МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачи и упражнения по курсу
«Элементарная математика»
для слушателей подготовительного отделения

Брест 2009

УДК 51.07

Подготовительное отделение Брестского государственного технического университета ставит своей целью оказание помощи абитуриентам при подготовке к централизованному тестированию.

Самым целесообразным способом подготовки по математике является систематическое и последовательное изучение школьной программы и в этом существенную помощь окажет данное пособие.

Составители: Пархимович И.В., доцент, к.ф.- м.н.
Остапчук Е.М., ассистент
Гоголинская Р.А., ассистент

Рецензент: доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Предисловие

Данное пособие предназначено для повторения школьного курса математики. Оно поможет систематизировать имеющиеся знания и ликвидировать пробелы в них, если такие окажутся.

Особенно оно может быть полезно при подготовке к централизованному тестированию.

Анализ тестовых вариантов, которые предлагались в прошлые годы, показывает, что для решения некоторых заданий вполне достаточно владеть основными понятиями и формулами школьной математики, знать и уметь реализовывать стандартные алгоритмы, которые встречаются при изучении соответствующей темы в средней школе и закрепляются при упорной самостоятельной работе.

Назначение данного пособия и определило его структуру. Учебный материал в пособии разбит на главы. Каждая глава, в соответствии с её теоретической частью, содержит:

1) справочный материал;
2) дидактический материал;
3) ответы;

Раздел "Дидактический материал" содержит набор упражнений трех уровней сложности. Буквой А отмечены самые легкие упражнения, буквой Б – упражнения более сложные по сравнению с предыдущими, буквой В – упражнения наибольшей сложности. Таким образом, сначала можно выбрать упражнения, соответствующие Вашему уровню математической подготовки, а затем, по мере приобретения навыков и умений переходить ко всем более трудным упражнениям.

Данное пособие гарантирует необходимый уровень математических знаний для поступления Вами в вуз.

Желаем успехов!

1. Преобразование числовых и алгебраических выражений

При упрощении алгебраических выражений следует пользоваться формулами сокращенного умножения:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$

$(a \pm b)^3 = (a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3)$

$a^3 + b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

разложением квадратного трехчлена на линейные множители:

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, где α, β - корни трехчлена;

разложением на множители целых рациональных выражений;

действиями со степенями с целыми показателями:

$a^m \cdot b^n = a^{m+n}$;

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;

$a^0 = 1 (a \neq 0)$;

УПРАЖНЕНИЯ

А.

Вычислить:

1) $\dfrac{2\frac{5}{8} - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + 4,375\right) : 19\frac{8}{9}}$;

2) $\dfrac{0,134 + 0,05}{18\frac{1}{6} - 1\frac{11}{14} - \frac{2}{15} \cdot 2\frac{6}{7}}$;

3) $\dfrac{(58\frac{4}{15} - 56\frac{7}{24}) : 0,8 + 2\frac{1}{9} \cdot 0,225}{8\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}}$;

4) $\dfrac{45\frac{10}{63} - 44\frac{25}{84}}{(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9}) : 4 - \frac{3}{4}} : 31$;

Упростить выражения:

5) $(a^2-b^2-c^2+2bc):\frac{a+b-c}{a+b+c}$;

6) $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$;

7) $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$;

8) $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot(1+\frac{3x+x^2}{3+x})$;

9) $\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{12}{9-a^2}+\frac{3}{3a-a^2}$;

Сократить дробь:

10) $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$

11) $\frac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}$

12) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$

Найти числовые значения следующих выражений, предварительно упростив их:

13) $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right):\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, при $x=-3\frac{1}{4}$;

14) $\frac{a^2-2a+1}{a-3}\cdot\left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right)$, при $a=-0,01$;

15) Найти частное от деления НОК на НОД трех чисел 90; 135 и 150;

Б.

1) Найти число, 3,6% которого составляют $\frac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-2\frac{1}{3})\cdot 0,3125}$;

2) Если 80% числа равны $(9\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{500}):\sqrt[3]{4}$, то это число равно.

3) Вычислить $0,5^{-4}\cdot 125^5\cdot 625^{-2}:25^3$;

Упростить:

4) $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{0,5}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

6) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}-(6+4\sqrt{2})$;

7) $2\cdot\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{9x^9}-4x}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3x^2}}$;

8) $\dfrac{a^{1,25}-a^{0,25}}{a^{0,75}+a^{0,5}}:\dfrac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}+a^{0,25}+1}$;

9) $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3(\sqrt{xy}-y)}{x-y}$;

10) Если $x+y=6$, и $x\cdot y=6$, то выражение x^3+y^3 равно.

Разложить на множители:

11) $x^4-x^2(a^2+1)+a^2$;

12) a^4+4b^4;

13) Сократить дробь: $\dfrac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-5xy+4y^2}$;

14) Если $x=-\sqrt{21}$, то значение выражения $\dfrac{8x^3-4x^2-2x+1}{16x^4-8x^2+1}+\dfrac{2x^3+x^2+2x}{2x+1}$ равно;

15) Упростить:

$\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{-2}\right)^{-6}\cdot(2-\sqrt{5})^3}+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-2}\cdot(2-\sqrt{5})^2}$;

В.

1) Если $\sqrt{a}+\sqrt{a+2}=3$, то $\sqrt{a}-\sqrt{a+2}$ равно;

2) Вычислить: $\sqrt[6]{213,1^3+12\cdot 2131\cdot 1869+186,9^3}$;

3) При делении пятизначного числа $45n8m$ на 5, в остатке получается 3. Найти произведение цифр $n\cdot m$, если известно, что исходное число делится на 18;

4) Известно, что натуральные a и b удовлетворяют условию $a+b=80$, и $a\cdot b=1536$; Найти НОК этих чисел.

5) Упростить выражение: $\dfrac{a^{0,5}+a^{-0,5}}{a+1}+\dfrac{a^{-0,5}+1}{a^{0,5}+1}+(a-16)^0$. Может ли значение данного выражения равняться *1,5;3?*

6) Упростить: $\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{2}{y-z}+\dfrac{2}{z-x}+\dfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$;

7) Упростить: $\dfrac{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1-4x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-4x}}$, если $x=\dfrac{0,5a}{a^2+1}$ и $a\in(-\infty;-1)$;

8) Разность $\sqrt[3]{\sqrt{80}-9}-\sqrt[3]{\sqrt{80}+9}$ является целым числом. Найдите это число;

9) Сколько существует целых n, при которых дробь $\dfrac{4+5n-2n^2}{2n-1}$

является натуральным числом?

10) Вычислите сумму: $\dfrac{1}{1\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 15}+\dfrac{1}{15\cdot 22}+\ldots+\dfrac{1}{57\cdot 64}$.

Ответы:

А.

1) $2\frac{17}{21}$; 2) 0,0115; 3) $\frac{157}{280}$,; 4) $-\frac{1}{16}$; 5) $(a+c)^2-b^2$; 6) $\frac{ab}{a+b}$; 7) $\frac{1}{x+y}$; 8) $\frac{1}{a}$;
9) $\frac{1}{a-3}$; 10) $\frac{x-3}{x+4}$, x удов.; 11) $\frac{2a+3}{a-2}$; 12) $a-1$; 13) $x+\frac{1}{x}=-4\frac{1}{60}$;
14) $1-\frac{1}{a}=101$; 15) 90.

Б.

1) 4000; 2) 10; 3) 80; 4) $\sqrt[12]{32}$; 5) $\sqrt{3}$; 6) 2; 7) $-\sqrt[3]{3x}$; 8) $\sqrt{a}$; 9) 3; 10) 78;
11) $a(x+1)(x-1)(x+a)(x-a)$; 12) $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$;
13) $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$; 14) 22; 15) $33-8\sqrt{17}$.

В.

1) $-\frac{2}{3}$; 2) 20; 3) 16; 4) 96; 5) $\frac{2}{\sqrt{a}}+1$; Значение данного выражения не может равняться 1.5, но может равняться 3; 6) a; 7) a; 8) -3; 9) 3; 10) $\frac{9}{64}$.

2. Линейная, квадратичная, степенная, дробно-рациональная функции и связанные с ними уравнения и неравенства

Линейной функцией называется функция вида y= ах+в, где а и в – любые действительные числа. Квадратной функцией является функция вида $y= ax^2+bx+c$, где a,b,c – некоторые числа, причем $a\neq 0$. Степенной функцией будет функция вида $y=x^n$, где n- любое число. Функция вида $y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$ называется дробно-рациональной.

УПРАЖНЕНИЯ

А. Найти область определения функции:

1) $y=\frac{x+6}{|x-1|-2}$ 2) $y=\frac{x-1}{|2x+1|-1}$ 3) $y=\sqrt{x^2-4}$ 4) $y=\frac{2x}{1+x^2}$

Решение неравенства:

5) $4-x)\frac{1}{x-1}$ 6) $(x+1)(x+3)^2(2x-3)\le 0$ 7) $2x(4x^2-1)\ge 0$ 8) $\frac{x(x^2-4)}{(3x-7)(x+2)}\le 0$

9) При каком значении аргумента функция $y=-x^2+8x+7$ достигает своего наибольшего значения?

10) Составить квадратное уравнение, если его корни равны: 3 и 5

11) Решить уравнение

$x^4-17x^2+16=0$

Решить системы уравнений:

12) $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x-y=2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 5(x-y)=4y \\ x^2+4y^2=181 \end{cases}$

14) Найти область значений функции $y= -2x^2-6x+1$

Б. 1) Найти целые решения системы $\begin{cases} 2(3x-4)< 3(4x-3)+16 \\ 4(1+x) < 3x+5 \end{cases}$

Решить неравенства:

2) $|2x-3|<2$

3) $|x-1|+x<1$

Найти положительные решения следующих уравнений:

4) (x+1)(x-1)+2=0

5) $\frac{5}{x-11}+\frac{6(x+2)}{11-x}=6$

Найти отрицательные решения следующих уравнений:

6) $\frac{5}{2x-к}=\frac{3}{4-кx}$ 7) $a-5+\frac{2a+5}{x+2}=0$

8) Найти произведение корней уравнения $x^2-12=|x|$

9) Найти среднее арифметическое всех действительных корней уравнения

$$x(x-3)^2-x(x-2)^3=-19x$$

10) Найти сумму корней уравнения $|x-1|=2|x+2|$

11) Найти сумму корней уравнения $(x+0{,}5)(x^2-9)=(2x+1)(x+3)^2$

Решить уравнения :

12) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=8$ 13) $12x^4-16x^3-11x^2-16x+12=0$

14) Найти разность $f(x+2)-f(x+8)$, если $f(x)=\frac{3x+2}{x-5}$

Найти произведение корней уравнения:

15) $x^3-4x^2-3x+12=0$ 16) $4^{|x|}-3\cdot 2^{|x|}-4=0$

В. 1) Найти сумму целых решений неравенства

$|(x+4)^3+49|<76$

2) Найти число целых решений неравенства $\frac{1}{x+8}\geq\frac{x^2+x-4}{x^2+8x+15}$

3) Найти среднее арифметическое корней уравнения

$$|x^2+x-2|=|x-1|$$

Решить уравнения:

