МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФНП.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Методические указания и задания аттестационных работ по курсу
"Высшая математика"
для студентов строительного факультета.

Брест 2008

УДК 517.9 ББК 22.11

Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения. Методические указания и задания аттестационных работ по курсу «Высшая математика» для студентов строительных специальностей. - Брест, БГТУ.

В соответствии с действующей программой для студентов строительного факультета составлены две аттестационные работы с индивидуальными заданиями и даны образцы их решения.

Составители: И. В. Пархимович, доцент, к.ф.-м.н.,
Р. А. Гоголинская, ассистент,
Е. М. Остапчук, ассистент

Рецензент: доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Брестского государственного университета им А.С.Пушкина к.ф.-м.н., Дежурко Ю.И

2008

Вопросы учебной программы 2 -го семестра

1. Функции нескольких переменных (определение, предел, непрерывность, частные производные).
2. Полный дифференциал ФНП и его приложение в приближённых вычислениях.
3. Производная сложной функции и производные высших порядков.
4. Производная по направлению и градиент.
5. Экстремум функций нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функций нескольких переменных.
6. Метод наименьших квадратов.
7. Комплексные числа. Различные формы комплексного числа.
8. Первообразные функции. Неопределённый интеграл и его свойства.
9. Замена переменной в неопределённом интеграле.
10. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
11. Интегрирование рациональных функций.
12. Интегрирование иррациональных функций.
13. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
14. Определённый интеграл (задачи, приводящие к определённому интегралу, определение, свойства).
15. Производная определённого интеграла по верхнему пределу. Формула Барроу.
16. Формула Ньютона - Лейбница.
17. Замена переменной в определённом интеграле.
18. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.
19. Определённый интеграл для чётных, нечётных' и периодических функций.
20. Несобственные интегралы.
21. Геометрические приложения определённого интеграла (площадь, объём, длина).
22. Механические приложения определённого интеграла.
23. Основные понятия ДУ первого порядка. Задача Коши для ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения.
24. ДУ с разделяющимися переменными
25. Однородные ДУ первого порядка.
26. Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли.
27. ДУ высших порядков. Общие понятия. Задача Коши. Теорема существования и единственности.

28. Понятие краевой задачи.
29. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
30. Линейные ДУ высших порядков, свойства. Структура общего решения ЛОДУ и ЛНДУ.
31. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
32. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.
33. Метод вариации произвольных постоянных.
34. Функции комплексного переменного (определение, предел, непрерывность, дифференцирование).
35. Операционное исчисление и его применение при решении ДУ и систем ДУ.

Перечень основных задач по темам 2-го семестра

Функции многих переменных

1. Найти область определения функций

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$; б) $z = \arcsin(x + y)$; в) $z = \ln(-x + y)$; г) $z = y + \sqrt{x}$

2. Найти частные производные

а) $z = x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;   б) $z = \ln(x + \sqrt{2x + 2y})$;   в) $z = \mathrm{arctg}^2\frac{x}{y}$;

г) $z=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$; д) $z=x^{y\sin xy}$; е) $z=x^{x^y}$.

3. Вычислить приближенно

а) $1.02^{4.05}$; б) $\ln(0.09^2+0.99^2)$; в) $\sqrt[3]{1.02^2+0.05^2}$

4. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $A(1,1)$ в направлении вектора $a = 6i + 8j$

5. Найти производную неявной функции

а) $x^2+y^2+ 1n(x^2 + y^2)=a^2$; б) $\ln\mathrm{tg}\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = q$

6. Найти экстремум функции

а) $z = x^2 + xy + y^2-3x-6y$; б) $z = \frac{1}{2}xy +(47-x-y)(\frac{x}{3} + \frac{y}{4})$; в) $z=xy^2(1-x-y)$

Неопределенный интеграл

Найти неопределенный интеграл

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 2) $\int (2^x \cdot 3^x)dx$ 3) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)dx$ 4) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$

5) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$ 6) $\int \sin(3x+8)dx$ 7) $\int \frac{\ln(1-7x)dx}{7x-1}$ 8) $\int \frac{2x+5}{2x-1}dx$

9) $\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$ 10) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ 11) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$ 12) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

13) $\int \frac{xdx}{\sqrt{64-x^2}}$ 14) $\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$ 15) $\int 4^{2-3x}dx$ 16) $\int x\cdot 3^{x^2}dx$

17) $\int \frac{e^x}{e^{x-1}}dx$ 18) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ 19) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+4}dx$ 20) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

21) $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$ 22) $\int \frac{x^3}{x^8+5}dx$ 23) $\int x\sin 2x\,dx$ 24) $\int x\ln x\,dx$

25) $\int xe^{5x}dx$ 26) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ 27) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

28) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)}dx$ 29) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ 30) $\int \sin^3 x dx$ 31) $\int \cos^4 x dx$

32) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ 33) $\int tg^3 x dx$ 34) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ 35) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Определённый интеграл и его приложения

1. Вычислить а) $\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$ б) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$
2. Вычислить или установить их расходимость

а) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$; б) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; в) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$; б) $y=x^2$, $y=\frac{x^3}{3}$; в) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$

4. Вычислить длину линии $y=\ln|x|$ от $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$
5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ох фигуры, ограниченной линиями $y^2=(x-1)^3$ и $x=2$

Дифференциальные уравнения

1. Решить ДУ первого порядка

а) $(1+y^2)dx+xydy=0$; б) $(1+y^2)dx=xdy$; в) $x^2y'+y=0$;

г) $xy'-y=y^3$; д) $y'=\frac{x}{y}-1$; е) $y'=\frac{x+y}{x-y}$; ж) $yy'=2y-x$;

з) $(x-y)ydx+x^2dy=0$; и) $y'+2y=e^{-x}$; к) $xy'-y=x^2\cos x$

2. Решить ДУ второго порядка

а) $y''=x+\sin 2x$; б) $y''x\ln=y'$; в) $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$;

г) $\begin{cases} y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0 \\ y(0) = 2, \ y'(0) = 2 \end{cases}$

3. Найти общие решения

а) $y''-3y'+2y=x-1$; б) $y''-7y+12y=e^{3x}(x-1)$; в) $y''+y=7\sin x$

4. Решить систему дифференциальных уравнений

а) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -ax_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2 \end{cases}$

5. Решить задачу Коши операционным методом

$x''-4x'+3=e^{4t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=3$

Теоретические вопросы по аттестационной работе №2

«Интегралы, дифференцированные уравнения»

1. Первообразная функция. Неопределённый интеграл и его свойства.
2. Таблицы неопределённых интегралов.
3. Замена переменной в неопределённом интеграле.
4. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
5. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
8. Определённый интеграл и его свойства.
9. Производная определённого интеграла по верхнему пределу.
10. Формула Ньютона-Лейбница.
11. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
12. Несобственные интегралы.
13. Вычисление площадей плоских фигур.
14. Вычисление длины кривой.
15. Вычисление объёмов тел вращения

16. ДУ первого порядка. Задача Коши, теорема существования и единственности решения.
17. ДУ с разделяющимися переменными.
18. Однородные ДУ первого порядка.
19. Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли.
20. ДУ высших порядков. Задача Коши, теорема существования и единственности решения.
21. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
22. ДУ высших порядков. Задача Коши, теорема существования и единственности решения.
23. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
24. Линейные ДУ высших порядков. Общие свойства. Метод вариации произвольных постоянных.
25. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
26. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами.
27. Система дифференциальных уравнений. Метод исключения.

<u>Задания к аттестационной работе №2 по теме «Интегралы».</u>

Задание 1. Найти неопределённые интегралы.

1. а) $\int \frac{x^4+x^2-7\sqrt{x}}{x^3}dx$, б) $\int \frac{x^3dx}{4x^4+1}$, в) $\int \frac{dx}{(5x+2)\sqrt{\ln(5x+2)}}$, г) $\int \cos x\cos 2x dx$,
д) $\int x^3\sin x dx$, е) $\int \frac{x+5}{x^2-2x-4}dx$, ж) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-2)}$, з) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$,
и) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$, к) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

2. а) $\int \frac{x^3+5x^2-3}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int \frac{2x^2dx}{x^3+3}$, в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, г) $\int \cos x\sin 2x dx$,
д) $\int x^2\cos x dx$, е) $\int \frac{x+3}{x^2-x-6}dx$, ж) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x-1)}$, з) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$,
и) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$, к) $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$.

3. а) $\int \frac{x^5+3\sqrt{x}+4}{x^3}dx$, б) $\int \frac{x^5dx}{5x^6+1}$, в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$, г) $\int \sin 5x\cos 3x dx$,
д) $\int x\cos(x+6)dx$, е) $\int \frac{x^3-x+2}{x^2-1}dx$, ж) $\int \frac{xdx}{x^3+x}$, з) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$,
и) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$, к) $\int \sin^3 x\cos^8 x dx$.

4. а) $\int \frac{\sqrt{x}+x^3+3}{x}dx$, б) $\int \frac{\ln(x+4)dx}{x+4}$, в) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$,

г) $\int \cos 7x \sin 3x dx$,

д) $\int x\ln^2 x dx$, е) $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$, ж) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$, з) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$,

и) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$, к) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$.

5. а) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}\right)dx$, б) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}dx$, в) $\int \frac{\text{arctg}^4 8x}{1+64x^2}dx$,

г) $\int \cos 5x \cos 4x dx$,

д) $\int (x+1)e^{-x}dx$, е) $\int \frac{5x^2dx}{(x-3)(x+2)}$, ж) $\int \frac{5xdx}{(x-3)(x^2+1)}$, з) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$,

и) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$, к) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$.

6. а) $\int \frac{\sqrt{x}-2x^2+4}{x^2}dx$, б) $\int \frac{\text{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}dx$, в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$, г) $\int \sin 10x \cos 8x dx$,

д) $\int e^x x^2 dx$, е) $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$, ж) $\int \frac{x^2dx}{(x-2)(x^2+x+1)}$, з) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$,

и) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$, к) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

7. а) $\int \frac{x^5+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int \frac{(4x+3)dx}{2x^2+3x-1}$, в) $\int \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$, г) $\int (x^2+2x)\cos 8x dx$,

д) $\int x^2\cos(x+3)dx$, е) $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+8}dx$, ж) $\int \frac{x^2+3x+1}{(x^2+2)(x-2)}dx$,

з) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$, и) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$, к) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

8. а) $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+2}{x^2}dx$, б) $\int \frac{(8x+5)dx}{4x^2+5x-3}$, в) $\int \sqrt[3]{5-2x}dx$,

г) $\int (x^2+9x)\cos 9x dx$, д) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$, е) $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$, ж) $\int \frac{x^2+5}{(x^2+1)(x-1)}dx$,

з) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$, и) $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$, к) $\int \cos^3 4x \sin 4x dx$.

9. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-2x^6+2}{x^2}dx$, б) $\int \frac{20x-14}{5x^2-7x+3}dx$, в) $\int \sqrt[6]{7-8x}dx$,

г) $\int (x+6)\cos 4x dx$, д) $\int \frac{\ln^6(x+9)}{(x+9)}dx$, е) $\int \frac{8xdx}{(x^2+6x+5)(x+3)}$,

ж) $\int \frac{2xdx}{(x^2+5)(x+3)}$, з) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$, и) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$, к) $\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx$.

10. а) $\int(2\sqrt{x}-\frac{3x}{\sqrt{x}}+2)dx$, б) $\int\frac{\cos4x}{\sin^3 4x}dx$, в) $\int\frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, г) $\int x\ln^2 x dx$,

д) $\int\frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$, е) $\int\frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$, ж) $\int\frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$,

з) $\int\frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}dx$, и) $\int\frac{dx}{6-3\cos^2 x}$, к) $\int\sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 x dx$.

11. а) $\int(7^x-\frac{8}{x}+4\cos x)dx$, б) $\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$, в) $\int x\sqrt{2-x}dx$, г) $\int\frac{\ln x dx}{x^2}$,

д) $\int\frac{dx}{(x+5)\ln^6(x+5)}$, е) $\int\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx$, ж) $\int\frac{dx}{x^3-1}$, з) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$,

и) $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$, к) $\int\sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx$.

