2+i(\frac{2}{3}\pi+2\pi k))}=e^{2\pi+6\pi k}\cdot e^{-3\ln 2i}=$$

$$=e^{2\pi+6\pi k}(\cos 3\ln 2-i\sin 3\ln 2),\quad k\in Z.$$

Задание 2. Построить область, заданную неравенствами
$1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 1$

Решение.

В неравенстве $1 < z\bar{z} < 2$, заменим $z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$, получим $1 < x^2 + y^2 < 2$. Последнему неравенству удовлетворяют точки, расположенные в кольце с центром в начале координат. Неравенству $\operatorname{Re} z > 0$ соответствует правая полуплоскость. Неравенство $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$ определяет собой горизонтальную полосу. Окончательно область будет иметь вид



Задание 3. Найти коэффициент растяжения и угол поворота φ в точке z_0 при отображении $w = f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

Решение.

Функция $w = u + iv$ является дифференцируемой, так как $u = x^3 - 3xy^2$ и $v = 3x^2y - y^3$ удовлетворяют условиям Коши-Римана. Действительно,
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ и
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Найдем w' по формуле $\quad w' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Для данной функции $w' = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi, \quad w'(z_0) = 3 - 3 + 6i = 6i$.

Производную w' можно найти иначе. Легко заметить, что $w = (x + iy)^3 = z^3$. Тогда $w' = 3z^2$, $w'(z_0) = 3(1+i)^2 = 6i$.

Коэффициент растяжения $k = |w'(z_0)| = |6i| = 6$.

Угол поворота $\varphi = \arg w'(z_0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Задание 4. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{если} \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f(2) = 0$$

Решение.

Найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2y(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)4x^2 y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{6x^2 y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-2y(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, то v является гармонической функцией. Найдем сопряженную ей гармоническую функцию u.

Известен полный дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}dy.$$

Тогда

$$u = \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2}dx + \int_1^y \frac{2y \cdot 0}{(0^2 + y^2)^2}dy + C = \int_0^x \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 - y^2)^2}dx + C =$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{x^2 + y^2} - \int_0^x \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} + C = \frac{1}{y}arctg\frac{x}{y} - 2y^2\left(\frac{x}{2y^2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2y^3}arctg\frac{x}{y}\right) + C =$$

$$= -\frac{x}{x^2 + y^2} + C.$$

Так как $f(2) = 0$, то $u(2; 0) = 0$,

$$-\frac{2}{4} + C = 0, \quad C = \frac{1}{2}, \quad u = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2},$$

$$f(z) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} + i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}, \quad z = x + iy.$$

Задание 5. Вычислить интегралы

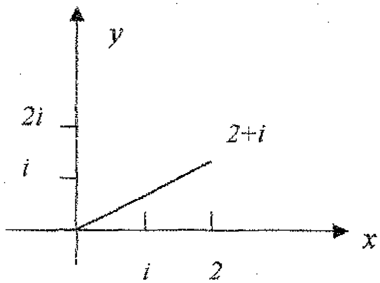
а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z dz$, где L – прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой 2+i;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz$;

в) $\int\limits_L |z| dz$, где L – верхняя половина окружности $|z|=1$ от точки (-1; 0) до точки (1; 0).

Решение.

а). Изобразим путь интегрирования

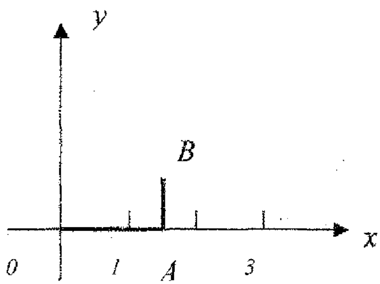


Уравнение линии $L: y = \frac{1}{2}x$.

Так как $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z = y$, $dz = dx + idy$, то

$$\int\limits_L \operatorname{Im} z dz = \int\limits_L y(dx + idy) = \int\limits_0^2 \frac{1}{2}x(dx + i\frac{1}{2}dx) = \frac{1}{2}(1+\frac{i}{2}) \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 1 + \frac{i}{2}.$$

б). Так как $\sin z$ является аналитической функцией на всей плоскости, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz$ не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования выберем ломаную OAB.