4) $x^2+\frac{1}{x^2}+2(x+\frac{1}{x})=6$ 5) $\frac{5x}{x^2+2x+3}+\frac{11x}{x^2+7x+3}=2$ 6) $x^2+\frac{9x^2}{(3+x)^2}=7$

7) Найти $70\cdot(x_0+y_0)$, где (x_0+y_0) - решение системы

$$\begin{cases}\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=4\\ \frac{1}{2x}+\frac{2}{y}=-1\end{cases}$$

8) Найти наименьшее целое решение неравенства

$\left|\frac{x+2}{x+1}\right|\geq 1$

9) Найти произведение абсцисс точек пересечения прямой $x-3y=-1$ и окружности $x^2+y^2=3$

Решить уравнение

10) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

11) Найти произведение корней уравнения

$$|3-x|^{x^2-11x}=|3-x|^{x-32}$$

12) Сколько пар (x,y) действительных чисел удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} |x-2|+|y-2|=2 \\ x^2+y^2=18 \end{cases}$$

Ответы:

А. 1) $(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;+\infty)$ 2) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;\infty)$ 3) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$

4) $(-\infty;+\infty)$ 5) $(-\infty;1)\cup(\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2})$ 6) $[-1;1,5];-3$ 7) $\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left[\frac{1}{2};\infty\right)$

8) $(-\infty;2)\cup(-2;0)\cup\left[2;2\frac{1}{3}\right)$ 9) $x=4$ 10) $x^2-8x+45=0$ 11) $\pm1;\pm4$

12) $(7;5)u(-5;-7)$ 13) $(9;5)u(-9;-5)$ 14) $(-\infty;5,5]$

Б. 1) $0;-1;-2$ 2) $(0,5;2,5)$ 3) Решений нет 4) $\frac{n-1}{n+1}$, если $|n|>1$

5) $\frac{11b-7}{b+6}$, если b<-6 или b>$\frac{7}{11}$ 6) $\frac{3\kappa+20}{5\kappa+6}$, если $-6\frac{2}{3}<\kappa<-1\frac{1}{5}$, кроме к= $-2\sqrt{2}$

7) $\frac{15}{5-a}$, если a> 5 8) -16 9) $\frac{5}{2}$ 10) -6 11) -12,5 12) $\frac{+5-\sqrt{17}}{2};\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$

13) $\frac{1}{2};2$ 14) $\frac{102}{x^2-9}$ 15) -12 16) -4

В. 1) -35 2) 2 3) -1 4) $1;-2\pm\sqrt{3}$ 5) $1;3;\frac{-9\pm\sqrt{33}}{4}$ 6) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 7) 46 8) 0

9) -2,6 10) $2;4;-1;-\frac{1}{2}$ 11) 32 12) 3

Иррациональные уравнения

2А. Решить уравнения:

А.

1) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$ 2) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$ 3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4$

4) $\sqrt{4x^2+5x-2}=2$ 5) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$ 6) $(x+2)\sqrt{23x-14-3x^2}=0$

7) $\sqrt{3x-5}=\frac{x-1}{\sqrt{x-2}}$ 8) $x=5-\sqrt{2x^2+13-14x}$

Решить систему уравнений:

9) $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=10 \\ \sqrt{y+1}\cdot\sqrt{x-1}=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x-y=16 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

Б. Решить уравнения

1) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$ 2) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}=1$ 3) $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$

4) $\sqrt{x}+x=3-\sqrt{5x-16}$ 5) $3\cdot\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=3\cdot\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+2,5$ 6) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$

7) $\sqrt[4]{x+1}+20=\sqrt{x+1}$ 8) $x^2+6-\sqrt{2x^2-3x+2}=1,5(x+6)$ 9) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$

10) Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-2\cdot\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=-3$

11) Найти произведение корней уравнения

$x^2+2\cdot\sqrt{x^2+6x-7}=2\cdot(11-3x)$

12) Найти среднее арифметическое корней уравнения

$\sqrt[5]{x^{14}}+2x^2\cdot\sqrt[10]{x^3}=24x\cdot\sqrt[5]{x^4}$.

В. Решить уравнения:

1) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{4x^2+8x+13}=\sqrt{3x^2+6x+12}$ 2) $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}$

3) $\sqrt{1-x^2}\cdot(x+\sqrt{1-x^2})=\dfrac{12}{x}$ 4) $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{629-x}=8$

5) $\sqrt{6x^2-59x+149}-\sqrt{x^2-9x+24}=x-5$ 6) $3x+2\sqrt{2x^2-3x+1}=4-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}$

7) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$ 8) $\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{x+1}=1-x$.

Ответы:

А. 1) 5 2) $-\dfrac{1}{11}$ 3) $52-8\sqrt{39}$ 4) -2;0,75 5) -11;7 6) $\dfrac{2}{3}$;7 7) 3 8) -2

9) (65;3);(5;63) 10) (25;9) 11) (4;4)

Б. 1) $\frac{5}{4}$ 2) 1 3) 8 4) нет корней 5) $-1\frac{11}{19}$ 6) 0,5 7) 624

8) -2; 3,5 9) -1 10) $\frac{13}{9}$ 11) -16 12) 8

В. 1) -1 2) $-\frac{12}{127}; -\frac{4}{43}$ 3) нет корней 4) 548; 4 5) 5; $\frac{19}{3}$ 6) 1 7) $-\frac{8}{3}; 1$ 8) нет корней.

2Б.

А. Иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{2x+3} < 5$ 2) $\sqrt{x^2-6x+8} > -1$ 3) $\sqrt{4x^2+5x-6} \geq 0$ 4) $(4x-6)\sqrt{x^2+4} \geq 0$

5) $\sqrt{3x^2+10x+7} \geq 2$ 6) $x+2 \geq \sqrt{14-5x}$ 7) $1-2x > \sqrt{4x^2-3x-1}$

8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1} < 2$ 9) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3} \geq \sqrt{x^2+x-6}$ 10) $x-5\cdot\sqrt{x} \leq 6$.

Б. Решить неравенства

1) $3\cdot\sqrt{x^2-5x+4} < 6+5x-x^2$ 2) $(3x^2-16x+21)\sqrt{2x+5} \leq 0$ 3) $\frac{6-2x}{\sqrt{x^2+7x+12}} < 0$

4) $\sqrt{x^2-10x+16} < 2x+4$ 5) $\sqrt{\frac{x+4}{2x-1}} \geq \sqrt{5x-8}$ 6) $\frac{2x+1}{x} - 2\sqrt{\frac{2x+1}{x}} \geq 3$

7) $(|x|-1)\sqrt{-x^2+x+6} \leq 0$

8) Найти среднее арифметическое целых решений неравенства

$\sqrt[5]{3x-x^2}\cdot\sqrt{x+1} \geq 0$

9) Найти число целых решений неравенства

$\sqrt[3]{x^2-5x-6}\cdot\sqrt[4]{4-x} < 0$

10) Найти наибольшее целое решение неравенства

$\sqrt{x^2-4x+5} > \sqrt{3-x}$

11) Найти число целых решений неравенства $\sqrt{x^2-4x} > x-3$, удовлетворяющих условию $|x-1| \leq 4$

Ответы:

А. 1) $[-1,5;11)$ 2) $(0;2]\cup(4;\infty]$ 3) $(-\infty;-2]\cup[0,75;\infty)$ 4) $[1,5;\infty)$

5) $(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{3};\infty\right)$ 6) $[1;2,8]$ 7) $[-\infty;-0,25]$ 8) $[-0,5;0)$ 9) $\{-3\}$; 10) $[0;36]$

Б. 1) $(0;1]\cup[4;5)$ 2) $\{-2,5\}\cup\left[2\frac{1}{3};3\right]$ 3) $(3;+\infty)$ 4) $(0;2]\cup[8;\infty)$ 5) $[1,6;2]$

6) $\left(0;\frac{1}{7}\right]$ 7) $[-1;1]\cup\{-2\}\cup\{3\}$ 8) 1 9) 4 10) 3 11) 5.

3. Уравнения с параметрами

Решить задачу с параметрами – это значит установить, при каких значениях параметров задача имеет решение, и найти эти решения.

Задачи:

1) При каких значениях a уравнение $(5a-1)x^2-(5a+2)x+3a-2=0$ имеет равные корни?
2) При каком значении q в уравнении $x^2-2x+q=0$ квадрат разности корней равен 16?
3) При каких значениях m уравнение $9x^2-18mx-8m+16=0$ имеет корни, отношение которых равно двум?
4) При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y=ax^2-2x+7a$ равно 6?
5) При каком значении параметра a уравнение $(a+9)x^2-ax+3=0$ имеет единственный положительный корень?
6) При каких значениях параметра c уравнение $x-2=\frac{c}{x}$ имеет два различных корня?
7) При каком значении параметра a корни квадратного трёхчлена $y=(2a-3)x^2+ax+1$ отрицательны?
8) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-(2a+6)x+4a+12=0$ имеет различные корни, и каждый из них меньше 1.
9) При каком значении параметра q корни уравнения $x^2-6x+q=0$ удовлетворяют условию $7x_1+3x_2=-10$?
10) При каком значении a график функции $y=\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{a}{3}(5x-9)$ симметричен относительно оси ординат?

Ответы:

1) $\frac{2}{35}$; 2) $q=-3$; 3) $m_1=-2, m_2=1$; 4) $-\frac{1}{7}$; 5) 18; 6) (1;+∞); 7) [0;1); 8) -12;
9) -1; 10) a<2.

4. Текстовые задачи

Текстовые задачи подразделяются: задачи на проценты, задачи на смеси и сплавы, задачи на движение, задачи на работу и производительность и т.д.

Текстовые задачи решаются, как правило, по такой схеме: 1) удачный выбор неизвестной (неизвестных) и составление уравнения, неравенства или системы; 2) решение полученной математической структуры; 3) отбор подходящих решений исходя из смысла задачи.

Задачи:

А. 1) После выпуска из школы ученики обменялись фотокарточками. Сколько было учеников, если они обменялись 870 фотокарточками?

2) Расстояние между двумя станциями железной дороги 96 км. Первый поезд проходит это расстояние на 40 минут скорее, чем второй. Скорость первого поезда больше скорости второго на 12 км/ч. Определить скорости обоих поездов.

3) Моторная лодка спустилась по течению на 28 км и тотчас же вернулась назад; на путь туда и обратно ей потребовалось 7ч. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 км/ч.

4) Спортивная площадка имеет форму прямоугольника со сторонами $a\times b$. Площадка окаймлена дорожкой всюду одинаковой ширины. Площадь дорожки равна площади спортивной площадки. Определить ширину дорожки.

5) Турист, идущий из деревни на станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к поезду на 40 минут, если будет двигаться с той же скоростью. Поэтому остальной путь он проходит со скоростью 4 км/ч и прибывает на станцию за 45 минут до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

6) Трёхзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести влево (т.е. поместить в начале), то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число.

7) Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа более установленной для неё нормы, то окончит работу ранее намеченного срока на 3 дня; если же будет печатать на 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней ранее срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

8) Бассейн наполняется двумя трубами за 6 часов. Одна первая труба заполняет его на 5 часов скорее, чем одна вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

9) При выполнении работы по математике 12% учеников класса вовсе не решили задачи, 32% решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

10) В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

Б. 1) Сплав весит 2 кг и состоит из серебра и меди, причём вес серебра составляет $14\frac{2}{7}$ % веса меди. Сколько серебра в данном сплаве?

2) Для выпекания пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припёк на эту муку. Для выпекания ржаного хлеба взято на 10 кг больше муки, а именно столько килограммов, сколько процентов составляет припёк на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

3) По окружности длиной 360 м движутся два тела. Одно из них проходит в секунду на 4 м больше другого и поэтому проходит всю окружность на 1 секунду скорее. Сколько метров в секунду проходит каждое тело?

4) Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

5) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $13\sqrt{5}$. Определить катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}$ %, а другой на $16\frac{2}{3}$ %, сумма их длин сделается равной 14 м.

6) Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц; по ошибке он переставил цифры на втором множителе, отчего и получил произведение на 2808 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?

7) Имелось два разных сплава меди. Процент содержания меди в первом сплаве был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором сплаве. После того, как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что меди в первом сплаве было 6 кг, а во втором 12 кг.

8) В трёх сосудах налита вода. Если 1/3 воды из первого сосуда перелить во второй, затем 1/4 воды, оказавшейся во втором, перелить в третий и, наконец, 1/10 воды, оказавшейся в третьем, перелить в первый, то в каждом сосуде окажется по 9 литров воды. Сколько воды было в каждом сосуде?

9) Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2:3, а другая – в отношении 3:7. По сколько вёдер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 вёдер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3:5?

10) На сколько процентов следует увеличить радиус круга, чтобы площадь круга стала больше на 96%?

В. 1) Сосуд в 20 литров наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, дополняют этой смесью первый сосуд. Затем из первого отливают $6\frac{2}{3}$ литров во второй, после чего в обоих сосудах содержится одинаковое количество спирта. Сколько отлито спирта первоначально из первого сосуда во второй?

2) Найти два двузначных числа, обладающими следующими свойствами: если к большему искомому числу приписать справа 0 и за ним меньшее число, а к меньшему приписать справа большее число и затем 0, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, даёт в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

3) Имеются три смеси, составленные из трёх элементов А,В и С. В первую смесь входят только элементы А и В в весовом отношении 3:5, во ворую смесь входят только элементы В и С в весовом отношении 1:2, в третью смесь входят только элементы А и С в весовом отношении 2:3. в каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы А,В и С содержались в весовом отношении 3:5:2?

4) Проценты содержания (по весу) спирта в трёх растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в весовом отношении 3:2:1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит первый раствор?

5) Из города А в 9 часов утра выехал велосипедист и двигался с постоянной скоростью12 км/ч. Спустя 2 часа вслед за ним из А выехал мотоциклист, который при начальной скорости 22 км/ч двигался равнозамедленно, так что за час его скорость уменьшалась на 2 км/ч. Автомобилист, едущий им навстречу в город А с постоянной скоростью 50 км/ч, сначала встретил мотоциклиста, а потом велосипедиста. Успеет ли автомобилист к 19 часам этого дня прибыть в город А?

6) Из пункта А в пункт В выезжает автомобиль, и одновременно из В в А с меньшей скоростью выезжает мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из В и А выезжает второй мотоцикл, который встречается с автомобилем в точке, отстоящей от точки встречи автомобиля с первым мотоциклом на расстоянии, равном 2/9 пути от А до В. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч меньше, то расстояние между точками встречи равнялось бы 72 км, и первая встреча произошла бы через 3 часа после выезда автомобиля из пункта А. Найти длину пути между А и В (скорости мотоциклов одинаковы).

7) Две точки двигаются по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они двигаются в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки.

8) Сумма цифр трёхзначного числа равна 17, а сумма их квадратов 109. Если из данного числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

9) Самолёт совершает посадку и движется по земле в течение некоторого времени равномерно со скоростью V. Затем лётчик включает тормоза и движение самолёта становится равнозамедленным, причём в каждую секунду скорость уменьшается на 2 м/с. Путь от места приземления до полной остановки равен 4 км. Отношение времени, за которое самолёт проходит первые 400 м, к времени, за которое самолёт проходит весь путь по земле, равно 4:65. определите скорость V.

10) Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго куска. Масса третьего куска равна суммарной массе части первого куска, содержащей 10 г золота, и части второго куска, содержащей 80 г золота. Третий кусок, масса которого в 4 раза больше первого, содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом куске?

Ответы:

А. 1) 30 уч. 2) 48 км/ч, 36 км/ч; 3) 9 км/ч; 4) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{(a+b)^2+4ab}-(a+b)\right)$;

5) 20 км; 6) 103; 7) 120 листов, 15 дней; 8) 10ч, 15ч; 9)25 учеников; 10)80 кг, 60 кг.

Б. 1) $\frac{1}{4}$ кг; 2) 35 кг, 45 кг; 3) 36 м/с, 40 м/с; 4)9 частей, 35 частей;

5) 3 м и 6 м; 6) 4836; 7) 20% и 60%; 8)12л, 8л, 7л; 9)9 вёдер из первой бочки и 3 ведра из второй; 10) 40%.

В. 1) 10л; 2) 21 и 10; 3) 20:6:3; 4)12%; 5) успеет; 6) 300 км;

7) 3 м/мин, 1,8 м/мин; 8) 863; 9) 100 м/с; 10) 12,5 г.

5.Прогрессии

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым числом, называется арифметической прогрессией.
Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Сумма членов арифметической прогрессии определяется по следующим формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$$

Признак арифметической прогрессии формулируется так:
каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое отличное от нуля постоянное число, называется геометрической прогрессией.
Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Признак геометрической прогрессии формулируется так:
каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов:

$$b^2{}_n = b_{n-1} b_{n+1}$$

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется бесконечно убывающей, а её сумма определяется по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Задачи:

А. 1) Найти пятнадцатый член и сумму пятнадцати членов прогрессии 2, 5, 8, ...

2) Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_3 = 25, a_{10} = -3$

3) Найти сумму десяти членов арифметической прогрессии, если $a_4 = 10, a_7 = 19$

4) Сколько нужно взять членов арифметической прогрессии, чтобы сумма их равнялась 54, если $a_4 = 9, a_9 = -6$?

5) Найти сумму первых десяти членов геометрической прогрессии: 10, 20, 40, ...

6) найти сумму первых пяти членов прогрессии: $\sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}, \ldots$

7) $b_1 = 5, q = -\frac{1}{5}, n = 6$. Найти b_n, S_n

8) $b_1 = 81, b_n = -10\frac{2}{3}$. Найти q и S_n, если n=6.

9) Найти сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

10) Найти сумму $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots$

Б. 1) В арифметической прогрессии третий и пятый члены равны соответственно 11 и 19. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

2) Сумма первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение второго её члена на четвёртый равно 45. Сколько членов прогрессии надо взять, чтобы в сумме получилось 24 ?

3) Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 18, а произведение второго члена на третий равно 21. Найти эту прогрессию, если известно, что второй её член – натуральное число.

4) Найти сумму: 1+2+3+...+18+19+20+19+18+...+3+2+1.

5) Первый член геометрической прогрессии равен 1, сумма третьего и пятого членов 90. Найти прогрессию.

6) Три числа, сумма которых равна 144, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как 1, 4, 25-ый члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

7) Между числами 1 и 16 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

8) Разность между первым и вторым членами геометрической прогрессии равна 8, а сумма второго и третьего её членов равна 12. Найти прогрессию, если известно, что она является убывающей.

9) Найти сумму всех положительных чётных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

10) Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равна 4, а сумма кубов её членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

В. 1) Вычислить 7,5+9,8+12,1+...+53,5.

2) Вычислить $32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + \ldots$

3) Определить, при каких x три числа a_1, a_2, a_3, взятые в указанной последовательности, образуют арифметическую прогрессию, если $a_1 = \lg 2, a_2 = \lg(3^x - 3), a_3 = \lg(3^x + 9)$.

4) Решить уравнение $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+...+\frac{1}{x}=3$, где x –целое положительное число.

5) Решить уравнение $\frac{1}{x}+x+x^2+...+x^n+...=\frac{7}{2},|x|<1$

6) Найти сумму $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+...+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$

7) Найти арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первых десяти членов равна 300, а первый, второй и пятый члены прогрессии, кроме того, образуют геометрическую прогрессию.

8) Числа a_1,a_2,a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти a_1,a_2,a_3, если известно, что $a_1+a_2+a_3=21$

9) Сумма первых трёх членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найти первый член прогрессии.

10) Даны три последовательных члена арифметической прогрессии $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$. Найти x.

Ответы:

А. 1)11, 345; 2)33 и -4; 3)145; 4)9 или 4; 5)10230; 6)$\frac{19\sqrt{6}+30}{12}$;

7)$-\frac{1}{625},4\frac{104}{625}$; 8)$-\frac{2}{3},\frac{133}{3}$; 9)2; 10)$\frac{2}{3}$.

Б. 1)210; 2)4; 3)-1;3;7;...; 4)400; 5)q=±3; 6)2;14;98; 7)1;2;4;8;16; 8)16;8;4; 9)810; 10)6;-$\frac{1}{2}$.

В. 1)640,5; 2)20; 3)2; 4)7; 5)$\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; 6)$2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$;

7) a_1=30, d=0; a_1=3, d=6; 8)7;7;7 или $7(1-\sqrt{2});7;7(1+\sqrt{2})$; 9)8 10)$\frac{\Pi n}{2}$, $n\in Z$.

6. Показательная функция и связанные с ней уравнения и неравенства

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.
Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ – убывает на всей числовой прямой. Показательная функция принимает только положительные значения.
Основные свойства степеней, при помощи которых преобразуются показательные уравнения и неравенства:

$$1)\ a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x, \text{если } a > 0,\ b >,\ a \neq 1 \\ \varnothing \quad , \text{если } a = 1,\ b \neq 1 \\ \text{любое}, \text{ если } a = b = 1 \end{cases}$$

2) Если m и k – натуральные числа и k≠1 , то $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$

3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. 4) $a^{x+y} = a^x \cdot b^y$. 5) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$. 6) $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$

7) $(ab)^x = a^x b^x$. 8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$. 9) $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Показательные уравнения и системы
I) А. Решить уравнения:

1) $2^x = 32$. 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} = 9$. 3) $4^{3-2x} = 4^{2-x}$. 4) $2^{x-2} = 1$.

5) $2^{5x+1} = 4^{2x}$. 6) $3^{x+2} - 3^x = 72$. 7) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$.

8) $3 \cdot 25^x - 14 \cdot 5^x - 5 = 0$. 9) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$. 10) $2^{2x+3} - 15 \cdot 2^x - 2 = 0$.

11) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^x = \left(\dfrac{3}{4}\right)^5$. 12) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$. 13) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\dfrac{49}{9}\right)^{-3}$.

14) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-2x} = \left(\dfrac{27}{8}\right)^{-3}$. 15) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\dfrac{125}{64}\right)^2$. 16) $(0{,}5)^{3x-1} = 16^{-2}$.

17) $(0{,}04)^{2-x} = 25^{-1}$. 18) $(0{,}8)^{3-2x} = (1{,}25)^3$. 19) $(3{,}5)^{x-5} = \left(\dfrac{4}{49}\right)^2$.

23) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \dfrac{3}{\sqrt[5]{3}}$. 24) $\sqrt{7^{2x+6}} = \dfrac{7}{\sqrt[4]{7}}$.

Б. Найти наибольшие корни уравнений:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x^2-29} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+5}$. 2) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{4x^2-23} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^{5x^2-13}$.

3) $\left(\dfrac{7}{13}\right)^{28x^2-5} = \left(\dfrac{13}{7}\right)^{5x^2-127}$. 4) $\left(\dfrac{9}{26}\right)^{3x^2-2x} = \left(\dfrac{26}{9}\right)^{5x^2+3x}$.

Решить уравнения:

5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{13\sqrt{x}+5}=\left(\frac{6}{5}\right)^{7\sqrt{x}-45}$. 6) $\left(\frac{51}{9}\right)^{71\sqrt{x-1}+3}=\left(\frac{9}{51}\right)^{3\sqrt{x-1}-293}$.

7) $\left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-3}=\left(\frac{20}{7}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x}}+5}$. 8) $\left(\frac{33}{16}\right)^{\frac{11}{\sqrt{x+1}}+5}=\left(\frac{16}{33}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x+1}}-8}$.

9) $7\cdot5^{x}-5^{x+1}=2\cdot5^{-3}$ 10) $2^{x+3}-5\cdot2^{x}=3\cdot2^{-1}$

11) $3^{x+2}+4\cdot3^{x+1}=21$ 12) $5^{x+1}-5^{x-2}=620$. 13) $2\cdot6^{x}+3\cdot6^{x+3}=325\cdot3^{-1}$

14) $7^{x+1}-3\cdot7^{x}=28$ 15) $4^{x}+4^{x-1}=5$. 16) $3^{1+2x}+3^{2x+3}=10$.

17) $3\cdot7^{x+1}+5\cdot7^{x-1}=152$ 18) $5\cdot2^{2x+2}+3\cdot2^{2x-1}=86$

19) $2^{2x}+14\cdot2^{x+1}-29=0$ 20) $3^{2x+1}+72\cdot3^{x}-75=0$

21) $5^{2x+1}-575\cdot5^{x-1}-250=0$ 22) $2\cdot5^{2x+1}-245\cdot5^{x-1}-5=0$

23) $3\cdot9^{x+2}-26\cdot3^{x+1}-1=0$ 24) $2\cdot4^{x+1}-2^{x+1}-1=0$

25) $36^{x}-204\cdot6^{x-1}-72=0$ 26) $100^{x}-80\cdot10^{x-1}-20=0$

27) $49^{x+1}+55\cdot7^{x+1}-56=0$ 28) $4^{x+1}+19\cdot2^{x}-5=0$

29) $3^{2x+5}-2^{2x+7}+3^{2x+4}-2^{2x+4}=0$. 30) $2^{3x+7}+5^{3x+4}+2^{3x+5}-5^{3x+5}=0$

31) $4\cdot6^{3x+2}-5^{3x+3}+6^{3x+1}-5^{3x+2}=0$ 32) $4\cdot3^{2x}-2^{2x-1}=3^{2x+1}+2^{2x}=0$

33) $2^{3-x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-\frac{1}{2^{x+2}}+\sqrt{\frac{1}{4^{x-1}}}=84$.

34) $6^{x-2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246$. 35) $3^{2x+3}+\sqrt{9^{2x+1}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2-2x}=91$.

36) $2\cdot3^{-2x+2}=3^{-x+1}+1$ 37) $6\cdot5^{-2x+3}-1=5^{-x+1}$

38) $7^{2x+1}+4\cdot21^{x}-3^{2x+1}=0$ 39) $9\cdot16^{x}-7\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$

40) $14\cdot4^{\sqrt{x+1}}+3\cdot14^{\sqrt{x+1}}-2\cdot49^{\sqrt{x+1}}=0$

В. Решить уравнения:

1) $5^{x}-1=\sqrt{6+2\cdot5^{x}}$ 2) $3^{x+1}-2=\sqrt{10-3^{x+2}}$.

3) $|3x-2|^{\sqrt{2x-3x^{2}}}=1$. 4) $|1-3x|^{\sqrt{5x^{2}+7x-2}}=|1-3x|^{2}$.

5) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x}+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x}=4$. Наибольший корень.

6) $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{x}+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^{x}=6$.

7) $\sqrt[x]{81}-\sqrt[x]{9^{x+1}}+18=0$.

8) $2^{x^{2}-4x+5}=1+\sin^{2}\frac{\text{Ï}x}{4}$.

9) $3^{x}+3^{2-x}=3(1+\cos 2\text{Ï}x)$.

10) $2^{x+1}+2^{1-x}=1-4x-x^{2}$. Число решений, ответ обосновать.

II) Решить системы показательных уравнений.

А.

1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = 7. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 5^y = 11, \\ 5 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^y = 24. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 3^y = 12, \\ 7^x \cdot 3^y = 15. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = \dfrac{4}{9}, \\ x + y = 4. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5^{3x} = 5^{4y+7}, \\ 2^x \cdot 4^y = 16. \end{cases}$

Б.

1) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 2^{x-1} \le y. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2-7x+12} = 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-y)0,5^{y-x} = 5 \cdot 2^{x-y}, \\ (x-y)^{\frac{x+y}{7}} = 125 \end{cases}$

Ответы:

I) А. 1) 5, 2) -1, 3) 1, 4) 2, 5) -1, 6) 2, 7) 1, 8) 1, 9) 1, 10) 1,
11) $-\dfrac{5}{2}$, 12) -5, 13) $-\dfrac{3}{2}$, 14) -4, 15) -6, 16) 3, 17) 1, 18) 3,
19) -2, 20) 0, 21) $-\dfrac{12}{5}$, 22) $\dfrac{5}{2}$, 23) $\dfrac{1}{10}$, 24) $-\dfrac{9}{4}$.

Б. 1) 2, 2) 2, 3) 2, 4) 0, 5) 4, 6) 17, 7) 36, 8) 35, 9) -3, 10) -1,
11) 0, 12) 3, 13) -1, 14) 1, 15) 1, 16) $-\dfrac{1}{2}$, 17) 1, 18) 1, 19) 0, 20) 0,
21) 2, 22) 1, 23) -1, 24) -1, 25) 6, 26) 1, 27) -1, 28) -2, 29) -1, 30) -1,
31) 0, 32) $\dfrac{1}{2}$, 33) -4, 34) 4, 35) $\dfrac{1}{2}$, 36) 1, 37) 2, 38) -1, 39) 2, 40) 0.

В. 1) 1, 2) 0, 3) 0, 4) -2; $\dfrac{3}{5}$, 5) 2, 6) ±2, 7) 2, 8) 2, 9) 1,
10) нет решений.

II) А. 1) (3;2), 2) (0;1), 3) (0;1), 4) (2;1), 5) $(\log_7 5;1)$, 6) (2;2),
7) (1;4), 8) (3;0,5).

Б. 1) $\left(\log_2 \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$, 2) (2;2), 3) (4;2), (5;1), (3;3), 4) (13;8).

Показательные неравенства и системы:

I) А. Найти наибольшие целые значения x, удовлетворяющие неравенствам.

1) $5^{x-1} < 25.$ 2) $6^{2x} \le \frac{1}{36}.$ 3) $3^{3-x} \ge 9.$ 4) $2^{x^2-4x} < 1.$

5) $2^{3x} < \sqrt[5]{2}.$ 6) $9^{\frac{2x}{3}} < 243.$ 7) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+1}{2}} > 4.$ 8) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \le 7.$

9) $250 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0$ 10) $147 \cdot 7^{x-2} - 3 \cdot 7^{2-x} \le 0$

11) $\frac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$

Б. Найти наименьшие целые значения x, удовлетворяющие неравенствам.

1) $2^{x+3} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1}$ 2) $7^{x+2} - 8^{x+2} < 6 \cdot 7^{x+1} - 7 \cdot 8^{x+1}$

3) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \le 0$ 4) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \le 5^x - 5.$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \ge \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}.$ 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \ge 4.$ 7) $\frac{7^x - 30}{7^{x-1} + 1} \le -14.$

8) $2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0.$ 9) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-2|} > \left(\frac{1}{25}\right)^{|x|}.$

10) $\frac{5}{2^{x+2} - 1} > \frac{1}{2^x - 1}.$ 11) $\frac{3 \cdot 2^{x+2} - 27}{2^x - 1} \ge 2^x + 3$

В. Найти наименьшие целые значения x, удовлетворяющие неравенствам.

1) $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4.$ 2) $(x-3)^{x-9} > 1.$ 3) $(x+1)^{x^2-4} \ge 1.$

4) $2^{|x|} + 2^x \ge 2\sqrt{2}.$ 5) $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0$

6) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$ 7) $\left|4^{x-1} - \frac{5}{4}\right| \le \frac{4^x}{8} + \frac{3}{4}.$ Сумма целых решений.

8) $|x|^{x^2-x-2} < 1.$

II) Решить системы с показательными неравенствами.

1) $\begin{cases} 9^{x+0,5} - 10 \cdot 3^x + 3 \le 0 \\ x \ge -0,5 \end{cases}$ Длина промежутка.

2) $\begin{cases} 3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29, \\ 1 \le x \le 12. \end{cases}$ Длина промежутка.

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} \geq 1, \\ 2 \cdot 4^{2x} \geq 32^x. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \leq 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x} + 0{,}5 > 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^x > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3{,}5} < 8\sqrt{2} \end{cases}$ 6) $1 < 3^{|x^2-x|} < 9.$

Ответы:

I) А. 1) 2, 2) -1, 3) 1, 4) 3, 5) 0, 6) 3, 7) -3, 8) 1, 9) 4, 10) 1, 11) 1.

Б. 1) 2, 2) 0, 3) 0, 4) -1, 5) -3, 6) -1), 7) указать нельзя, 8) 0, 9) указать нельзя, 10) -1, 11) 2.

В. 1) 4, 2) 5, 3) 3, 4) указать нельзя, 5) указать нельзя, 6) -2, 7) 3, 8) нет.

II) 1) 1,5, 2) 10, 3) 1, 4) $(0;\dfrac{\Pi}{2})$, 5) (-1;3), 6) (-1;0) v(0;1) v(1;2).

7. Логарифмическая функция и связанные с ней уравнения и неравенства

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где a>0, a≠1, x>0;

Логарифмом числа b по основанию a (a>0, a≠1) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получилось b:

$$\log_a b = x <=> a^x = b$$

Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$.