12. а) $\int(x^2-1)(\sqrt{x}+4)dx$, б) $\int\frac{dx}{(3x+2)^2}$, в) $\int\frac{3x-4}{x^2-4}dx$,

г) $\int x^2\arccos 3x dx$, д) $\int\frac{\ln^7(2x+3)}{2x+3}dx$, е) $\int\frac{5x+6}{(x-1)^2(x+2)}dx$,

ж) $\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx$, з) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$, и) $\int\frac{dx}{1-\sin x}$, к) $\int\cos5x\cos3x dx$.

13. а) $\int(\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x^4})dx$, б) $\int\frac{\sin x dx}{\cos x+1}$, в) $\int e^{\sin^2 x}\sin2x dx$,

г) $\int x^3e^x dx$, д) $\int\frac{\sqrt[5]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$, е) $\int\frac{xdx}{x^2-4x-5}$, ж) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$,

з) $\int\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3dx$, и) $\int\sin^5 x dx$, к) $\int\cos x\cos4x dx$.

14. а) $\int\frac{(x^3+2)^2}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int\frac{\cos x dx}{3+\sin x}$, в) $\int x^2\sin(x^3+1)dx$, г) $\int x2^x dx$,

д) $\int\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}dx$, е) $\int\frac{(x+3)dx}{(x-2)^2(x+2)}$, ж) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x-4)}$, з) $\int\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$,

и) $\int\frac{1-\cos x}{1+\sin x}dx$, к) $\int\sin7x\cos\frac{5}{2}x dx$.

15. а) $\int(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x})dx$, б) $\int\frac{(3x+4)dx}{1{,}5x^2+4x+1}$, в) $\int\frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$,

г) $\int e^x\sin x dx$, д) $\int\frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx$, е) $\int\frac{dx}{(x-6)(x+5)^2}$, ж) $\int\frac{dx}{(x-5)(x^2+3)}$,

з) $\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$, и) $\int\frac{dx}{4+\cos x}$, к) $\int\sin3x\cos7x dx$.

16. а) $\int\frac{4x^2+\sqrt{x}+3}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int\frac{3x-1}{x^2+9}dx$, в) $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$, г) $\int x\ln(x-1)dx$,

д) $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$, е) $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$, ж) $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$, з) $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$,

и) $\int\frac{dx}{2\sin x+\sin2x}$, к) $\int\sin6x\sin x dx$.

17. а) $\int(3^x+\frac{4}{\cos^2x}-\frac{1}{x^2})dx$, б) $\int\frac{(10x+7)dx}{5x^2+7x+4}$, в) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$,

г) $\int(3x+1)\cos2xdx$, д) $\int\frac{e^{3x}dx}{e^{3x}-1}$, е) $\int\frac{(5x+4)dx}{(x-4)(x+2)^2}$, ж) $\int\frac{xdx}{(x-3)(x^2+1)}$,

з) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$, и) $\int\cos^5x\sin^2xdx$, к) $\int\cos4x\sin8xdx$.

18. а) $\int\frac{\sqrt[5]{x}+3x+1}{x^2}dx$, б) $\int\frac{(20x+3)dx}{10x^2+3x+6}$, в) $\int e^{x^3}x^2dx$,

г) $\int(2x^2+7)\sin3xdx$, д) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$, е) $\int\frac{2xdx}{(2x+1)(x-1)}$, ж) $\int\frac{4xdx}{(x^2+3)(x-1)}$,

з) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, и) $\int\frac{5dx}{1-\sin x}$, к) $\int\sin5x\cos6xdx$.

19. а) $\int\frac{\sqrt[5]{x^2}+x^2+3x-1}{x^2}dx$, б) $\int\frac{(32x+5)dx}{16x^2+5x}$, в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$,

г) $\int(2x+3)\ln(x-2)dx$, д) $\int\frac{x-\sqrt{\mathrm{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$, е) $\int\frac{(5x+3)dx}{(x-3)(x+2)}$,

ж) $\int\frac{(5x+1)dx}{(x^2+5)(x+4)}$, з) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$, и) $\int\frac{6dx}{1+\cos x}$, к) $\int\cos3x\cos5xdx$.

20. а) $\int(5^x+\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{x^2})dx$, б) $\int\frac{(12x+5)dx}{6x^2+5x+3}$, в) $\int\frac{\arcsin x}{5\sqrt{1-x^2}}dx$, г) $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$,

д) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, е) $\int\frac{(7x+3)dx}{(2x+3)(x+4)}$, ж) $\int\frac{3xdx}{(x^2+3)(x-4)}$, з) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$, и) $\int\frac{\sin^3xdx}{\cos x-3}$,

к) $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

21. а) $\int(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4)dx$, б) $\int\frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$, в) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\mathrm{arctg}^2x}$, г) $\int\sqrt{x}\ln xdx$,

д) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$, е) $\int\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$, ж) $\int\frac{7x+10}{x^3+8}dx$, з) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$,

и) $\int\sqrt[5]{\cos4x}\sin^3xdx$, к) $\int\cos3x\sin5xdx$.

22. а) $\int\frac{\sqrt[5]{x}+3x^2+3}{x^3}dx$, б) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$, в) $\int\frac{x-3}{1-4x^2}dx$, г) $\int x^2\cos2xdx$,

д) $\int\frac{x^5}{3x^6-7}dx$, е) $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$, ж) $\int\frac{3xdx}{x^3+27}$, з) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{(2x+1)}}$,

и) $\int\sin^3x\cos^8xdx$, к) $\int\sin7x\sin xdx$.

23. а) $\int\frac{5x^2+\sqrt{x}+x}{x^3}dx$, б) $\int\frac{x-1}{5-2x^2}dx$, в) $\int e^{1-6x^2}xdx$, г) $\int x\sin^2xdx$,

д) $\int\frac{x^8dx}{3x^9+7}$, е) $\int\frac{(3x+4)dx}{(x+4)(x-2)}$, ж) $\int\frac{xdx}{(x^2+5)(x-3)}$, з) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$,

и) $\int\sin^5x\cos^4xdx$, к) $\int\cos10x\sin2xdx$.

24. а) $\int \frac{x^4+\sqrt[5]{x^2}-3x}{x^2}dx$, б) $\int \frac{6(x+\frac{1}{3})dx}{3x^2+2x+1}$, в) $\int e^{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}dx$,

г) $\int (x^3+3)\sin x dx$, д) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$, е) $\int \frac{(5x+6)dx}{(2x+1)(x-1)}$, ж) $\int \frac{(x^2+3)dx}{x^3+8}$,

з) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$, и) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$, к) $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$.

25. а) $\int \frac{x^7+\sqrt[3]{x^2}+4x}{x^3}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{ctg^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$, в) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx$,

г) $\int \ln(x+4)dx$, д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$, е) $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$, ж) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$, з) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$,

и) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\sin x\cos x}$, к) $\int \sin 12x\cos 2x dx$.

26. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+3x^2+4x}{x^2}dx$, б) $\int \frac{2x-4}{x^2+16}dx$, в) $\int \frac{x^4 dx}{e^{x^5}+1}$, г) $\int x ctg^2 x dx$,

д) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}$, е) $\int \frac{(2x^2+1)dx}{(x+6)(x-2)^2}$, ж) $\int \frac{(3x^2+1)dx}{(x^2+1)(x-3)}$, з) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$,

и) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3}$, к) $\int \cos 8x\sin 2x dx$.

27. а) $\int (\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x})dx$, б) $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$, в) $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx$, г) $\int x\sin^2 x dx$,

д) $\int \frac{dx}{5+\sqrt{x-6}}$, е) $\int \frac{(5x+3)dx}{(x-1)^2(x+2)}$, ж) $\int \frac{xdx}{(x-2)(x^2+2)}$, з) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$,

и) $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$, к) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 x dx$.

28. а) $\int \frac{6x^2+\sqrt{x^5}+6}{x^2}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$, в) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3(2-x)}}{2-x}dx$, г) $\int x\,arctgx dx$,

д) $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}$, е) $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2}dx$, ж) $\int \frac{(10x+1)dx}{(2x+3)(x^2+1)}$, з) $\int \frac{dx}{5+\sqrt{x+1}}$,

и) $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$, к) $\int \sin^5 x\cos^4 x dx$.

29. а) $\int \frac{x^2 5^x+\sqrt[7]{x^2}+3}{x^2}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3+2x}}$, в) $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}dx}$, г) $\int (x^2+x)e^x dx$,

д) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$, е) $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$, ж) $\int \frac{(2x+4)dx}{(2x^2+4)(x-1)}$, з) $\int \frac{dx}{4+\sqrt{x-3}}$,

и) $\int \sin^4 2x\cos^2 2x dx$, к) $\int \sin 3x\cos 5x dx$.

30. а) $\int \frac{x^6+5x\sqrt{x}-3}{x^2}dx$, б) $\int \frac{dx}{2\sqrt[5]{3-x}}$, в) $\int \frac{\cos x dx}{2-\sin x}$, г) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

д) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$, е) $\int \frac{5dx}{(x-3)^2(x+2)}$, ж) $\int \frac{4xdx}{(x-1)^2(x^2+1)}$, з) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$,

и) $\int \sin^5 x\sqrt[5]{\cos^3 x}dx$, к) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$.

Задание № 2 Вычислить определённые интегралы.

1. а) $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, б) $\int_1^2 x\ln(x+1)dx$.

2. а) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$, б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

3. а) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$, б) $\int_0^{0,2} xe^{5x}dx$.

4. а) $\int_1^{16}\frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$, б) $\int_0^2\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

5. а) $\int_1^3\frac{dx}{x^2+x}$, б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

6. а) $\int_1^3\frac{dx}{x^3+x}$, б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 2x dx$.

7. а) $\int_3^5\frac{x^2+5}{x-2}dx$, б) $\int_1^5\frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

8. а) $\int_1^3\frac{dx}{x^2+6x+10}$, б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

9. а) $\int_2^3\frac{x^2+1}{x^3-x}dx$, б) $\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

10. а) $\int_1^e\frac{\sin\ln x}{x}dx$, б) $\int_0^{\pi} x^3\sin x dx$.

11. а) $\int_0^1\frac{4\mathrm{arctg}x-x}{1+x^2}dx$, б) $\int_1^2 x\ln x dx$.