На отрезке $OA: y=0, dy=0,\quad z=x, dz=dx,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{2}$. А на отрезке AB: $x=\frac{\pi}{2}, dx=0,\quad z=\frac{\pi}{2}+iy,\quad dz=idy,\quad 0\le y\le 1$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i}\sin z dz=\int\limits_{OAB}\sin z dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx+\int\limits_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)idy=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+i\int\limits_0^1\cos iy dy=$$

$$=1+\sin iy\Big|_0^1=1+\sin i=1+\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}=1+i\frac{e^1-e^{-1}}{2}=1+i\, sh1.$$

в) Параметрическое уравнение окружности $|z|=1$ есть $z=e^{i\varphi}$. Для верхней половины окружности при направлении обхода от точки (-1; 0) до точки (1; 0) φ изменяется от π до 0; $|z|=1;\quad dz=ie^{i\varphi}d\varphi$.

Тогда

$$\int\limits_L |z|dz=\int\limits_\pi^0 ie^{i\varphi}d\varphi=e^{i\varphi}\Big|_\pi^0=1-e^{i\pi}=1-\cos\pi-i\sin\pi=2.$$

Задание 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в кольце K:

а) $K:\quad 1\le |z|\le 2$

б) $K:\quad 0<|z-1|<1$

Решение.

Представим функцию $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в виде простейших дробей.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2};\quad A(z-2)+B(z-1)=1.$$

Положив $z=1$, получим $A=-1$, положив $z=2$, получим $B=1$. Следовательно,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

а). Дробь $\frac{1}{z-2}$ является аналитической функцией в круге $|z|<2$ и разлагается по положительным степеням z:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,\quad \left|\frac{z}{2}\right|<1, |z|<2.$$

Дробь $-\frac{1}{z-1}$ является аналитической функцией вне круга $|z|>1$ и разлагается по отрицательным степеням z:

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z(1-\frac{z}{2})}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\quad \left|\frac{1}{z}\right|<1, |z|>1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right),\quad 1<|z|<2.$$

б). Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$ по степеням $(z-1)$ т.е. в области $K:\quad 0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\left(1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\ldots+(z-1)^n+\ldots\right)=$$

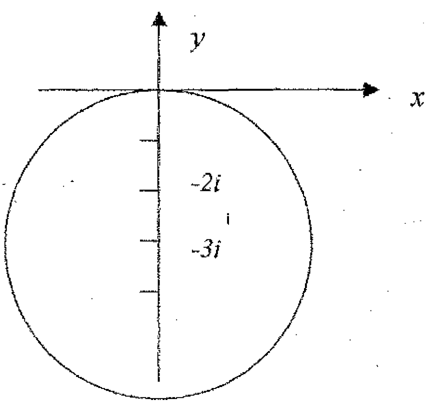
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,\quad |z-1|<1;$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1.$$

Задание 7. Вычислить $\oint\limits_{|z+3i|=3}\frac{\sin z}{z^2+4}dz$.

Решение.

Контур интегрирования представляет собой окружность с центром в точке
$z_0=-3i$ радиуса 3.



Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin z}{z^2+4}=\frac{\sin z}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{\frac{\sin z}{z-2i}}{z+2i}.$$

Так как функция $\frac{\sin z}{z-2i}$ - аналитическая в области, ограниченной контуром L, то применим к ней интегральную формулу Коши.

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2+4}dz=\oint_L \frac{\frac{\sin z}{z-2i}}{z+2i}dz=2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-2i}\right)_{z=-2i}=\frac{\sin(-2i)}{-4i}2\pi i=\frac{\pi}{2}\sin 2i=\frac{\pi}{2}ish2.$$

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М: Наука, 1981.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1985 г.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. М.: Наука, 1978.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). М., Наука, 1981 г., ч. 2, 3.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред.А.П. Рябушко), Минск, ВШ, 1990-1991, ч. III.
6. Методические указания по разделу "Ряды" курса "Высшая математика" для студентов всех специальностей. Брест 1993 г. Составители: Рубанов В.С., Сидоревич М.П., Сулима Л.П., Шамовская Г.В.
7. Элементы теории функции комплексного переменного и операционного исчисления. Методические указания для студентов технических специальностей.Брест 2000г. Составители: Гладкий И.И, Сидоревич М.П., Тузик Т.А.
8. Вучэбна-метадычный дапаможнiк па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў электронна-механiчных спецыяльнасцяў тэхнiчных вышэйшых навучальных устаноў. Брэст,БПI,1996г.Составители:Тузик А.И.,Тузик Т.А.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Лизунова Ирина Владимировна,
Мороз Людмила Трофимовна.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Лизунова И.В.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 21.11.2001. Формат 60x84 1/16. Бумага «Чайка». Усл. п.л. 2,3. Уч. изд. л. 2,5. Тираж 250 экз. Заказ № 107. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.