Свойства логарифмов:

1. $\log_a a = 1$, a≠1; a>0.
2. $\log_a 1 = 0$, a≠1; a>0.
3. $\log_a bc = \log_a b = \log_a c$; a≠1; a>0; b>0, c>0.
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, a≠1; a>0, b>0, c>0.
5. $\log_a b^p = p \log_a b$, a≠1; b>0; a>0.
6. $\log_{a^q} b = \frac{1}{q} \log_a b$, a≠1; a>0; b>0.
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, a≠1; c≠1; a>0, c>0, b>0.
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, a≠1; b≠1; a>0; b>0.

I) Вычислить и решить уравнения:

A. 1) $2^{\log_8 125}$. 2) $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7}$. 3) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$. 4) $3^{2-\log_3 5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 5}$.

5) $3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}$

6) $\log_3(2x-1) = 2$. 7) $\log_5(x+1) = \log_5(4x-5)$.

8) $2\log_{0,5} x = \log_{0,5}(2x^2 - x)$. 9) $\log_5(x-10) = 2 + \log_5 2$.

10) $\lg(3-x) - \lg(x+2) = 2\lg 2$.

Найти наибольшие корни уравнений.

11) $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$ 12) $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x+3)$.

13) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$. 14) $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} - 2 = 0$.

15) $\log_3(x^2 - 3x)^2 - \log_3(1-2x)^2 = \log_3 4$

Б. Решить уравнения.

1) $\lg^2 x = \lg 10x$. Произведение корней. 2) $\dfrac{\lg^2 10x}{5-\lg x}=1$.

3) $\dfrac{1}{5-\log_{\frac{1}{3}} x}+\dfrac{2}{1+\log_{\frac{1}{3}} x}=1$. 4) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \log_9 x = 0$.

5) $3\log_8(x+1)=8+3\log_{x+1} 8$. Больший корень.

6) $2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x)$.

7) $3+2\log_2\left(\dfrac{x}{2}-6\right)=\log_2(x+3)$. 8) $\dfrac{1}{6}\log_2(x-2)-\dfrac{1}{3}=\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$.

9) $\log_2 x+\log_5 x=\log_5 10$ 10) $\log_{3x} 3=\log_x^2 3$.

11) $x^{\lg x-1}=100$. Наименьший корень.

12) $3x=x^{\log_3 x^2}$. Больший корень.

13) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x\right|+3=\left|1+\log_5 x\right|$.

14) $5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=10$. 15) $5\sqrt{\log_3 x}-\log_3 9x-4=0$. Меньший корень.

16) $3x\log_3 x+2=\log_{27} x^3+6x$. 17) $\lg(x^{\lg x})=1$.

18 $\log_2\sqrt{2x+3}\,\log_x 2=1$. Наибольший корень.

В. Решить уравнения.

1) $2x^2+\log_2(7+2x-x^2)=4+x^4$.

2) $\log_2(6x-x^2-5)=x^2-6x+11$.

3) $\log_2(x(1-x))=-2+\left|\sin\dfrac{\Pi}{x}\right|$.

4) $\log_2\left(9^x+2\cdot 3^x-5\right)=1+2\log_4\left(3^{x+1}-4\right)$

5) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$

II) Решить системы логарифмических уравнений.

1) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\ x^2-y=20.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1,\\ \log_{xy}(x+y)=0.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}8^{\log_8(x-4y)}=1,\\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8.\end{cases}$

5) $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{2y} = 64(x > 0). \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \lg\sqrt{(x = y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \lg 2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y + 23) = 3. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

III) Решить логарифмические неравенства

А. Найти наибольшие целые решения неравенств.

1) $\log_5(3 - 8x) > 0$. 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$. 3) $\lg(4x - 1) \le 1$.

4) $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3)$ 5) $\log_{\frac{1}{7}}(4x - 3) \ge \log_{\frac{1}{7}}(x \ne 3)$

6) $\log_{\frac{1}{3}}(3x - 1) - \log_{\frac{1}{3}} 6 > 0$. 7) $\lg 2^{3x-1} - \lg 2^{x+2} < \lg 4$.

8) $(x + 1)\log_{0,7} 3 - \log_{0,7} 27 > 0$. 9) $5^{\log_5(2x-1)} < 7$. 10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)} < 3$.

11) $(2x - 3)\log_{\frac{3}{4}} 5 - 3\log_{\frac{3}{4}} 5 > 0$. 12) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + \frac{x}{2} - 1) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$.

Б. Решить неравенства.

1) $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \ge 0$. 2) $\log_2^2(5 - x) - 6\log_2(5 - x) + 9 \le 0$.

3) $\dfrac{1}{\log_2 x - 4} > \dfrac{1}{\log_2 x}$. 4) $\dfrac{4}{\lg 10x} - \dfrac{5}{\lg 100x} \ge 0$.

5) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)) > 0$. 6) $|\lg x - 1| < 1$. 7) $\log_2(2^x - 2) < 3 - x$.

8) $\sqrt{\lg x} \ge 2 - \sqrt[4]{\lg x}$. 9) $\log_5^2 x + |\log_5 x| \ge 6$.

10) $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$. Целое решение.

11) $x^{\lg x} < 100x$.

В. Решить неравенства смешанного типа. Обобщенный метод промежутков.

1) $(4x - 1)\log_2 x \ge 0$ Наименьшее целое решение.

2) $\dfrac{\log_{0,1}(x + 2)}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} \le 0$. 3) $2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4$. Длина промежутка.

4) $\frac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)} \ge 0$. 5) $\frac{\sqrt{2x+1}}{2+\log_{0,5}(x+1)} \ge 0$.

Найти область определения функции.

6) $y=\frac{\sqrt{x+30-x^2}}{\log_2(x+2)}$. Сумма целых значений.

7) $f(x)=\lg(10x^2-x)+\sqrt{3+5x}$. 8) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+1}{x-1}}$.

Решить неравенства.

9) $\log_{x+3}(x^2-x)<1$. 10) $x\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}-x)>|x|$.

IV Решить системы логарифмических неравенств.

1) $\begin{cases}\frac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0\\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_{2-x}(2-y)>0,\\ \log_{4-y}(2x-2)>0.\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_2\frac{3x+1}{4-x}\ge 0,\\ \log_2\frac{3x+1}{4-x}<1.\end{cases}$ Количество целых решений.

4) $\begin{cases}\log_2(4x-x^2-3)\le 0,\\ x-1\ge 0.\end{cases}$ Количество целых решений.

Ответы:

I) А. 1) 5, 2) -2, 3) 1, 4) 2, 5) 100, 6) 5, 7) 2, 8) 1, 9) 60, 10) -1, 11) 2, 12) 9, 13) 27, 14) 10, 15) 1,

Б. 1) 10, 2) 10^{-4} и 10, 3) $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{27}$, 4) 3, 5) 511, 6) -4, 7) 15, 8) 3, 9) 2, 10) $3^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$,

11) 0,1 12) 3, 13) [25;+∞), 14) 2, 1 5) 81, 16) $\frac{1}{3}$ и 9, 17) 0,1 и 10, 18) 3.

В. 1) 1, 2) 3, 3) 0,5, 4) 1, 5) 5 и 5^{-4}.

II) 1) (5;5), 2) (1;2), (16;-28), 3) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, 4) (5;1), 5) $(\sqrt{2};2)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};-3\right)$,

6) (-10;20), $\left(\frac{10}{3};\frac{20}{3}\right)$, 7) (2;4), 8) (27;4), $\left(\frac{1}{81};-3\right)$.

III) А. 1) 0, 2) 6, 3) 2, 4) 3, 5) 2, 6) 2, 7) 2, 8) 1, 9) 3, 10) 3, 11) 1, 12) $(1;+\infty)$

Б. 1) $(0;\frac{1}{2}]\cup[4;+\infty)$, 2) -3, 3) $(0;1)\cup(16;+\infty)$, 4) $(0;\frac{1}{100})\cup(\frac{1}{10};1000)$,

5) $(1;\sqrt[3]{5})$, 6) (1;100), 7) (1;2), 8) $[10;+\infty)$, 9) $(0;\frac{1}{25}]\cup[25;+\infty)$,

10) 1, 11) (0,1;100).

В. 1) 1, 2) [-1;1], 3) 0,245, 4) 2, 5) [-0,5;3), 6) 21, 7) $(-\frac{3}{5};0)\cup(\frac{1}{10};+\infty)$,

8) $(1;+\infty)$, 9) (-3;-2)v(-1;0)v(1;3), 10) $(-\infty;-\frac{8}{3})\cup(0;\frac{1}{3})$.

IV) 1) (5;8)v(8;29), 2) (x,y), где $x\in(1,5;2)$, $y\in(1;2)$,

3) 1, 4) 1.

8. Тригонометрия

Основные тригонометрические формулы.

I группа. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,\quad 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

II группа. Формулы сложения.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta},\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

III группа. Формулы кратных аргументов.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta},\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

III группа. Формулы кратных аргументов.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-\sin^2\alpha,$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=3\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

IV группа. Формулы преобразования сумм или разностей в произведения.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

V группа. Преобразование произведений в суммы или разности.

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

VI группа. Формулы понижения степени.

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4},\quad \sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}.$$

VII группа. Формулы половинного аргумента.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

VIII группа. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\quad tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

А. Найти радианные меры углов, заданных в градусах:

1) 60°, 2) 90°, 3) 45°, 4) 135°, 5) 360°.

Найти градусные меры углов, заданных в радианах:

6) $\frac{\pi}{4}$, 7) $\frac{\pi}{6}$, 8) $\frac{2\pi}{3}$, 9) $\frac{3\pi}{2}$, 10) 6π.

Вычислить значения тригонометрических функций.

11) sin930°. 12) $\sin\frac{9\pi}{2}$. 13) cos(-600°). 14) tg(-765°). 15) $ctg\frac{31\pi}{6}$.

16) sin75°sin15°. 17) $\frac{10}{\sqrt{2}}ctg135^\circ\sin 210^\circ\cos 225^\circ$. 18) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

19) $tg(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos(-0{,}5)+arcctg1)$. 20)sin(2arctg3).

21) $tg\left(arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{4}\right)$. 22) $\frac{10\sin 40^\circ\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$. 23) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$.

24) $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

25) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

26) sin10°sin50°sin70°. 27) $\frac{1-\sin(2x+1{,}5\pi)}{\sin(\pi+3x)-\sin(-x)}$, если $x=\frac{\pi}{6}$.

28) $\frac{\sin 91^\circ-\sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ+\sqrt{2}\sin 44^\circ}$.

Упростить тригонометрические выражения.

29) $1+\frac{1-\cos^2\alpha+tg^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

30) $(3\sin x+2\cos x)^2+(2\sin x-3\cos x)^2$.

31) $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

32) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\cos(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)}$.

33) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45°-\alpha)}{2\sin(30°+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}+\sqrt{2}tg\alpha$.

34) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$,

35) $\frac{(tg\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha+ctg\alpha)}{(\cos\alpha+ctg\alpha)(tg\alpha-\cos^{-1}\alpha)}$.

36) $\frac{1+\cos(2\alpha+630°)+\sin(2\alpha+810°)}{1-\cos(2\alpha-630°)+\sin(2\alpha+630°)}$.

37) $y=\sin^2 x+2\sin x+1$. Найти область значений функции.

Б. Решить тригонометрические уравнения.