12. а) $\int_{-1}^{0}\frac{3^x-2^x}{6^x}dx$, б) $\int_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$

13. а) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$, б) $\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx$

14. а) $\int_0^2\frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$, б) $\int_1^2\ln(3x+2)dx$

15. а) $\int_2^3\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$, б) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}x dx$

16. а) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, б) $\int_2^3\frac{dx}{x^2(x-1)}$

17. а) $\int_{-1}^{1}\frac{y^5dy}{y+2}$, б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}$

18. а) $\int_0^1\frac{xdx}{x^2+3x+2}$, б) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

19. а) $\int_4^5\frac{dx}{x^2(x-1)}$, б) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

20. а) $\int_1^2\frac{dx}{x^3+1}$, б) $\int_0^3\frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}}$

21. а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$, б) $\int_6^8\frac{dx}{x^2+2x}$

22. а) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$,   б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}$

23. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$,   б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x+1}$

24. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$,   б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

25. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$, б) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$

26. а) $\int_3^8 \sqrt{x+1}\, dx$,   б) $\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}}\, dx$

27. а) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$,   б) $\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x} dx$

28. а) $\int_8^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$,   б) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x\, dx$

29. а) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx$

30. а) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$,   б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$

Задание 3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. а) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$,   б) $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

2. а) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$,   б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

3. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$,   б) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

4. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$,   б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx$

5. а) $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$,   б) $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

6. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$,   б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

7. а) $\int_0^{+\infty} 2x \sin x dx$,   б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

8. а) $\int_{-\infty}^{0} x e^x dx$,   б) $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}$

9. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$,   б) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$

10. а) $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{\ln(2-3x)}}{2-3x}\, dx$, б) $\int_0^{+\infty} e^{-3x} x dx$

11. а) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^2}$, б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx$

12. а) $\int_{-\frac{3}{4}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$, б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$

13. а) $\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$, б) $\int_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

14. а) $\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\pi(1+4x^2)}\,dx$, б) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}$

15. а) $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, б) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(2x-1)^2}$

16. а) $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$, б) $\int_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

17. а) $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$, б) $\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

18. а) $\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$, б) $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1-x^4}$

19. а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2x)\ln^3 x}$, б) $\int_{1}^{2}\frac{2dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

20. а) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$, б) $\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$

21. а) $\int_{2}^{5}\frac{dx}{(x-2)^2}$, б) $\int_{1}^{+\infty}\frac{2+3\cos x}{x^4}\,dx$

22. а) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$, б) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}$

23. а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{6x^2-5x+1}$, б) $\int_{-1}^{2,5}\frac{dx}{x^2-5x+6}$

24. а) $\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$, б) $\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$

25. а) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2-4x}$, б) $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$

26. а) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1}$, б) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(2x-1)^2}$

27. а) $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$, б) $\int_{0}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^5}}\,dx$

28. а) $\int_{0}^{\infty}e^{-2x}x dx$, б) $\int_{-\frac{1}{\ln 2}}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$

29. а) $\int_{-\infty}^{-3}\frac{xdx}{(x^2+1)^3}$, б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^4}}$

30. а) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$, б) $\int_{0}^{1}\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1. а) $y = 8 - x^2, y = 3x + 7$, б) $\rho = 2 + \cos\varphi$
2. а) $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{7}{4}\pi$, б) $\rho = 5\cos\varphi$
3. а) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 0, x = 3$, б) $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$
4. а) $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$, б) $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$
5. а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6, y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, б) $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$
6. а) $y = -x^3, y = -9x$, б) $\rho = 2\sin 5\varphi$
7. а) $y = x^2, y = 2x, y = x$, б) $\rho = \cos 2\varphi$
8. а) $y = x^3 - 3x$, $y = x$, б) $\rho = 1 - \cos\varphi$
9. а) $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1$, б) $\rho = 3\cos\varphi$
10. а) $y = 2 - |x|$, $y = x^2$, б) $\rho = 3\sin 4\varphi$
11. а) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$, б) $\rho = 4\cos 3\varphi$
12. а) $4y = x^2, y^2 = 4x$, б) $\rho = 3\cos 2\varphi$
13. а) $y^2 = 1 - x$, $x = -3$, б) $\rho = 2\cos^3\frac{\varphi}{3}$
14. а) $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$, б) $\rho = 3\sin\varphi$
15. а) $y = 2x - x^2$, $y = -x$, б) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$
16. а) $y = 3 - 2x$, $y = x^2$, б) $\rho = 5\sin\varphi$
17. а) $y = e^x$, $y = e^{-x}, x = 1$, б) $\rho = 4\cos\varphi$
18. а) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$, б) $\rho = 1$, $\rho = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$
19. а) $y^2 = 9x$, $x^2 = 9y$, б) $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$
20. а) $y = x^2$, $y = 7x - 10$, б) $\rho = 4\sin^2\varphi$
21. а) $x^2 + y^2 = 9$, $y = 3 - x$, б) $\rho = 3\sin 4\varphi$
22. а) $y = x^2 - 9$, $y = -7 - x$, б) $\rho = 2\sin 3\varphi$
23. а) $x = y^2$, $y = \frac{1}{3}(4 - x)$, б) $\rho = 2\sin\varphi$, $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$
24. а) $y^2 = x + 5$, $y^2 = -x + 4$, б) $\rho = 2\cos 2\varphi$
25. а) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$, б) $\rho^2 = \cos 2\varphi$
26. а) $y = 2^x$, $y = 2x - x^2, x = 0, x = 2$, б) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, полярная ось
27. а) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, б) $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$
28. а) $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$, б) $\rho = 3 + \cos\varphi$
29. а) $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$, б) $\rho = \sin^2\varphi$
30. а) $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$, б) $\rho = \sin 4\varphi$

Задание 5. Вычислить длину дуги данной линии.

1. $y=-x^2+2x$ от вершины до точки с абсциссой $x=2$
2. $y^2=\frac{x^3}{6}$ до точки с абсциссой $x=6$
3. $\begin{cases} x = t - sint, \\ y = 1 - cost \end{cases}$ (одной арки)
4. $\begin{cases} x = acost, \\ y = asint \end{cases}$
5. $\rho = \sqrt{2} sin\varphi$
6. $\rho = \frac{1}{\varphi}$ от $\varphi = \frac{3}{4}$ до $\varphi = \frac{4}{3}$
7. $y^2=x^5$, отсечённой прямой $x=5$
8. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{1}{3}}$
9. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ (петля)
10. $\begin{cases} x = cos^3 t, \\ y = sin^3 t \end{cases}$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$
11. $\rho = cos\varphi$
12. $\rho = 3(1 - cos\varphi)$
13. $y=\ln(1-x^2)$ от $x_1=0$ до $x_2=\frac{1}{2}$
14. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ от $y_1=1$ до $y_2=e$
15. $\begin{cases} x = e^t cost, \\ y = e^t sint \end{cases}$ от $t=0$ до $t=1$
16. $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1=0$ до $x_2=12$
17. $y=\ln x$ от $x_1=\frac{3}{4}$ до $x_2=2,4$
18. $\rho = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $\rho = 10\pi$
19. $\rho = 6(1 + sin\varphi)$, $\varphi \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$
20. $\begin{cases} x = 3sint + 4cost, \\ y = 4sint - 3cost \end{cases}$
21. $\begin{cases} x = 2cost - cos2t, \\ y = 2sint - sin2t \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
22. $2y=e^x+e^{-x}$ от $x=0$ до $x=\ln 3$
23. $y=\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}lnx$, $x \in [1; e]$

24. $\begin{cases} x = 3(t - sint), \\ y = 3(1 - cost) \end{cases}$ x $\in$ $[\pi; 2\pi]$

25. $\rho = 2e^{\varphi}$, находящейся внутри круга радиуса $\rho = 2$

26. $y^2=(x-1)^3$ от точки A(1;0) до B(6;$\sqrt{125}$)

27. $y^2=9-x$, y=-3, y=0

28. y=$\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$, отсеченной осью 0x

29. Найти длину замкнутой кривой $9y^2-x(x-3)^2=0$

30. $\rho = 4cos\varphi$

Задание 6. Вычислить объём тела, полученного вращением фигуры вокруг указанной оси координат.

1. xy=4, x=1, x=2, y=0, ox.
2. y=x^3, x=2, y=0, oy.
3. y=sinx, x$\epsilon[0;\pi]$, y=0, ox.
4. y=4x-x^2, y=x, ox.
5. $\begin{cases} x = cos^3t, \\ y = sin^3t, \end{cases}$ вокруг оси ox.
6. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{1}{3}t^3, \end{cases}$ (петля) вокруг оси ox.
7. y=e^x, x=0, y=0, x=1, ox.
8. $\begin{cases} x = 6(t - sint), \\ y = 6(1 - cost), \end{cases}$ ox.
9. ρ=2(1+cosφ), полярная ось.
10. y=$\frac{2}{1+x^2}$, y=0, x=0, x=1, ox.
11. $y^2=(x+1)^3$, x=0, oy.
12. $y^2=16-x$, x=0, oy.
13. y=$\sqrt{x}e^x$, x=0, x=ln2, ox.
14. y=2sinx, x$\epsilon[0;\pi]$, ox.
15. $y^2=6x$, y=$\sqrt{6}x^2$, ox.
16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ oy.$
17. $x^2+y^2=1$, вокруг прямой x=2.
18. $y^2=6x$, x=3, x=5, ox.
19. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$=1, x=0, y=0, oy.
20. $xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0,\ 0x.$

21. $y=x^2$, 4x-y=0, 0y
22. y^2=4ax, x=a, 0y
23. $\begin{cases} y = 2sint, \\ x = \sqrt{3}cost, \end{cases}$ 0y
24. $2y = x^2$, 2x+2y-3=0, 0x
25. $y=x-x^2$, y=0, 0x
26. $y=2x-x^2$,y=o, 0x
27. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1}=1$, 0x
28. $x^3=(y-1)^2$, x=0, y=0, 0x
29. $y=x^2$, $8x=y^2$, 0y
30. $y^3=x^2$, y=1, 0x

Задание 7. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной данбными линиями

1. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$
2. y=sinx, $x \in [0;\pi]$
3. $y=\sqrt{R^2-x^2}$, осью 0x
4. ρ =a(1+cosφ)
5. $\rho^2 = a^2cos2\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$
6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x \geq 0,\ y \geq 0$
7. $\begin{cases} x = acos^3t, \\ y = asin^3t \end{cases}$ $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
9. $\rho = a(1 + cos\varphi)$
10. $y = 3x - x^2$, y=0
11. $x + y - 2 = 0,\ x = 0,\ y = 0$
12. $y=x^2-4$, y=2
13. $y^2=x$, x=2
14. $y^2=x-1$, x=4
15. $y^2=x+2$, x=3

Найти координаты центра масс однородной плоской кривой

16. $x^2+y^2=R^2$,расположенной под осью 0x
17. x=a(t-sint), y= a (1-cost), $t \in [0; 2\pi]$

18. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ в третьем квадранте
19. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0;\pi]$
20. $r=2(1+\cos\varphi)$
21. $r=2\sin\varphi$ от $(0;0)$ до $(\sqrt{2};\frac{\pi}{4})$
22. $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$, $t \in [0;1]$
23. $r=2\sqrt{3}\cos\varphi$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{4}$
24. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $t \in [0;\pi]$
25. $x=2\cos^3\frac{t}{4}$, $y=2\sin^3\frac{t}{4}$, $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$
26. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$
27. $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $t \in [0;\pi]$
28. $r=ae^{\varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$
29. $r=a\,ch(x-a)$, $x \in [-a;a]$
30. Дуга окружности радиусом R, стягивающая центральный угол α

Задание 8

Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара. Удельный вес воды $9{,}81\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$, $\pi \approx 3{,}14$ (точность вычисления $\varepsilon = 0{,}01$).

1. Правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 2 м и высотой 5 м.
2. Правильная четырёхугольная пирамида, обращённая вершиной вниз. Сторона основания пирамиды равна 2 м, высота – 6 м.
3. Полуцилиндр, радиус основания которого 1 м, длина 5 м.
4. Усечённый конус, у которого радиус верхнего основания равен 1 м, нижнего - 2м и высота – 3 м.
5. Цилиндрическая цистерна, радиус основания которой 1 м, длина 5 м.
6. Конус, обращённый вершиной вниз, радиус основания которого 3 м, высота 5 м.
7. Усечённый конус, у которого радиус верхнего основания равен 3 м, нижнего – 1 м , высота – 3 м.
8. Конус с радиусом основания 2 м и высотой 5 м.
9. Цилиндр с радиусом основания 1 м и высотой 3 м.
10. Жёлоб, в перпендикулярном сечении которого лежит полуокружность радиусом 1 м, длина жёлоба 10 м.

11. Полусфера радиусом 2 м.
12. Параболоид вращения, радиус основания которого 2 м, глубина 4 м.
13. Правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м.
14. Правильная шестиугольная пирамида с вершиной, обращённой вниз, сторона основания которой 2 м, высота 6 м.
15. Конус, радиус основания которого 2 м, высота 3 м.
16. Усечённый конус, радиус верхнего основания которого равен 1 м, нижнего – 2 м, высота - 2 м.
17. Правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м.
18. Правильная шестиугольная пирамида с вершиной, обращённой вниз, сторона основания которой 2 м, высота 6 м.
19. Правильная усечённая шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 1 м, нижнего 2 м, высота – 2 м.
20. Половина эллипсоида вращения, радиус основания которого 1 м, глубина 2 м.
21. Усечённая четырёхугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 2 м, нижнего – 4 м, высота – 1 м.
22. Правильная усечённая шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 2 м, нижнего – 1 м, высота – 2 м.
23. Правильная четырёхугольная усечённая пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 8 м, нижнего –4 м, высота – 2 м.
24. Желоб, перпендикулярное сечение которого является параболой.
    Длина желоба 6 м, ширина 3м, глубина 2 м.
25. Правильная треугольная пирамида с основанием 2 м и высотой 5 м.
26. Правильная треугольная пирамида, обращённая вершиной вниз, сторона основания которой 6 м, высота 8 м.
27. Правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 6 м и высотой 2 м.
28. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2 м и высотой 4 м.
29. Правильная шестиугольная усечённая пирамида, сторона верхнего основания которой равна 1 м, нижнего – 2 м, высота – 2 м.
30. Правильная треугольная пирамида со стороной основания 3 м и высотой 6 м.

Решение типового варианта аттестационной работы № 2 по теме "Интегралы".

Задание 1. Найти неопределённый интеграл

а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-4x^{11}+4}{x^4}dx=\int \frac{x^{\frac{5}{6}}-4x^{11}+4}{x^4}dx = \int \left(x^{-\frac{19}{6}} - 4x^7 + 4x^{-4}\right)dx =$

$$= \frac{x^{-\frac{13}{6}}}{-\frac{13}{6}} - 4\frac{x^8}{8} + 4\frac{x^{-3}}{-3} + +C = -\frac{6}{13}x^{-\frac{13}{6}} - \frac{1}{2}x^8 - \frac{4}{3}x^{-3} + C.$$

б) $\int \frac{x^5dx}{6x^6+4} = \frac{1}{6}\int \frac{x^5dx}{x^6+\frac{2}{3}} = \frac{1}{6^2}\int \frac{d(x^6+\frac{2}{3})}{x^6+\frac{2}{3}} = \frac{1}{36}ln\left|x^6+\frac{2}{3}\right| + C$

в) $\int \frac{dx}{(6x+6)\sqrt[6]{ln^5(6x+6)}} = \frac{1}{6}\int ln^{-\frac{5}{6}}(6x+6)d(ln(6x+6)) = \frac{1}{6}\frac{ln^{\frac{1}{6}}(6x+6)}{\frac{1}{6}} + C =$

$= \sqrt[6]{ln\,(6x+6)} + C$

г) $\int sin^5 6xcos6xdx = \frac{1}{6}\int sin^5 6xd(sin6x) = \frac{1}{6}\frac{sin^6 6x}{6} + C = \frac{1}{36}sin^6 6x + C$

Применение формулы интегрирования по частям:

$$\int Ud\vartheta = U\vartheta - \int \vartheta dU$$

д) $\int(x^2+6x+5)cos6xdx = \begin{vmatrix} U=x^2+6x+5, & dU=(2x+6)dx \\ d\vartheta=cos6xdx, & \vartheta=\frac{1}{6}sin6x \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(x^2+6x+$

$+5)sin6x - \frac{1}{6}\int(2x+6)sin6xdx = \begin{vmatrix} U=2x+6, & dU=2dx \\ d\vartheta=sin6xdx, & \vartheta=-\frac{1}{6}cos6x \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(x^2+6x+$

$+5)sin6x - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6}(2x+6)cos6x + \frac{1}{3}\int cos6xdx\right) = \frac{1}{6}(x^2+6x+$

$+5)sin6x + \frac{1}{36}(2x+6)cos6x - \frac{1}{108}sin6x + C$

е) $\int \frac{6x+5}{6x^2+5x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{12x+10}{6x^2+5x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(12x+5)+5}{6x^2+5x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(6x^2+5x+4)}{6x^2+5x+4} +$

$+\frac{5}{2}\int \frac{dx}{6\left(x^2+\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2}ln|6x^2+5x+4| + \frac{5}{12}\int \frac{d(x+\frac{5}{12})}{(x+\frac{5}{12})^2+\frac{71}{144}} =$

$$= \frac{1}{2}ln|6x^2+5x+4| + \frac{5}{12}\frac{12}{\sqrt{71}}arctg\frac{x+\frac{5}{12}}{\frac{\sqrt{71}}{12}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}ln|6x^2+5x+4| + \frac{5}{\sqrt{71}}arctg\frac{12x+5}{\sqrt{71}} + C$$

ж) $I=\int\frac{(x^4+6x^3+5x^2+4x+3)}{(x^2+9)(x-3)^2}dx=\int\frac{x^4+6x^3+5x^2+4x+3}{x^4-6x^3+18x^2-54x+81}dx=$

$$=\int\left(1++\frac{12x^3-13x^2+58x-78}{(x^2+9)(x-3)^2}\right)dx;$$

$\frac{12x^3-13x^2+58x-78}{(x^2+9)(x-3)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+9}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2};$

$12x^3-13x^2+58x-78=(Ax+b)(x-3)^2+C(x-3)(x^2+9)+$
$+D(x^2+9),\quad x=3$

$12\cdot 27-13\cdot 9+58\cdot 3-78=180;\quad 303=18D;\ \ D=\frac{101}{6}$

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 12=A+C, \\ x^2 & -13=-6A+B-3C+D, \\ x & 58=9A-6B+9C; \end{array}\quad \begin{cases} A+C=12, \\ -6A+B-3C=-\frac{179}{6}, \\ 9A-6B+9C=58; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=12-A, \\ -6A+B-3(12-A)=-\frac{179}{6}, \\ 9A-6B+9(12-A)=58; \end{cases}\quad \begin{cases} C=12-A \\ -6A+B-36+3A=-\frac{179}{6}, \\ 9A-6B+108-9A=58; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=12-A, \\ -3A+B=\frac{37}{6}, \\ -6B=-50; \end{cases}\quad \begin{cases} B=\frac{25}{3}, \\ A=\frac{13}{18}, \\ C=\frac{203}{18}; \end{cases}$$

$I=\int(1+\frac{\frac{13}{18}x+\frac{25}{3}}{x^2+9}+\frac{\frac{203}{18}}{x-3}+\frac{\frac{101}{6}}{(x-3)^2})dx=x+\int\frac{\frac{13}{18}x+\frac{25}{3}}{x^2+9}dx+\frac{203}{18}\int\frac{dx}{x-3}+$
$+\frac{101}{6}\int\frac{dx}{(x-3)^2}=x+\frac{1}{18}\int\frac{13x+150}{x^2+9}dx+\frac{203}{18}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{101}{6}\int\frac{dx}{(x-3)^2}=x+$
$+\frac{13}{18\cdot 2}\int\frac{d(x^2+9)}{(x^2+9)}+\frac{150}{18}\int\frac{dx}{x^2+9}+\frac{203}{18}\int\frac{dx}{x-3}++\frac{101}{6}\int\frac{dx}{(x-3)^2}=x+\frac{13}{36}ln(x^2+$
$+9)+\frac{25}{9}arctg\frac{x}{3}+\frac{203}{18}ln|x-3|-\frac{101}{6(x-3)}+c.$

з) $\int\frac{\sqrt{6x+6}+\sqrt[3]{6x+6}}{\sqrt{6x+6}}dx=\left|\begin{array}{c} t^6=6x+6,\ \sqrt{6x+6}=t^3 \\ \sqrt[3]{6x+6}=t^2,\ 6dx=6t^5dt \\ dx=t^5dt \end{array}\right|=\int\frac{t^3+t^2}{t^3}t^5dt=$

$=\int(t^5+t^4)dt=\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+C=$

$$= \frac{6x+6}{6} + \frac{\sqrt[6]{(6x+6)^5}}{5} + C = x + 1 + \frac{\sqrt[6]{(6x+6)^5}}{5} + C.$$

и) $\int \frac{dx}{6+3\sin x+4\cos x} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{6+\frac{6t}{1+t^2}+\frac{4-4t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{6+6t^2+6t+4-4t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2+6t+10} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+3t+5} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \frac{2}{\sqrt{11}} arctg\frac{t+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{11}} arctg\frac{2t+3}{\sqrt{11}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} arctg\left(\frac{2\,tg\frac{x}{2}+3}{\sqrt{11}}\right) + C.$$

к) $\int \cos^8 6x \sin^7 6x dx = \int \cos^8 6x \sin^6 6 \sin 6x dx = -\frac{1}{6}\int (\cos^8 6x -$
$-3\cos^{10}6x+3\cos^{12}6x-\cos^{14}6x)d(\cos 6x) = -\frac{1}{6}\frac{\cos^9 6x}{9} + \frac{3\cos^{11}6x}{6\cdot 11} -$
$-\frac{3}{6}\frac{\cos^{13}6x}{13} + \frac{1}{6}\frac{\cos^{15}6x}{15} + C = -\frac{1}{54}\cos^9 6x + \frac{1}{22}\cos^{11}6x - \frac{1}{26}\cos^{13}6x +$
$+\frac{1}{90}\cos^{15}6x + C.$

Задание 2. Вычислить определённые интегралы.

а) $\int_7^{10} \frac{x^2dx}{(x-6)\sqrt{x-6}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-6}=t, \; t^2=x-6, \; x=t^2+6 \\ dx = 2tdt, \\ \text{если } x=7, \text{то } t=1 \\ \text{если } x=10, \text{то } t=2 \end{matrix} \right| = \int_1^2 \frac{(t^2+6)^2}{t^3} 2tdt =$

$$= 2\int_1^2 \left(t^2+12+\frac{36}{t^2}\right)dt = 2\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + 24t\Big|_1^2 - \frac{72}{t}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) + 24 -$$

$$-72\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{194}{3}.$$

Применение формулы интегрирования по частям $\int_a^b UdV =$
$= UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.$

б)$\int_6^7 (x+6)e^{-12x}dx = \left| \begin{matrix} U = x+6,\ dU = dx \\ dV = e^{-12x}dx,\ V = -\frac{1}{12}e^{-12x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{12}(x+$
$+6)e^{-12x}\Big|_6^7 + \frac{1}{12}\int_6^7 e^{-12x}dx = -\frac{1}{12}\cdot 13e^{-84} + \frac{1}{12}\cdot 12e^{-72} - \frac{1}{144e^{12x}}\Big|_6^7 =$
$= -\frac{13}{12}e^{-84} + e^{-72} - \frac{1}{144}e^{-84} + \frac{1}{144}e^{-72} = -\frac{157}{144}e^{-84} + \frac{145}{144}e^{-72}.$

Задание 3. Вычислить несобственные интегралы или установить их рас ходимость

а) $\int_0^\infty \frac{xdx}{6x^2+6x+7} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{xdx}{6x^2+6x+7}$;

$$\int_0^a \frac{xdx}{6x^2+6x+7} = \frac{1}{12}\int_0^a \frac{(12x+6)-6}{6x^2+6x+7}dx =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|6x^2+6x+7|\Big|_0^a - \frac{1}{2\cdot 6}\int_0^a \frac{dx}{x^2+x+\frac{7}{6}} =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|6a^2+6a+7| - \frac{1}{12}\ln 7 - \frac{1}{12}\int_0^a \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}} =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|6a^2+6a+7| - \frac{1}{12}\ln 7 - \frac{1\cdot\sqrt{12}}{12\cdot\sqrt{11}} arctg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}\Bigg|_0^a =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|6a^2+6a+7| - \frac{1}{12}\ln 7 - \frac{1}{\sqrt{132}} arctg \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\Bigg|_0^a =$$
$$= \frac{1}{12}\ln|6a^2+6a+7| - \frac{1}{12}\ln 7 - \frac{1}{\sqrt{132}} arctg \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{11}} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{132}} arctg \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{12}\ln|6a^2+6a+7| - \frac{1}{12}\ln 7 - \frac{1}{\sqrt{132}} arctg \frac{(2a+1)\sqrt{3}}{\sqrt{11}} +\right.$
$\left.+ \frac{1}{\sqrt{132}} arctg \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right) = \infty$ (интеграл расходится).

б) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \begin{matrix} \text{Подинтегральная функция} \\ \text{имеет бесконечный разрыв} \\ \text{при } x = 1 \end{matrix} \right| =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{d\ln x}{\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\ln^{-3}x\,d(\ln x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{\ln^{-2}x}{-2}\right|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 e}+\frac{1}{2\ln^2(1+\varepsilon)}\right) = -\frac{1}{2}+\infty = +\infty,$$

т. е. исходный интеграл расходится.

в) Исследовать интеграл на сходимость

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^2}$$

Решение. Имеем: $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $\frac{\sin x}{x^2} \le \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$

Так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{-2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(\left.\frac{1}{-x}\right|_0^a\right) = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$,

то $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, а тогда, согласно признаку сравнения, сходится и интеграл $\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|dx}{x^2}$. Следовательно интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\sin x dx}{x^2}$ сходится.

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y = x^2+7x+3,\ y = 3x$

Решение. Построим графики этих функций.

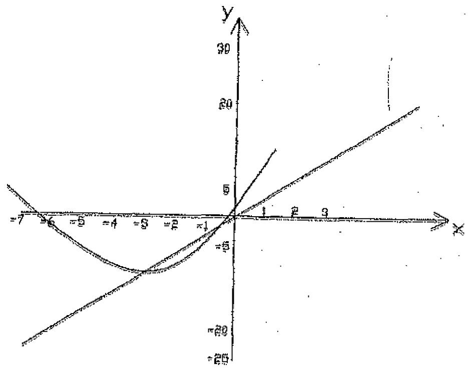
Имеем: $y = x^2 + 2\cdot\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+3 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{37}{4}$.

Тогда точка $\left(-\frac{7}{2};-\frac{37}{4}\right)$ - вершина параболы.

Точки пересечения параболы с осью ОХ определяются системой:

$$\begin{cases} y = 0,\\ y = x^2+7x+3, \end{cases}\quad \text{откуда}\quad x^2+7x+3=0,\quad \left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{-7-\sqrt{37}}{2}\approx -6{,}5\\ x_2 &= \frac{-7+\sqrt{37}}{2}\approx -0{,}46 \end{aligned}\right.$$

Строим графики функций $y = x^2+7x+3,\ y = 3x$



Система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 7x + 3, \\ y = 3x, \end{cases}$ определяет точки пересечения параболы и прямой:

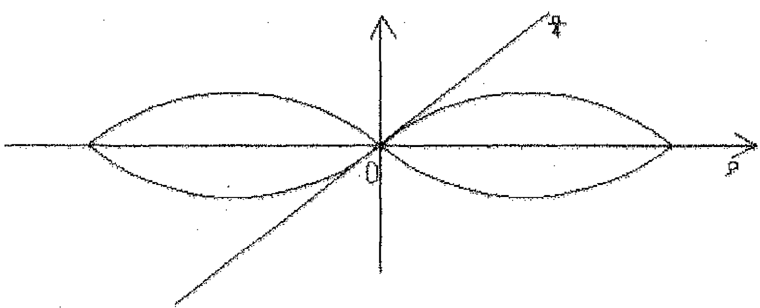
$$x^2 + 7x + 3 = 3x, \quad x^2 + 4x + 3 = 0, \qquad x_1 = -3, \quad x_2 = -1$$

Тогда

$$S = \int_{-3}^{-1}\left(3x - (x^2 + 7x + 3)\right)dx = \int_{-3}^{-1}(-x^2 + 4x + 3)dx = (-\frac{x^3}{3} - $$
$$-2x^2 - 3x)\Big|_{-3}^{-1} = \frac{4}{3} \quad \text{(кв.ед.)}$$

б) $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$

Решение. Эта линия носит название лемниската Бернулли. Изобразим линию в полярной системе координат



$$0 \le \cos 2\varphi \le 1$$
$$0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

Используя формулу:

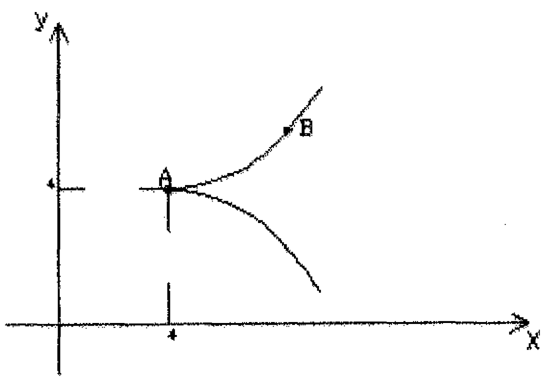
$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\varphi$, получим $\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 36\cos 2\varphi d\varphi = 18 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 9$

$\frac{1}{4}S = 9,\ S = 36$ (кв. ед.)

Задание 5. Вычислить длину дуги данной линии

а) $(y-4)^2 = (x-4)^3$ - кубическая парабола, от точки A(4;4) до точки B$(6; 4 + 2\sqrt{2})$

Решение. Строим график:



Находим y': $2(y-4)y' = 3(x-4)^2$, $y' = \frac{3(x-4)^2}{2(y-4)}$ и так как $y - 4 =$
$= (x-3)^{\frac{3}{2}}$, то $y' = \frac{3}{2}(x-4)^{\frac{1}{2}}$ и $1 + y'^2 = 1 + \frac{9}{4}(x-4)$.

Поэтому

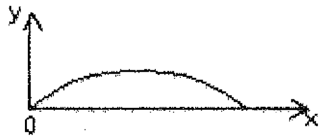
$$l = \int_4^6 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-4)}\ dx = \int_4^6 \sqrt{\frac{9}{4}x - 8}\ dx = \frac{1}{2}\int_4^6 \sqrt{9x-32}\ dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_4^6 (9x-32)^{\frac{1}{2}}\, d(9x-32) = \frac{1}{18}\frac{(9x-32)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^6 = \frac{1}{18}\cdot$$

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{(54-32)^3} - \sqrt{(36-32)^3}\right) = \frac{1}{27}\left(22\sqrt{22} - 8\right).$$

б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t); \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Решение. Эта линия называется циклоидой. График её, соответствующий одному витку $0 \le t \le 2\pi$, имеет вид:



Имеем: $x' = 6(1 - \cos t), \quad y' = 6\sin t$. Тогда по формуле $l =$

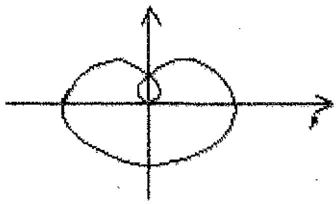
$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$ получим:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{36(1-\cos t)^2 + 36\sin^2 t}\, dt = 6\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 12\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -24\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -24(-1-1) = 48$$

в) $\rho = 6\sin^3\frac{\varphi}{3}$

Решение. Вся кривая изображается при $\varphi \in [0; 3\pi]$:



Находим ρ': $\rho' = 6\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = 6\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$.

Используя формулу

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi, \text{ получим } l = \int_0^{3\pi} \sqrt{36 sin^6 \frac{\varphi}{3} + 36 sin^4 \frac{\varphi}{3} cos \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{3\pi} sin^2 \frac{\varphi}{3} = 6\int_0^{3\pi} \frac{1 - cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\, d\varphi = 3\varphi \Big|_0^{3\pi} - 3 \cdot \frac{3}{2} sin \frac{2\varphi}{3} \Big|_0^{3\pi} = 9\pi.$$

Задание 6. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг указанной оси.

а) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ – эллипс, ось OX.

Решение. По формуле $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$, вследствие того, что

$\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{36}$ и $y^2 = 16\left(1 - \frac{x^2}{36}\right)$, $\quad -6 \le x \le 6$, получим:

$$V_x = \pi \int_{-6}^{6} 16(1 - \frac{x^2}{36})dx =$$

$$= 16\pi(x - \frac{x^3}{3 \cdot 36})\Big|_{-6}^{6} = 16\pi(6 - \frac{36 \cdot 6}{3 \cdot 36} - (-6 + \frac{36 \cdot 6}{3 \cdot 36})) =$$
$$= 16\pi(6 - 2 + 6 - 2) = 128\pi.$$

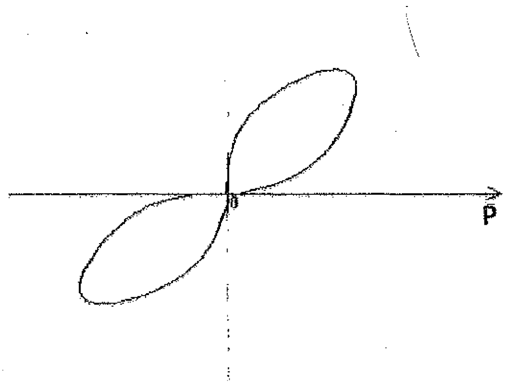
б) $\begin{cases} x = 6(t - sin\, t), \\ y = 6(1 - cos\, t); \end{cases}$ ось ox, $o \le t \le 2\pi$

Решение. $dx = 6(1 - cos\, t)dt$

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} y^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} 36\, (1 - cos\, t)^2 \cdot 6\left(1 - cos\, t\right)dt = 216\pi \int_0^{2\pi} (1 -$$
$$- cos\, t)^3\, dt = 216\pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\, cos\, t + 3cos^2 t - cos^3 t)dt = 216\pi \int_0^{2\pi} (1 -$$
$$-3\, cos\, t + 3\frac{1 + cos\, 2t}{2} - (1 - sin^2 t)\, cos\, t\Big)\, dt = 216\pi(\int_0^{2\pi} \frac{5}{2} dt -$$
$$-4\int_0^{2\pi} cos\, tdt + + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} cos\, 2tdt + \int_0^{2\pi} sin^2 t\, cos\, tdt) = 216\pi(\frac{5}{2} t \Big|_0^{2\pi} -$$
$$-4\, sin\, t \Big|_0^{2\pi} + + \frac{3}{4} sin\, 2t \Big|_0^{2\pi} + \frac{sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}) = 216\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = 1080\pi^2$$

в) $\rho = 6\, sin\, 2\varphi$, вокруг полярной оси.

Решение. График функции представляет двухлепестковую розу:



Используя формулу $V_\rho = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi d\varphi$, получим:

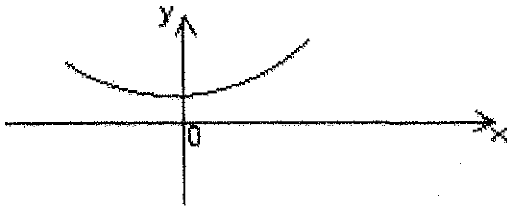
$$V_\rho = \frac{2\cdot2}{3}\pi\cdot 6^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi d\varphi = 288\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3\varphi\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi =$$
$$2304\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^3\varphi d\varphi = 2304\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) =$$
$$2304\pi\left(\frac{\sin^5\varphi}{5} - \frac{\sin^7\varphi}{7}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2304\pi\cdot\frac{2}{35} = \frac{4608\pi}{35}.$$

Задание 7.

а) Найти координаты центра масс дуги цепной линии $y = 6ch\frac{x}{6}$,

$$-6 \le x \le 6.$$

Решение.



Т.к. кривая симметрична относительно оси ОУ, то $x_c = 0$.