1) $\sin(35°+x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найти решения на интервале (-80°; 0°).

2) $\sin^2 2x=\frac{3}{4}$. Найти решение на интервале (0°; 45°).

3) $\cos 6x+6\cos^2 3x=1$.

4) $\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=1$. Число корней на [-3;2]

5) $\sin^2(180°+x)-\sin x-2=0$. Найти решения на интервале [-180; 0°]

6) $\frac{2-3\sin x+\cos(2x+\pi)}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0$.

7) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x$. Число корней на [-π; $\frac{7\pi}{6}$]

8) $\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=-1$.

9) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. Число корней на [-π; π].

10) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2=0$.

11) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$. Найти решение на (0; 180°).

12) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$.

13) $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$. Число корней на $[0; \frac{\pi}{2}]$.

14) $\sin^2 2x = 3\cos^2 x - \sin^2(x+\pi)$. Найти решения на (-π; π).

15) $\cos \pi x \sin 7\pi x = \cos 3\pi x \sin 5\pi x$. Число корней на [1; 2].

16) $3\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = 0$. Найти решения на (0°; 90°).

17) $3\sin 2x - 4\cos 2x = 5$.

18) $(2\cos^2 x - 1)\sqrt{2x - x^2} = 0$.

19) $\sqrt{1+\cos 4x}\sin x = 2\sin\frac{\pi}{4}$.

20) $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2}\cos x$.

21) $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$.

22) $\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$. Найти решение на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

23) $(x^2 - 12x + 23)\left|ctg\frac{x}{2}\right| = 12ctg\frac{x}{2}$. Сумма целых корней.

24) $3^{|\sin x - 1|} = 9$

25) $tgx - ctg 2x = \frac{1}{1-\cos 2x}$. Найти решение на [-0,5; 1].

26) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$.

B. Решить системы тригонометрических уравнений.

1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ tgxtgy = 3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \cos 2y\sqrt{\sin x} = 0, \\ \cos 2y + 4\sin^2 x - 3 = 0. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \log_3 \sin x + 1 = \log_3 y, \\ 9(1+\cos x) = 2y^2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \cos 2x - 2tg^4 y = -4, \\ \sin x + \frac{1}{\cos^2 y} = 3. \end{cases}$

Ответы:

А. 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) 3) $\frac{\pi}{4}$, 4) $3\frac{\pi}{4}$, 5) 2π, 6) 45°, 7) 60°, 8) 120°, 9) 270°,

10) 1080°, 11) -0,5, 12) 1, 13) -0,5, 14) -1, 15) $\sqrt{3}$, 16) 0,25, 17) -2,5,

18) 120°, 19) -2-$\sqrt{3}$, 20) $\frac{3}{5}$, 21) $\frac{6}{7}$, 22) 55, 23) 1, 24) 1,5, 25) 1, 26) 0,125,

27) 1, 28) 0,1, 29) 3, 30) 13, 31) 1, 32) 1, 33) 0, 34) -1, 35) 1, 36) $ctg\alpha$,

37) [0;4].

Б. 1) нет решений, 2) 30°, 3) $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$, 4) 2, 5) -90°,

6) $x_1=\frac{\pi}{2}=2\pi\kappa$, $\kappa\neq 0$ $x_2=(-1)\frac{k\pi}{6}+\pi k; \kappa\in Z$ 7) 3, 8) $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi\kappa}{2}, \kappa\in Z$,

9) 1, 10) $x=\frac{\pi}{3}+\pi\kappa$, $\kappa\in Z$, 11) 90°, 12) $x_1=\frac{\pi\kappa}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\kappa$, $\kappa\in Z$,

13) 6, 14) $x_1=-\frac{3\pi}{4}, x_2=-\frac{\pi}{4}, x_3=\frac{\pi}{4}, x_4=\frac{3\pi}{4}$, 15) 7, 16) 45°,

17) $x=arctg3+\pi\kappa, \kappa\in Z$, 18) $x_1=0, x_2=\frac{\pi}{4}, x_3=2$, 19) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa\in Z$,

20) $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi\kappa, x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa; \kappa\in Z$, 21) $x=\pm\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\pi\kappa, \kappa\in Z$,

22) $\frac{3\pi}{4}$, 23) 6, 24) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa\in Z$, 25) $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=-\frac{\pi}{8}$, 26) 1.

В. 1) $\left((-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6}+\pi\kappa; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right); n,\kappa\in Z$, $\left((-1)^{\kappa+1}\frac{\pi}{6}+\pi\kappa; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right); n,\kappa\in Z$,

2) $\left(\frac{\pi}{2}(2\kappa+3); \frac{\pi}{6}(6\kappa-1)\right), \kappa\in Z$, 3) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+\kappa); \pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-\kappa)\right); n,\kappa\in Z$,

4) $\left((-1)^{\kappa}\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi\kappa}{2}\right); n,\kappa\in Z$, 5) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \kappa\in Z$,

6) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi\kappa\right); n,\kappa\in Z$,

7) $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm arctg\sqrt{\frac{3}{2}}+\pi\kappa\right); n,\kappa\in Z$.

9. Векторы

Расстояние между точками пространства А($x_1;y_1;z_1$) и В($x_2;y_2;z_2$) определятся по формуле:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (x;y;z), то он может быть записан так:

$\overrightarrow{AB}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - единичные векторы, направленные вдоль осей OX, OY, OZ соответственно.

Длина вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ находится по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Если даны два вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, тогда

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$,

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$ и $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, выражается формулой $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ имеет вид $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

Условием коллиниарности (параллельности) ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является существование такого числа λ, что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Для коллинеарных векторов $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda$.

УПРАЖНЕНИЯ

А. 1) Найти скалярное произведения векторов $\vec{a}=(2;4;1)$ и $\vec{b}=(3;5;7)$.

2) Найти длину вектора $\vec{a}=(3;4)$.

3) При каких значениях x векторы $\vec{a}=(-1;1;2)$ и $\vec{b}=(x^2;x-2;x^2-12)$ коллинеарны?

4) При каком значениях x векторы $\vec{a}=(x;3;4)$ и $\vec{b}=(5;6;3)$ перпендикулярны?

5) Найти длину вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(4;-2;9)$.

6) Найти угол в градусах между векторами

$\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

7) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45° и $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$.

8) Найти в градусах наибольший угол треугольника, вершины которого расположены в точках А (1;2), В (1;4), С(3;2).

9) Найти угол в градусах между диагоналями четырёхугольника с вершинами в точках А (3;3), В (2;6), С(1;5), Д(6;2).

10) Найти координату Z середины отрезка АВ, где А (3;5;7), В (3;1;-1)

Б. 1) Зная, что $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, (\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, найти, при какой значении β векторы $\vec{p}=\beta\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны.

2) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в 120° и $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$. Найти

3) Найти угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{\vec{b}}{2}$, если $\vec{a}=(-4;2;4)$, $\vec{b}=(2;-2;0)$.

4) Найти произведение координат z, y, z вектора $\vec{p}=(x,y,z)$, если $\vec{p}\cdot\vec{a}=6, \vec{p}\cdot\vec{c}=4, \vec{a}=(1;1;0), \vec{b}=(1;-2;3), \vec{c}=(1;-1;0)$.

5) Найти координату x точки М, лежащей на оси ОХ и одинаково удалённой от точек А (1;2;3) и В (-3;3;2).

6) Длины нулевых ветров $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Найти угол между этими векторами, если известно, что $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=5\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярны.

7) Найти значение выражения $A=S\cdot x\cdot y$, где S – площадь треугольника АВС, координаты вершин которого А(1;2), В(1;4), С(3;2) а x и y координаты центра описаной вокруг треугольника окружности.

8) Дан треугольник с вершинами в точках А(0;0), В(2;4), С(1;3). Найти квадрат длины высоты BD треугольника АВС.

9) Найти площадь четырёхугольника, вершины которого расположены в точках А(0;0), В(-1;3), С(2;4), Д(3;1).

10) В треугольнике АВС медианы пересекаются в точке О. Найти сумму векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

В. 1) В ромбе ABCD длина сторон равна 6, а величина угла BAD равна $\frac{\pi}{3}$. На стороне ВС взята точка Е такая, что ЕС=2. Найти расстояние от Е до центра симметрии ромба.

2) Найти угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a}-\vec{b})^2+(2\vec{a}-\vec{b})^2=56, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$.

3) В окружности проведены радиусы ОА, ОВ, ОС. Найти величину угла АОВ, если $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

4) При каких x верно неравенство $\left|(x-2)\vec{a}\right| > 3\vec{a}$, если $\vec{a} \neq 0$?

5) Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма ABCD, если $\overrightarrow{AA} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - единичные попарно перпендикулярные векторы.

6) Известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$. Найти значение суммы скалярных произведений $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

7) Даны векторы $\vec{a} = (3;-1)$, $\vec{b} = (1;-2)$, $\vec{c} = (-1;7)$. Найти произведение коэффициентов в разложении вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

8) Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, а векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярны.

9) Найти длину вектора $|\vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 6, |\vec{a} + \vec{b}| = 11$ и $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

10) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найти произведение x*y, если выполнено векторное равенство $2^x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = 40 \cdot 5^y \cdot \vec{a} + (2-x)\vec{b}$.

Ответы:

А. 1) 33, 2) 5, 3) -2, 4) -6, 5) 13, 6) 90°, 7) 2, 8) 90°, 9) 90°, 10) 3.

Б. 1) 40, 2) 7, 3) 135°, 4) 10, 5) -1, 6) 60°, 7) 12, 8) 0,4, 9) 10, 10) 0.

В. 1) $\sqrt{13}$, 2) 120°, 3) 120°, 4) $(-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$, 5) $\frac{7}{5\sqrt{33}}$, 6) -3, 7) -6,

8) 60°, 9) 7, 10) -3.

10. Нестандартные задачи

Решить уравнения.

1) $\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}$. Подстановка $y=x^2-x+2$.

2) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$. Подстановка $y=\sqrt{2x-5}$.

3) $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0$. Подстановка $y=x^2$.

4) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+3}+3x-16$. Введение двух переменных $u=\sqrt{2x+3}$ и $v=\sqrt{x+1}$.

5) $x^2+\frac{81x^2}{(x+9)^2}=40$. Подстановка $y=\frac{x^2}{x^2+9}$.

6) $x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0$. Подстановка $y=x+\frac{1}{x}$.

7) $(x^2+x+2)(x^2+2x+2)=2x^2$. Обе части делим на x^2 и используем подстановку $y=x+\frac{2}{x}$.

8) $(x^2-6x+9)^2=x(x^2-4x-9)$. Обе части делим на x^2и используем подстановку $y=x-6-\frac{9}{x}$.

9) $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=4x^2$. Преобразуем левую часть, обе части делим на x^2 и используем подстановку $y=x-9+\frac{8}{x}$.

10) $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$. Числители и знаменатели обеих дробей делим на x, используем подстановку $y=2x+\frac{3}{x}$.

11) $\frac{x^4+1}{x(x^2-1)}=\frac{41}{15}$. Числитель и знаменатель делим на x^2и используем подстановку $y=x+\frac{1}{x}$.