Найдём по формуле:

$$y_c = \frac{1}{l}\int_{-6}^{6} y\,dl;\ \ y' = sh\frac{x}{6};\ \ dl = \sqrt{1+sh^2\frac{x}{6}}\,dx = ch\frac{x}{6}dx.$$

Длина дуги $l = \int_{-6}^{6}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_0^6 ch\frac{x}{6}dx = 12sh\frac{x}{6}\Big|_0^6 = 12sh1.$

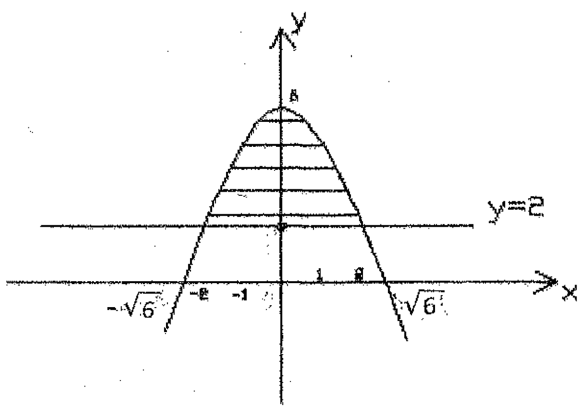
$$y_c = \frac{1}{12sh1}\int_{-6}^{6} 6ch^2\frac{x}{6}dx = \frac{1}{sh1}\int_0^6 ch^2\frac{x}{6}dx = \frac{1}{2sh1} = \frac{1}{2sh1}\int_0^6\left(1+ch\frac{x}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2sh1}\left(x+3sh\frac{x}{3}\right)\Big|_0^6 = \frac{1}{2sh1}(6+3sh2) = \frac{3}{2sh1}(2+sh2).$$

Ответ: $x_c = 0;\ \ y_c = \frac{3}{2sh1}(2+sh2).$

б) Вычислить координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2,\ \ y = 2.$

Решение. Построим фигуру в системе координат:



Из однородности и симметричности данной фигуры следует, что $x_c = 0$. Тогда

$$y_c = \frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}((6-x^2)^2-2^2)dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}(32-12x^2+x^4)dx}{2\int_0^2(4-x^2)dx} =$$

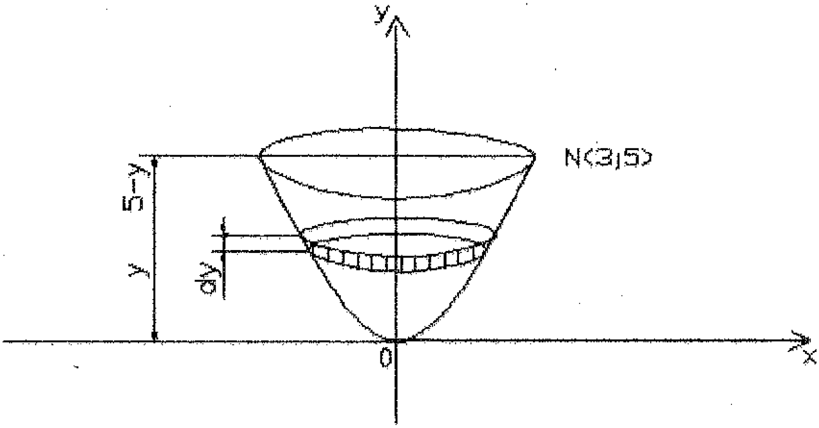
$$= \frac{1}{2}\frac{\left(32x-4x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2}{\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{192}{5}}{\frac{16}{3}} = 3{,}6$$

Ответ: $x_c = 0,\ \ y_c = 3{,}6.$

Задание 8

Котёл имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания R=3м, глубина H=5м. Котёл наполнен жидкостью, плотность которой $\rho = 0{,}8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Решение.



Сечение котла плоскостью ОХУ есть парабола, уравнение которой $y = ax^2$. Точка N(3;5) принадлежит параболе, поэтому её координаты удовлетворяют уравнению параболы, т.е. $5 = 3^2 a$. Отсюда $a = \frac{5}{9}$. Тогда $y = \frac{5}{9}x^2$ – уравнение параболы.

Разделим параболоид на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине 5-y равна dy. Тогда, принимая приближённо слой за цилиндр, получаем формулу для определения его объёма:

$$dV = \pi x^2 dy$$

Из уравнения параболы находим $x^2 = \frac{9y}{5}$, тогда

$$dV = \frac{\pi 9y}{5} dy$$

Массу слоя жидкости обозначим через dQ. Тогда

$$dQ = \rho dV = \frac{9}{5}\pi\rho y dy,$$ ρ-плотность жидкости.

Чтобы выкачать жидкость с глубины 5 −y, потребуется затратить элементарную работу

$$dA = dQ(5-y)g = \frac{9}{5}\pi\rho g(5-y)ydy.$$

Учитывая, что $0 \le y \le 5$, получаем

$$A = \int_0^5 \frac{9}{5}\pi\rho g(5-y)ydy = \frac{9}{5}\pi\rho g\int_0^5 (5y-y^2)dy = \frac{9}{5}\pi\rho g(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}) =$$
$$= \frac{9}{5}\pi\rho g\frac{125}{6} = \frac{75}{2}\pi\rho g$$

Т.к. $\rho = 800\frac{кг}{м^3}$, $g = 9{,}8\frac{м}{с^2}$, то $A = \frac{75}{2}\pi \cdot 800 \cdot 9{,}8 = 30000 \cdot 9{,}8\pi \approx$
≈ 294300 (Дж)

Ответ: 294300(Дж).

Задания к аттестационной работе №2 по теме: Дифференциальные уравнения

I. Решить дифференциальное уравнение:

1. $(1+e^x)yy' = e^x$
2. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$
3. $e^x \sin ydy + tgydy = 0$
4. $y'ctg\,x + y=2$
5. $\cos ydx =$
$2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$
6. $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$
7. $e^{x+3y}dy = xdx$
8. $ctgx \cdot \cos^2 ydx + \sin^2 xtgydy = 0$
9. $e^x tgydx = (1-e^x)\sec^2 ydy$
10. $(1+e^{3y})xdx = e^{3y}dy$
11. $\frac{e^{-x^2}dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$
12. $3^{y^2-x^2} = \frac{yy'}{x}$
13. $y' = (2y+1)tgx$
14. $(y^2+3)dx - \frac{e^x}{x}ydy = 0$
15. $y'\sin x = y\ln y$
16. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$
17. $3e^x \sin ydx + (1-e^x)\cos ydy = 0$
18. $\sin x \cdot tgydx - \frac{dy}{\sin x} = 0$
19. $\sin y \cos x\, dy = \cos y \sin x\, dx$
20. $\sec^2 x \cdot tgydy + \sec^2 y \cdot tgxdy = 0$
21. $(1+e^x)ydy - e^y dx = 0$
22. $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$
23. $y' = (2x-1)ctgy$
24. $tgx\sin^2 y\,dx + \cos^2 xctgydy = 0$
25. $xy' - y = y^3$
26. $xyy' = 1 - x^2$
27. $y'tgx = y$
28. $(1+e^x)yy' = e^x$
29. $(xy^2+x)dx + (x^2y-y)dy = 0$
30. $(1+y^2)dx + xydy = 0$

II. Решить дифференциальное уравнение:

1. $y^2 + x^2y' = xyy'$
2. $x^2y' = y(x+y)$
3. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$
4. $xy' = y\cos\ln\left(\frac{y}{x}\right)$
5. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$
6. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$
7. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$
8. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
9. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$
10. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$
11. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
12. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
13. $y'x + x + y = 0$
14. $(x + 2y)dx + xdy = 0$
15. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$
16. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$
17. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$
18. $y' = \frac{y}{x} - 1$
19. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$
20. $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0$
21. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$
22. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$
23. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$
24. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$
25. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$
26. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x}$
27. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
28. $(x + 2y)dx - xdy = 0$
29. $4x - 3y + y'(2y - 3x)dy = 0$
30. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$

III. Найти частные решения (частный интеграл) дифференциального уравнения:

1. $(1 + x^2)y' + 4xy = 3, y(0) = 0$
2. $y' - y = e^x, y(0) = 1$
3. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2, y(0) = 0$
4. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}, y(1) = 0$
5. $x(y' - y) = e^x, y(1) = 0$
6. $x^2y' + xy + 1 = 0, y(1) = 0$
7. $(xy' - 1)\ln x = 2y, y(e) = 0$
8. $xy' + y = \sin x, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$
9. $y'\mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}x, y(0) = 0$
10. $(1 - x^2)y' + xy = 1, y(0) = 1$
11. $y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0, y(0) = 0$
12. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x, y\left(\sqrt{2}\right) = 1$
13. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = \frac{1}{2e}$
14. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}, y(0) = 0$
15. $y = x(y' - x\cos x), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
16. $y' + y\,\mathrm{tg}x = \sec x, y(0) = 0$
17. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, y(2) = 1$
18. $(x + y^2)dy = ydx, y(0) = 1$
19. $y' = \frac{y}{3x - y^2}, y(0) = 1$
20. $xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0$
21. $x^2y' = 2xy + 3, y(1) = -1$
22. $y' = 2x(x^2 + y), y(0) = 0$
23. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, y(0) = 0$
24. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy, y(0) = \frac{\pi}{4}$
25. $(2e^y - x)y' = 1, y(0) = 0$
26. $(\sin^2 y + x\,\mathrm{ctg}y)y' = 1, y(0) = \frac{\pi}{2}$
27. $y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x, y(0) = 0$
28. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy, y(0) = 1$
29. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1), y(0) = 1$
30. $xy' + y = \ln x + 1, y(1) = 0$

IV Решить дифференциальное уравнение

1) $xy''+y'=\ln x$
2) $y''x\ln x=2y'$
3) $xy''=y'\ln(\frac{y'}{x})$
4) $2xy'y''=y'^2-1$
5) $y''\operatorname{tg}x=y'+1$
6) $xy''=y'$
7) $x^2y''+xy'=1$
8) $y''+2xy'^2=0$
9) $y''+4y'=2x^2$
10) $x^2y''=y'^2$
11) $y'''x\ln x=y''$
12) $y''\operatorname{ctg}x+y'=2$
13) $2xy''y'=y'^2-4$
14) $y''+4y'=\cos 2x$
15) $2xy'y''=y'^2+1$
16) $y'''+y''\operatorname{tg}x=\sec x$
17) $x^3y''+x^2y'=1$
18) $xy''=y'+x^2$
19) $y''x\ln x=y'$
20) $y''+y'=\sin x$
21) $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)$
22) $y''-2y'\operatorname{ctg}x=\sin^3x$
23) $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$
24) $x(y''+1)+y'=0$
25) $xy''-y'=2x^2e^x$
26) $y''=y'+x$
27) $y''=-\frac{x}{y'}$
28) $(x+1)y''-(x+2)y'+x+2=0$
29) $y'+\frac{1}{4}(y'')^2=xy''$
30) $xy'''+y''=1+x$

V Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения

1) $y''+\frac{2}{1-y}y'^2=0, y(0)=0, y'(0)=1$
2) $y'^2+2yy''=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$
3) $2yy''=y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$
4) $y''=2-y,\ y(0)=2,\ y'(0)=2$
5) $yy''-2y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$
6) $y''(1+y)=5y'^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$
7) $yy''-y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$
8) $y''(2y+3)-2y'^2=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$
9) $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$
10) $y''(1+y)=y'^2+y',\ y(0)=2,\ y'(0)=2$
11) $y''=\frac{y'}{\sqrt{y}},\ y(0)=1,\ y'(0)=2$
12) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}},\ y(0)=y'(0)=0$
13) $yy''-y'^2=y^2\ln y,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

14) $2y'^2=(y-1)y''$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$
15) $y''+yy'^3=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$
16) $yy''-2yy'\ln y=y'^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$
17) $y''=y'e^y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$
18) $yy''+y'^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$
19) $yy''-y'^2=y^4$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$
20) $y''+2yy'^3=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=\frac{1}{3}$
21) $y''=\frac{1}{2y^3}$, $y(0)=\frac{1}{2}$, $y'(0)=\sqrt{2}$
22) $yy''+y'^2=1$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$
23) $y''-y'^2+y'(y-1)=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$
24) $3y'y''=y+y'^3+1$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$
25) $y^2+y'^2-2yy''=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$
26) $y'y^2+yy''-y'^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$
27) $2yy''-3y'^2=4y^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$
28) $2yy''+y^2-y'^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$
29) $y''=y'^2-y$, $y(1)=-\frac{1}{4}$, $y'(1)=\frac{1}{2}$
30) $1+yy''+y'^2=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$

VI Решить дифференциальное уравнение

1) $y''-2y'+y=4e^x$
2) $6y''-y'-y=3e^{2x}$
3) $y''-12y'+40y=2e^{6x}$
4) $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$
5) $y''+5y'=72e^{2x}$
6) $y''+6y'+10y=74e^{3x}$
7) $y''-9y'+20y=126e^{-2x}$
8) $y''+y'=2x-1$
9) $y''+3y'=10-6x$
10) $y''-2y'=(4x+4)e^{2x}$
11) $y''+y'-6y=(6x+1)e^{3x}$
12) $y''+2y'+y=6e^{-x}$
13) $y''+4y'=15e^x$
14) $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5$
15) $y''-4y=(-24x-10)e^{2x}$
16) $y''+4y'+29y=26e^{-x}$
17) $y''+9y=10e^{3x}$
18) $y''-4y'=8-16x$
19) $y''+4y'+4y=6e^{-2x}$
20) $y''-8y'+17y=10e^{2x}$
21) $y''+2y'+37y=37x^2-33x+74$
22) $y''-7y'+12y=3e^{4x}$
23) $y''-6y'+10y=51e^{-x}$
24) $y''-12y'+36y=14e^{6x}$
25) $y''+2y'+y=(18x+8)e^{-x}$
26) $y''+6y'+9y=72e^{3x}$
27) $y''+2y'+y=(12x-10)e^{-x}$
28) $y''+8y'+25y=18e^{5x}$
29) $y''+6y'+9y=(48x+8)e^x$
30) $y''+2y'-3y=(12x^2+6x-4)e^x$

VII Решить дифференциальное уравнение

1) $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x$
2) $y''+16y=8\cos 4x$
3) $y''+y=2\cos x-(4x+4)\sin x$
4) $y''-8y'+20y=16(\sin 2x-\cos 2x)$
5) $y''-6y'+34y=18\cos 5x+60\sin 5x$
6) $2y''+7y'+3y=222\sin 3x$
7) $y''+4y'=e^{x}(24\cos 2x+2\sin 2x)$
8) $y''-6y'+13y=34e^{-3x}\sin 2x$
9) $y''+y=-4\cos x-2\sin x$
10) $y''+5y'=39\cos 3x-105\sin 3x$
11) $4y''-4y'+y=-25\cos x$
12) $y''+4y'+20y=4\cos 4x-52\sin 4x$
13) $y''+y'-2y=9\cos x-7\sin x$
14) $4y''+3y'-y=11\cos x-7\sin x$
15) $y''-5y'-6y=3\cos x+19\sin x$
16) $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$
17) $y''-2y'+5y=10e^{-x}\cos 2x$
18) $y''+6y'+13y=-75\sin 2x$
19) $y''-4y'+29y=104\sin 5x$
20) $y''-14y'+49y=144\sin 7x$
21) $3y''-5y'-2y=6\cos 2x+38\sin 2x$
22) $y''-4y'+5y=(24\sin x+8\cos x)e^{-2x}$
23) $y''-3y'+2y=-\sin x-7\cos x$
24) $y''+5y'+6y=52\sin 2x$
25) $y''-9y'+18y=26\cos x-8\sin x$
26) $y''-12y'+36y=32\cos 2x+24\sin 2x$
27) $y''-6y'+25y=9\sin 4x-24\cos 4x$
28) $y''-2y'+y=-12\cos 2x-9\sin 2x$
29) $y''-2y'+37y=36e^{x}\cos 6x$
30) $y''+2y'+5y=-8e^{-x}\sin 2x$

VIII Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

1. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$
11. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
12. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$
13. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
14. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$
15. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$
16. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$
17. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$
18. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$
21. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$
22. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$
23. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$
24. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$
25. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$
26. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$
27. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$
28. $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$

9.	$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$	19.	$\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$	29.	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	20.	$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$	30.	$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$

IX Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

1) $y''+4y=tg2x$
2) $y''-2y'+2y=\frac{e^x}{sin^2x}$
3) $y''+y=tgx$
4) $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$
5) $y''+y=\frac{1}{sinx}$
6) $y''+2y'+y=xe^x+\frac{1}{xe^x}$
7) $y''-y=\frac{e^x}{e^x+1}$
8) $y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{cosx}$
9) $y''+y=\frac{1}{cosx}$
10) $y''-2y'+2y=\frac{e^x}{sinx}$
11) $y''+2y'+2y=\frac{e^{-x}}{cosx}$
12) $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^3}$
13) $y''+y=ctgx$
14) $y''+4y=\frac{1}{sin2x}$
15) $y'''+y'=\frac{sinx}{cos^2x}$
16) $y''+4y=\frac{1}{cos2x}$
17) $y''+4y=ctg2x$
18) $y''+2y'+2y=e^{-x}ctgx$
19) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$
20) $y''+y=\frac{2}{sin^2x}$
21) $y''-y'=e^{2x}cos(e^x)$
22) $y''+2y'+5y=\frac{e^{-x}}{sin2x}$
23) $y''+9y=\frac{1}{sin3x}$
24) $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x^3}$
25) $y''-y'=e^{2x}sin(e^x)$
26) $y''+9y=\frac{1}{cos3x}$
27) $y''+y=tg^2x$
28) $y''+y=-ctg^2x$
29) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2}$
30) $y''+4y=2tgx$

X Решить следующую задачу:

1. Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(1;2) и обладающей следующим свойством: отношение ординаты любой её точки к абсциссе этой точки пропорционально угловому коэффициенту касательной к искомой кривой, проведённой в той же точке. Коэффициент пропорциональности равен 3.

2. Записать уравнения кривых, обладающих следующими свойством: длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого касательной и нормалью, проведёнными из произвольной точки кривой, равна 2ℓ.

3. Записать уравнения кривых, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная а.

4. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

5. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к кривой, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная b^2.

6. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А(2;4) и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведённой в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания.

7. В точке с ординатой 2 кривая наклонена к оси ОY под углом 45^0. Любая её касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный по длине квадрату ординаты точки касания. Записать уравнение данной кривой.

8. Записать уравнение кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью в точке М(х;у) на оси ОХ, равна $\frac{y^2}{x}$.

9. Записать уравнения кривой обладающей следующим свойством: если через любую её точку провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой на две части, причём площадь одной из них вдвое больше площади другой.

10. Записать уравнение кривой, все касательные к которой, проходят через начало координат.

11. Записать уравнение кривой, для которой произведение абсциссы какой-либо её точки и длины отрезка, осекаемого нормалью в этой точке на оси ОУ, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

12.Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: отрезок касательной к кривой, заключённый между осями координат делится в точке касания пополам.

13.Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

14.Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(2;-1), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке пропорционален квадрату ординаты точки касания. Коэффициент пропорциональности равен 6.

15. Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

16.Записать уравнение кривой, если известно, что расстояние от любой касательной до начала координат равно абсциссе точки касания.

17.Записать уравнение кривой, для которой треугольник, образованный осью ОУ, касательной и радиусом-вектором точки касания является равнобедренным.

18.Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью в точке M(x;y) на оси ОУ, равна $\frac{x^2}{y}$

19.Записать уравнение кривой, если касательная к ней отсекает на оси ОУ отрезок, равный по длине $\frac{1}{n}$-й сумме координат точки касания.

20.Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(2;0) и обладающую следующим свойством: отрезок касательной между точкой касания и осью ОУ, имеет постоянную длину, равную 2.

21.Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной к кривой и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

22.Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

23.Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ОУ, равна квадрату абсциссы точки касания.

24.Записать уравнение кривой, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведённой в какой-либо точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

25.Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную $^2/_3$ абсциссы точки касания.

26.Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(1;5) и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания.

27.Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(0;-2), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой её точке равен утроенной ординате этой точки.

28.Записать уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо её точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат.

29.Записать уравнение кривой, каждая касательная к которой пересекает прямую y=1 в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

30.Найти кривую, для которой произведение абсциссы любой точки, принадлежащей кривой, на отрезок, отсекаемый нормалью на оси OX, равно удвоенному квадрату расстояния этой точки до начала координат.

Решение типового варианта аттестационной работы №2 по теме "Дифференциальные уравнения"

Задание 1 Решить дифференциальное уравнение

$$3e^x tgy dx + (1 - e^x)\frac{1}{cos^2 y}dy = 0$$

Решение

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на произведение $tgy(1\text{-}e^x)$

Получим:

$$\frac{3e^x dx}{1 - e^x} + \frac{1}{\cos^2 y \cdot tgy} dy = 0$$

Проинтегрируем:

$-3ln|1-e^x|+\ln|tgy|=\ln|C_1|$

После потенцирования получим:

$\frac{|tgy|}{|1-e^x|^3}=|C_1|$ или $\left|\frac{tgy}{|1-e^x|^3}\right|=|C_1|$

$\frac{tgy}{(1-e^x)^3}=\pm C_1$. Обозначим $\pm C_1=C$.

Тогда $\frac{tgy}{(1-e^x)^3}=C$ или $tgy-C(1-e^x)^3=0$

Получили общий интеграл исходного уравнения. При разделении переменных мы предполагали, что $tgy(1-e^x)\neq 0$

Приравниваем каждый множитель к нулю; tgy=0=>

$y=k\pi,(k=0,\mp 1,\mp 2,\dots),y=k\pi,(k=0,\mp 1,\mp 2,\dots)$ являются решениями данного уравнения. Эти функции могут быть получены из общего интеграла при C=0.

Если 1-$e^x=0,$то $x=0$

X=0 – решение данного уравнения, оно может быть получено из общего интеграла при C=∞. Действительно, если полагая C=$\frac{1}{C_2}$, общий интеграл примет вид:

$C_2tgy-(1-e^x)^3=0$

И решение x=0 получается из общего интеграла при c_2=0 , а это соответствует C=∞.

Следовательно, функции $y=k\pi,(k=0,\mp 1,\mp 2,\dots)$ и $x=0$ -частные решения данного уравнения.

Общий интеграл

tgy-C$(1-e^x)^3=0$

Задание 2 Решить уравнение

(2x-y)dx+(x+y)dy=0

Решение

Так как функции 2x-y и x+y – однородные первого измерения, то данное уравнение – однородное.

Сделаем замену y=Ux, dy=Udx+xdU.

Тогда

(2x-Ux)dx+(x+Ux)(Udx+xdU)=0

$x(2-U)dx+x(1+U)Udx+x^2(1+U)dU=0$

$x(2-U+U+U^2)dx+x^2(1+U)dU=0$

$x(2+U^2)dx+x^2(1+U)dU=0$

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+U}{2+U^2}dU=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{1+U}{2+U^2}dU=C$$

$$\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{U}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(U^2+2)}{U^2+2}=C$$

$$\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{U}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln(U^2+2)=C$$

В последнее выражение вместо U подставим значение $\frac{y}{x}$. Получим общий интеграл

$$\ln|x|+\ln\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{y}{x\sqrt{2}}=C$$

или $\ln|x|\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{|x|}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{y}{x\sqrt{2}}=C$, т. е.

$$\ln\sqrt{y^2+2x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{y}{x\sqrt{2}}=C.$$

При разделении переменных мы делили обе части уравнения на выражение $(U^2+2)x^2$, но $U^2+2\neq 0$, а $x=0$ не является решением уравнения.

<u>Задание 3</u> Решить уравнение $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x}, y(0)=0$

<u>Решение</u>

Сделав подстановку Бернулли y=UV, y'=U'V+UV', получим

$U'V+UV'-UVtgx=\frac{1}{\cos x}$

$U'V+U(V'-Vtgx)=\frac{1}{\cos x}$

Находим частное решение уравнения $V'-Vtgx=0$.

$\frac{dV}{dx}=Vtgx$, $\frac{dV}{V}=tgxdx$

$\ln|V|=-\ln|\cos x|+\ln|C_1|$

Полагая $C_1=1$, выбираем частное решение $V=\frac{1}{\cos x}$.

Далее ищем общее решение уравнения

$U'V=\frac{1}{cosx}$, где $V=\frac{1}{cosx}$

Имеем: $U'\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$, $U'=1$, $U=x+C$.

Общее решение исходного уравнения

$y=UV=(x+C)\frac{1}{\cos x}$

Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$:

$(0+C)\frac{1}{cos0}=0$, откуда $C=0$

Подставляя значение $C=0$ в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$y=\frac{x}{\cos x}$.