12) $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$. Вводим две переменные.

13) $\sqrt{3y^2+6y+7}+\sqrt{5y^2+10y+14}=4-2y-y^2$. Метод ограничений.

14) $\sqrt{x^2-9}+2\sqrt{x^2-16}=\frac{50}{x}$. Функциональный метод.

15) $x^2-2x+\frac{1}{x^2-2x+2}=\sqrt{3+2x-x^2}-2$. Метод ограничений. Использовать $x^2-2x+2>0$.

16) $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$. Находим О.Д.З. и рассматриваем функции.

17) $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-16}-y+5$. Находим О.Д.З.

18) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$. Левую и правую части умножаем на сопряжённое выражение левой части.

Ответы:

1) -1 и 2, 2) 15, 3) ±2, 4) 3, 5) $1\pm\sqrt{19}$, 6) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$,
7) -1 и -2, 8) $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$; -1;9, 9) $\frac{11\pm\sqrt{89}}{2}$, 10) 2 и $\frac{3}{4}$, 11) 3 и $\frac{1}{3}$,
12) 3; -1 3,5, 13) -1, 14) 5, 15) 1, 16) 2, 17) x=2; y=1,5, 18) 4.

11. Производная и ее применение

1. Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \ln a$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

2. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ - дифференцируемые функции аргумента x, C – произвольная константа. Тогда имеют место формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad (Cu)' = Cu', \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0),$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

3. Производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ по независимому аргументу x находится по формуле:

$$y'_x = f'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

или в другой записи:

$$y'_x = y'_r \cdot u'_x$$

пример: $y = \ln\sin x, y' = (\ln\sin x)'_{\sin x}(\sin x)'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx$

4. Уравнение касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

5. Если на некотором промежутке X непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную производную $f'(x)\rangle 0$ (отрицательную $f'(x)\langle 0$), то функция $f(x)$ на промежутке X возрастает (убывает).

6. Необходимый признак экстремума (максимума и минимума) функции: если в точке x_0 функция имеет экстремум, то ее производная $f'(x_0)$ или равна нулю, или не существует. Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются критическими точками функции. Не всякая критическая точка функции является ее точкой экстремума. Например, в критической точке x=0 функция $y=x^3$, экстремума не имеет.

Достаточный признак экстремума функции: если производная непрерывной функции при переходе через критическую точку x_0 слева направо меняет знак с „+" на „-", то в точке x_0 функция имеет максимум; если производная меняет знак с „-" на „+", то в точке x_0 функция имеет минимум.

Если производная $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 не меняет знак; то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

7. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$, определенной и непрерывной на замкнутом промежутке $[a,b]$ и дифференцируемой на (a,b) производят по правилу:

а) находят критические точки x_1, x_2 .. x_n функции, т. е. точки, где производная обращается в нуль или не существует;

б) для критических точек x_1, x_2 .. x_n, входящих в промежуток $[a,b]$ вычисляют значения $f(x_1)$, $f(x_2)...f(x_n)$;

в) вычисляют значения функции на концах промежутка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$;

г) из полученных значений $f(x_1)$, $f(x_2)...f(x_n)$, $f(a)$; $f(b)$ выбирают наименьшее и наибольшее, которые и будут наименьшими и наибольшими значениями функции на промежутке. $[a,b]$

Задачи

А.

1. Найти производную функции y= f(x) по x:

а) $f(x)=x^3-3x^2+\sqrt{x}+5\ln 3$ б) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ в) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2}$

г) $f(x)=x\sin 2x$

д) $f(x)=x^2\ln 5x$ е) $f(x)=x2^{x^3}$ ж) $f(x)=\ln\sin x^3$ з) $f(x)=\sqrt{x}\cdot ctg\,5^x$

2. Составить уравнение касательной к графику функции f(x):

а) $f(x)=x^3$ в точке с абсциссой $x=-1$

б) $f(x)=\sin x$ в точке с абсциссой $x=0$

в) $f(x)=3-2x^2$ в точке с абсциссой $x=-2$

г) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ в точке с абсциссой $x=-2$

д) $f(x)=x^2e^{-x}$ в точке с абсциссой $x=1$

3. Определить наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+1$ на отрезке $[0;3]$

б) $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$ на отрезке $[1;4]$

в) $f(x)=\frac{3}{2}x^4-6x+3$ на отрезке $[-1;2]$

г) $f(x)=x^3-4x^2+4x+3$ на отрезке $[1;3]$

Б. 1. Найти промежутки монотонности (возрастания и убывания) и экстремумы функции:

а) $f(x)=x^2\ln x$ б) $f(x)=x^3e^{-x}$

в) $f(x)=x^2(x-3)$ г) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-7x+3$,которая параллельна прямой $5x+y-3=0$

3. На кривой $f(x)=x^2-x+5$ найти точку, касательная в которой образует угол 45° с осью абсцисс.

4. Найти наименьшее значение функции
$f(x)=ax^2+4x+C$ на отрезке $[2;3]$, если $f(-2)=-13$, $f(4)=-25$

В. 1. Найти кратчайшее расстояние от точки A(3,4) до прямой $y=-2x$

2. Найти высоту h конуса наименьшего объема, который можно описать вокруг шара радиуса R.

3. Найти уравнение общей касательной к параболам $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$

4. Найти уравнение касательной к графику функции $y=x^2-5x+6$, проходящей через точку (1;1)

5. Найти площадь треугольника, образованного касательными, проведенными к графику функции $y=\sqrt{x}$, проходящими через точку (2;1;5) и секущей, проходящей через точки касания.

Ответы:

А 1) а) $3x^2-6x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ б) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ в) $\frac{2-2x}{x^3}$ г) $\sin 2x+2x\cos 2x$ д) $x+2x\ln 5x$

е) $2^{x^3}(1+3x^3\ln 2)$ ж) $3x^2\text{ctg}x^3$ з) $\frac{1}{2\sqrt{x}}ctg5x-\frac{\sqrt{x}5^x\ln 5}{\sin^2 5^x}$

2) а) $y=3x+2$ б) $y=x$ в) $y=8x+11$ г) $y=\frac{5}{4}x+1$ д) $y=\frac{x}{e}$

3) а) $f_{наим}=1$; $f_{наиб}=10$ б) $f_{наим}=2$, $f_{наиб}=\frac{10}{3}$ в) $f_{наим}=-\frac{3}{2}$, $f_{наиб}=15$

г) $f_{наим}=3$, $f_{наиб}=6$.

Б. 1.

а) $(0;e^{-\frac{1}{2}})$ - убывает; $(e^{-\frac{1}{2}};+\infty)$ - возрастает

б) $(-\infty;3)$ - возрастает; $(3;+\infty)$ - убывает

в) $(0;2)$ - убывает; $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ - возрастает

г) $(-\infty;\frac{3}{4})$ - возрастает, $(\frac{3}{4};1)$ - убывает

2) y= -5x+2

3) (1;5)

4) $f_{наим}= -8$, $f_{наиб}= 3$

В. 1. $2\sqrt{5}$ 2) 4R 3) y= 8x+4 4) e+x-2=0 5) 0,25

12. Планиметрия

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника; эта точка делит каждую медиану в отношении 2: 1, считая от вершины.
2. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону С на части c_1 и c_2, пропорциональные прилежащим сторонам a и b , т. е. $\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{a}{b}$
3. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника и являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.
4. Перпендикуляры, проведенные через середины сторон треугольника, пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника.
5. Теорема синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$,

где a,b,c – стороны, α,β,γ-противолежащие им углы треугольника, R – радиус окружности, описанной около треугольника.

6. Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos\alpha$
7. Формулы для вычисления площади треугольника:

$S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, $S=\dfrac{abc}{4R}$, $S=pr$, $p=\dfrac{a+b-c}{2}$

Для равностороннего треугольника $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Для прямоугольного треугольника $S=\dfrac{1}{2}ab$ (a,b - катеты)

8. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $c^2+d^2=2(a^2+b^2)$
9. Площадь параллелограмма вычисляется по формулам $S=ah_a=bh_b$, $S=abc\sin\alpha$ (a,b-стороны, α - угол между смежными сторонами)
10. Площадь ромба $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2$ (d_1,d_2- диагонали ромба)
11. Площадь трапеции $S=\dfrac{a+b}{2}h$ (a,b –основания, h- высота)
12. Площадь выпуклого четырехугольника:

$S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$, где d_1и d_2 – диагонали, а γ - угол между диагоналями.

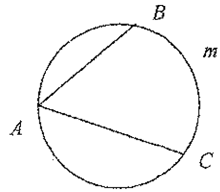
13. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна 180°(n-2). (n- число сторон многоугольника)
14. Сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°.
15. Уравнение окружности с центром (a,b) и радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

16. Если через точку М, лежащую внутри окружности, проведены две хорды АВ и CD, то произведение отрезков хорд равны: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$;

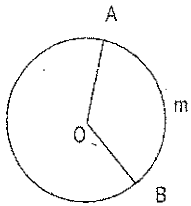
17. Вписанный угол (образован двумя хордами, исходящими из одной точки окружности) измеряется половиной дуги, на которую опирается,

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{C_m B}$$



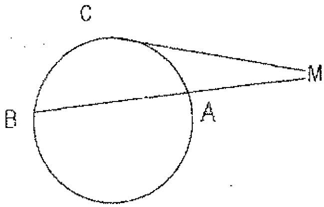
18. Центральный угол (образован двумя радиусами, исходящими из центра окружности) измеряется дугой, на которую опирается,

т.е.



$$\widehat{AOB} = \overset{\smile}{B_m A}$$

19. Если из точки М, лежащей вне окружности, проведены касательная МС и секущая МАВ, то $MC^2 = MA \cdot MB$, т. е. квадрат касательной МС равен произведению секущей МВ на ее внешнюю часть МА.



20. Формулы для вычисления длины окружности и площади круга:

а) длина окружности $L = 2\pi R$

б) площадь круга $S = \pi R^2$

в) длина дуги окружности $l = R\alpha$ (α -радианная мера дуги)

г) площадь сектора круга $S_{сек} = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

Задачи

А.

1. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $2(\sqrt{2}-1)$. Найти его периметр.
2. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 3 раза больше меньшего из катетов. Найти медиану, проведенную к гипотенузе, если больший катет равен $4\sqrt{2}$.
3. Периметр равностороннего треугольника численно равен его площади. Найти сторону этого треугольника.
4. Найти площадь треугольника, если две его стороны имеют длины 1 см и 2 см, а квадрат косинуса угла между ними равен $\frac{1}{4}$.
5. В треугольнике внутренние углы относятся как 2:3:5. Найти внешний угол треугольника, смежный с меньшим внутренним углом (ответ выразить в градусах).
6. Периметр прямоугольника равен 24 см. Точка О принадлежит этому прямоугольнику. Найти сумму расстояний от этой точки до всех сторон прямоугольника.
7. Диагонали параллелограмма равны 17 и 19, одна сторона равна 10. Найти другую сторону параллелограмма.
8. Во сколько раз увеличится площадь ромба, если каждую диагональ увеличить в два раза.
9. Найти площадь ромба, высота которого равна 12, а одна из диагоналей равна 15.
10. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание $\sqrt[4]{3}$, а большая боковая сторона равна $2\sqrt[4]{3}$.
11. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов равна 4320°?
12. Окружность разделена в отношении 3:8:4 и точки деления соединены между собой хордами. Найти больший угол полученного треугольника.
13. Расстояние от центра окружности до хорды равно $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ и вдвое меньше радиуса. Найти длину хорды.
14. Найти площадь круга, если известно, что длина окружности круга вдвое меньшей площади равна 6π.
15. Концы диаметра удалены от касательной на 0,6 см и на 1,6 см. Найти длину диаметра.

Б.

1. Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если длина наибольшей средней линии равна 18 см.

2. Периметр прямоугольного треугольника равен 132, а сумма квадратов его сторон равна 6050. Найти стороны треугольника.

3. В треугольнике основание равно 60, а высота и медиана, проведенные к этому основанию, соответственно равны 12 и 13. Определить боковые стороны.

4. Длины сторон треугольника равны 11, 12, 13. Найти длину медианы, проведенной к большей стороне.

5. Найти площадь и периметр треугольника, ограниченного линиями: $y=-3x$, $y-x=8$, $x=0$

6. Одна из диагоналей параллелограмма, равная $\frac{9\sqrt{6}}{2}$, составляет с основанием угол 60°. Найти длину второй диагонали, если она составляет с тем же основанием угол 45°.

7. В прямоугольный треугольник с острым углом 60° вписан ромб так, что этот угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину большего катета, если длина стороны ромба равна $\frac{\sqrt{12}}{5}$.

8. Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются под прямым углом. Найти площадь трапеции, если ее высота равна h.

9. Основания трапеции равны 10 и 35, а боковые стороны 15и 20. Определить площадь трапеции.

10. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой острого угла трапеции. Найти высоту трапеции, если ее площадь равна 9 см^2.

11. Из одной точки к окружности проведены две касательные, длина каждой равна 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найти длину радиуса окружности.

12. Две окружности касаются друг друга извне. Две их общие касательные пересекаются под углом 60°. Найти радиус большей окружности, если радиус меньшей окружности равен 13,5.

13. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиус большей окружности, если центры окружностей лежат по разные стороны от хорды, и расстояние между центрами равно $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

14. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3, а меньший катет равен 10.

15. Найти площадь сектора радиуса R, если радиус окружности, вписанной в этот сектор равен r.

В.

1. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при вершине на три равные части. Чему равен меньший угол треугольника в градусах?

2. Стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 3. Найти радиус вписанной окружности.

3. Отрезки, соединяющие середины сторон четырехугольника с серединами прилежащих сторон, равны 3 и 4, а угол между ними равен 30°. Чему равна площадь четырехугольника?

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 8 и боковой стороной 6, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка касательной, заключенной между сторонами треугольника.

5. В полукруг радиуса 8 вписан круг радиуса, равного 4; в оставшуюся часть полукруга вписана окружность, касающаяся окружности радиуса 8, круга радиуса 4 и диаметра полукруга. Найти радиус последней окружности.

Ответы:

А 1) 2; 2) 3; 3) $4\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^2; 5) 144°; 6) 12; 7) 15; 8) 4; 9) 150 ; 10) 4,5; 11) 26; 12) 96°; 13) 15; 14) 18π; 15) 2,2 см;

Б 1) 324 2) 33, 44, 55 3) $\sqrt{769}, \sqrt{1369}$ 4) 9,5 5) 8; $2\sqrt{2}+2\sqrt{10}+8$ 6) 13,5 7) 1,8 8) h^2 9) 270 10) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ см 11) 31,2 12) 40,5 13) 0,5 14) 7,25; 15) $R^2 \arcsin\frac{r}{R-r}$.

13. Стереометрия

1. Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле: $S_{бок} = P \cdot l$, где P – периметр перпендикулярного сечения призмы, l – длина бокового ребра;

2. Объем призмы находится по формулам: $V_{пр} = S_{пер.сеч} \cdot l$; $V_{пр} = S_{осн} \cdot H$, где $S_{пер.сеч}$ - площадь перпендикулярного сечения призмы, $S_{осн}$ - площадь основания призмы, H – высота призмы; l – длина бокового ребра.

3. Объем прямоугольного параллелепипеда (смежные ребра взаимно перпендикулярны) вычисляется по формуле: $V_{прям.пар.} = a \cdot b \cdot c$, где a, b, c - длины трех ребер, исходящих из одной вершины;

4. Объем куба вычисляется по формуле: $V_{куб} = a^3$, где a - длина ребра куба;

5. Объем пирамиды вычисляется по формуле: $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$,

где S – площадь основания пирамиды, а H – высоты пирамиды;

6. Объем усеченной пирамиды (часть пирамиды, заключенной между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию) вычисляется по формуле: $V_{уп.пир} = \frac{H}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$,

где H – высота усеченной пирамиды, а S_1, S_2 - площади её оснований;

7. Для усеченной пирамиды справедливо соотношение: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$,

где a_1, a_2 - длины её оснований; h_1, h_2 - расстояние от оснований усеченной пирамиды до вершины полной пирамиды;

8. Объем цилиндра: $V_{цил} = \pi R^2 H$

(R – радиус основания, H – высота цилиндра);

9. Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок.цил.} = 2\pi RH$;

10. Объем конуса: $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

11. Площадь боковой поверхности конуса: $S_{бок.кон.} = \pi RL$

(H- высота, R – радиус основания, , L – образующая конуса);

12. Объем усеченного конуса: $V_{ус.кон} = \frac{1}{3}\pi h(R^2{}_1 + R_1R_2 + R^2{}_2)$, где R_1, R_2 - радиусы оснований;

13. Площадь боковой поверхности усечённого конуса: $S_{бок.ус.кон.} = \pi(R_1 + R_2)l$

(l- образующая конуса, R_1, R_2 - радиусы оснований);

14. Объем шара: $V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара;

15°. Площадь сферы радиуса R: $S_{сф.} = 4\pi R^2$;

Задачи

А.

1. Найти площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt[4]{2}$.
2. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найти длину ребра.
3. Все ребра прямой треугольной призмы имеют одинаковую длину. Площадь полной поверхности призмы равна $4+8\sqrt{3}$. Найти площадь её основания.
4. Основанием прямой призмы служит ромб, площади диагональных сечений которого равны 6 и 8 . Найти площадь боковой поверхности призмы.
5. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 2:1, а диагональное сечение есть квадрат с площадью 25. Найти объем параллелепипеда.
6. Чему равна площадь полной поверхности правильной пирамиды, боковое ребро которой равно 5, а основанием служит квадрат со стороной 6?
7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем пирамиды.
8. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{3}$, и все плоские углы при вершине – прямые.
9. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4 и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.
10. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона её основания равна $\sqrt{3}$, и двугранный угол при основании равен 60°.
11. Площадь сечения шара равна 15. Секущая плоскость отстоит от центра шара на $\sqrt{\frac{30}{\pi}}$.

Найти площадь поверхности шара.

12. Площадь поверхности шара равна 43. Найти площадь поверхности другого шара, объем которого в 27 раз больше объема данного шара.

13. Найти отношение площадей поверхностей куба и вписанного в куб шара.

14. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой квадрат, площадь которого равна 76π. Найти площадь основания цилиндра.

15. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой полукруг радиуса $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найти объем конуса.

Б.

1. В правильной треугольной призме через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания, и в сечении получился треугольник, площадь которого равна 8. Найти сторону основания призмы.

2. В прямом параллелепипеде стороны основания 10 и 17, одна из диагоналей основания равна 21. Большая диагональ параллелепипеда равна 29. Найти объем параллелепипеда.

3. Основанием наклонной призмы служит параллелограмм со сторонами 3 и 6 и острым углом 45°. Боковое ребро призмы равно $4\sqrt{2}$ и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти объем призмы.

4. Через концы трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих одной вершины, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{1}{8}$. Длины сторон основания 5 и 3.Определить площадь полученного сечения.

5. В кубе через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания. Найти площадь сечения, если ребро куба равно $\sqrt[4]{3}$.

6. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30°. Основание пирамиды – треугольник со сторонами $\sqrt{3}$, 2 и 3. Найти объем пирамиды.

7. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 60°. Определить объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен $\sqrt[3]{3}$.

8. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник, основание которого равно 6, а высота равна 9. Каждое боковое ребро равно 13. Вычислить объем пирамиды.

9. Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют плоскостью основания углы 30° и 60°. Найти объем пирамиды, если её высоты равны 3.

10. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты, диагонали которых равны 8 и 5. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определить объем усеченной пирамиды.

11. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 60° к нему. Площадь полученного сечения равна 11. Найти площадь поверхности шара.

12. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найти диаметр основания, если площадь полной поверхности конуса равна 363π.

13. Высота конуса равна $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, а образующая равна $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$. Найти площадь поверхности вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

14. Объем шара, вписанного в конус, равен $\frac{4}{5}$, угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найти объем конуса.

15. Прямоугольный треугольник с катетами $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ вращается вокруг меньшего катета. Найти площадь полной поверхности фигуры вращения.

В.

1. В правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра равна длине стороны основания и равна $2\sqrt{6}$. Найти радиус вписанного шара.

2. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Сторона пирамиды равна a, а угол в диагональном сечении 60°. Чему равна площадь поверхности шара?

3. Радиусы двух шаров равны 15 и 20. Расстояние между их центрами равно 25. Чему равен радиус окружности, по которой пересекаются поверхности этих шаров?

4. Чему равен объем правильной треугольной пирамиды, у которой расстояние от центра основания до плоскости боковой грани и до бокового ребра соответственно равны 2 и 3.

5. Найти объем правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен R, если угол между диоганалью и плоскостью основания призмы равен α.

Ответы:

А 1) 4 2) 6 3) 2 4) 4 5) 50 6) 84 7)9 8) 4,5 9) 6 10) 1,5 11) 180 12) 387 13) $\frac{6}{\pi}$ 14) 19 15) 3

Б 1) 4 2) 3360 3) 36 4) 60 5) 2 6) 0,5 7) 8 8) 108 9) 18 10) 32,25 11) 176 12) 22 13) 2,4 14) 1,8 15) 144

В 1) 1 2) $\frac{8\pi a2}{3}$ 3) 12 4) $\frac{162\sqrt{7}}{35}$ 5) $4R^3 tg\alpha$.

Содержание

Учебное издание

Составители:

Пархимович Игорь Владимирович

Остапчук Евгений Матвеевич

Гоголинская Рената Альфонсовна

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачи и упражнения по курсу

«Элементарная математика»

для слушателей подготовительного отделения

Ответственный за выпуск: **Пархимович И.В.**

Редактор: **Строкач Т.В.**

Компьютерная верстка: **Боровикова Е.А.**

Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано к печати 10.02.2009 г. Бумага «Снегурочка». Усл. п.л. 3,26. Уч.-изд. л. 3,5.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура Arial Narrow. Тираж 100 экз. Заказ № 102.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.