<u>Задание 4</u> Решить уравнение $xy''-y'=x^2e^x$

<u>Решение</u>

Данное уравнение не содержит у. Понизим порядок этого уравнения на 1, положив $y'=z$. Тогда $y''=z'$, и исходное уравнение превращается в линейное дифференцальное уравнение первого порядка:

$xz'-z=x^2e^x$

Разделим обе части данного уравнения на $x\neq 0$. Получим $z'-\frac{z}{x}=xe^x$

Применим подстановку Бернулли $z=UV$, $z'=U'V+UV'$, получим:

$U'V+UV'-\frac{UV}{x}=xe^x$ или $U'V+U(V'-\frac{V}{x})=xe^x$

Найдём частное решение уравнения $V'-\frac{V}{x}=0$

$\frac{dV}{dx}=\frac{V}{x}$; $\frac{dV}{V}=\frac{dx}{x}$; $\ln|V|=\ln|x|$; $|V|=|x|$

Выбираем частное решение уравнения V = x

Далее ищем общее решение уравнения

$U'V=xe^x$, где V=x.

Имеем: $U'x=xe^x$

$x\neq 0$, $U'=e^x$, $U=e^x+\widetilde{C_1}$

И общее решение линейного уравнения $z=x(e^x+\widetilde{C_1})$

$z=y'$, следовательно, $y'=x(e^x+\widetilde{C_1})$

$y'=xe^x+\widetilde{C_1}x$

$y=xe^x-e^x+\widetilde{C_1}\frac{x^2}{2}+C_2$; $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$, где $C_1=\frac{\widetilde{C_1}}{2}$

Следовательно общее решение исходного уравнения

$y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$.

Задание 5 Решить уравнение $y''=\frac{1}{y^3}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Решение

Данное уравнение не содержит явно аргумент x. Поэтому путём замены $P(y)=y'$ порядок его можно понизить на единицу и получить уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Имеем: $y'=P$, $y''=P\frac{dp}{dy}$

$P\frac{dp}{dy}=\frac{1}{y^3}$, $Pdp=\frac{dy}{y^3}$

Проинтегрируем: $\frac{p^2}{2}=\frac{y^{-2}}{-2}+\widetilde{C_1}$; $\frac{p^2}{2}=-\frac{1}{2y^2}+\widetilde{C_1}$

$p^2 = -\frac{1}{y^2} + 2\widetilde{C_1}$; Положим $2\widetilde{C_1} = C_1$

$p^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1$; $p = y'$, следовательно, $y'^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1$

$y' = \pm\sqrt{-\frac{1}{y^2} + C_1}$; $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{1}{y^2} + C_1}$, $dy = \pm\sqrt{-\frac{1}{y^2} + C_1}dx$

Разделим переменные: $\pm\frac{dy}{\sqrt{-\frac{1}{y^2}+C_1}} = dx$

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2 - 1}} = dx;\ \pm\frac{1}{2C_1}\frac{d(C_1y^2 - 1)}{\sqrt{C_1y^2 - 1}} = dx$$

$$\pm\frac{1}{2C_1}\int(C_1y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}d\,(C_1y^2 - 1) = \int dx + C_2$$

$$\pm\frac{1}{2C_1}\frac{(C_1y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x + C_2;\ \pm\frac{1}{C_1}(C_1y^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = x + C_2$$

Возведём обе части равенства в квадрат

$$\frac{1}{{C_1}^2}(C_1y^2 - 1) = (x + C_2)^2$$

Получим общий интеграл.

При разделении переменных мы делили на $\sqrt{-\frac{1}{y^2} + C_1}$, но при этом мы не потеряли решения, т. к. $y=C$, где C – постоянная, не является решением исходного уравнения.

Мы ранее нашли $y'^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1$. Определим C_1, воспользовавшись начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$0=-1+C_1$, $C_1=1$.

Подставим $C_1=1$ в общий интеграл:

$y^2-1=(x+C_2)^2$

Определим C_2: $1-1=(0+C_2)^2$

$C_2=0$

Следовательно частный интеграл уравнения

$y^2-1=x^2$

Отсюда $y^2=x^2+1$, $y=\pm\sqrt{x^2+1}$

Начальным условиям удовлетворяет только решение

$y=\sqrt{x^2+1}$.

Задание 6 Решить уравнение

$y''-2y'+y=xe^x$

Решение

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение

$k^2-2k+1=0$

$k_1=k_2=1$

Общее решение однородного уравнения $y_0=C_1e^x+C_2xe^x$. Правая часть данного уравнения – специальная, где a=1. Так как a=1 является корнем характеристического уравнения кратности r=2, частное решение исходного уравнения определяется формулой

$y^*=x^2(Ax+B)e^x$; $y^*=Ae^xx^3+Bx^2e^x$.

Найдём $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ и подставим в исходное уравнение y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$:

$y^{*\prime}=Ae^xx^3+Ae^x3x^2+2Bxe^x+Bx^2e^x$

$y^{*\prime\prime}=Ae^xx^3+Ae^x3x^2+Ae^x3x^2+Ae^x6x+2Be^x+2Bxe^x+2Bxe^x+Bx^2e^x$

$y^{*\prime\prime}=Ae^xx^3+6Ae^xx^2+6Axe^x+2Be^x+4Bxe^x+Bx^2e^x$

Подставим в уравнение:

$Ae^xx^3+6Ae^xx^2+6Axe^x+2Be^x+4Bxe^x+Bx^2e^x-2Ae^xx^3-6Ae^xx^2-4Bxe^x-2Bx^2e^x+Ae^xx^3+Bx^2e^x=xe^x$

После преобразований получим:

$6Axe^x+2Be^x=xe^x$

Приравняем коэффициенты при xe^x, e^x

$$\begin{array}{c|ll} xe^x & 6A=1 & A=\frac{1}{6} \\ e^x & 2B=0 & B=0 \end{array}$$

Следовательно, $y^*=\frac{1}{6}x^3e^x$

И общее решение данного уравнения равно

$y=y_0+y^*$, те.

$y=e^x(C_1+C_2x)+\frac{1}{6}x^3e^x$

<u>Задание 7</u> Решить уравнение

$y''-3y'+2y=3\cos x+19\sin x$

Решение

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения. Составим характеристическое уравнение:

$k^2-3k+2=0$

Его корни $k_1=1$, $k_2=2$

Общее решение однородного уравнения:

$y_0=C_1e^x+C_2e^{2x}$

Правая часть данного уравнения специального вида, где a=0, b=1. Числа $a\pm bi=\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение y* имеет вид:

$y^*=A\cos x+B\sin x$

Найдём $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ и подставим в исходное уравнение y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$.

$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$,

$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$

-Acosx-Bsinx+3Asinx-3Bcosx+2Acosx+2Bsinx=3cosx+19sinx

(A-3B)cosx+(B+3A)sinx=3cosx+19sinx

Приравняем коэффициенты при cosx, sinx.

$$\begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array}\left|\begin{array}{l} A-3B=3 \\ B+3A=19 \end{array}\right\} \begin{array}{c} -A=3b+3 \\ B+9B+9=19 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{c} A=3B+3 \\ 10B=10 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{c} A=6 \\ B=1 \end{array}\left.\right\}$$

Следовательно, частное решение

$y^*=6\cos x+\sin x$

И общее решение исходного уравнения

$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+6\cos x+\sin x$

<u>Задание 8</u> Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

Решение

а) Дифференцируем первое уравнение данной системы. Получаем: $x''=x'-y'$. Затем заменяем в последнем уравнении y' его выражением из второго уравнения данной системы: $x''=x'+4x-y$. В последнем уравнении y заменяем выражениему=$x-x'$, найденным из первого уравнения системы. В итоге приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной фикции x(t):

$x''=x'+4x-x+x'$

$x''-2x'-3x=0$

$k^2-2k-3=0 \quad k_1=-1,\ k_2=3$

$x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$

отсюда находим $x'=-C_1e^{-t}+3C_2e^{3t}$

Подставляя полученные выражения для x и x′ в $y=x-x'$, имеем

$y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+C_1e^{-t}-3C_2e^{3t}$

$y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}$

Следовательно, искомым решением являются функции:

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} \end{cases}$$

б) Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$\begin{vmatrix} 1-л & -1 \\ -4 & 1-л \end{vmatrix}=0$ $(1-л)^2-4=0$; $1-2л+л^2-4=0$; $л^2-2л-3=0$

$л_1=-1$; $л_2=3$

1) $л_1=-1$ Построим первое частное решение вида $x_1= y_1e^{-t}$, $y_1= y_2e^{-t}$, соответствующее корню $л_1=-1$. Числа y_1 и y_2 нужно искать из системы:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = 0 \\ -4y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases},$$

каждая сводится к одному уравнению

$2\,y_1- y_2=0$,

так что одно из чисел y_1, y_2 можно выбирать произвольно. Положив $y_1=1$, получим $y_2=2$. Поэтому характеристическому числу $\lambda_1= -1$ соответствует частное решение:

$x_1=e^{-t}$, $y_1=2e^{-t}$

2) $\lambda_2=3$. Построим частное решение, соответствующее $\lambda_2=3$:

$x_2= \mu_1e^{3t}$, $y_2= \mu_2e^{3t}$

Числа μ_1 и μ_2 нужно искать из системы:

$$\begin{cases} -2\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ -4\mu_1 - 2\mu_2 = 0 \end{cases},$$

которая сводится к одному уравнению $2\,\mu_1+ \mu_2=0$. Положив $\mu_1=1$, получим $\mu_2=-2$. Поэтому характеристическому числу $л_2=3$ соответствует частное решение

$x_2=e^{3t}$, $y_2=-2e^{3t}$

Общим решением системы будет:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

<u>Задание 9</u> Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$

Решение

Решаем соответствующее однородное уравнение

$y''-2y'+y=0$, $k^2-2k+1=0$ $k_1=k_2=1$

Общим решением однородного уравнения будет

$y=C_1e^x+C_2xe^x$

Считаем что C_1 и C_2 – функции от x, то

$y=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = f(x) \end{cases}$$

которая для данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

Находим из неё $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ а затем и $C_1(x)$, $C_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1 + x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = -C_2{}'(x)x$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2{}'(x)x \\ -C_2'(x)x + -C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$C_2'(x)=\frac{1}{x}$, $C_2(x)=ln|x| + \widetilde{C_2}$

$C_1'(x)= - 1$ $C_1(x)= - x + C_1$

Общее решение

$y=(-x+C_1)e^x+(ln|x| + \widetilde{C_2})xe^x$

Преобразуем его:

$y=-xe^x+C_1e^x+xe^x\ln x + \widetilde{C_2}xe^x$

$y=(\widetilde{C_2}-1)xe^x+C_1e^x+xe^x ln|x|$

Обозначим $\widetilde{C_2}-1= C_2$

Тогда окончательно $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x ln|x|$

Задание 10

Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(1;2), если известно, что произведение углового коэффициента касательной в любой её точке и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки.

Решение

Искомое дифференциальное уравнение имеет вид:

$y'=(x+y)=2y$

Это уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

(x+y)dy=2ydx

Сделаем замену y=Ux, dy=Udx+xdU.

(x+Ux)(Udx+xdU)-2Uxdx=0

x(1+U)(Udx+xdU)-2Uxdx=0

x(1+U)Udx+x^2(1+U)dU-2Uxdx=0

x(U+U^2-2U)dx+x^2(1+U)dU=0

x(U^2-U)dx+x^2(1+U)dU=0

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $x^2U(U-1)$.

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+U}{U(U-1)}dU=0$$

Проинтегрируем: $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{U+1}{U(U-1)}dU=C$

Второй интеграл – от правильной рациональной функции. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{U+1}{U(U-1)}=\frac{A}{(U-1)}+\frac{B}{(U-1)}$$

U+1=A(U-1)+BU. $\begin{matrix} U \\ U^0 \end{matrix}\left| \begin{matrix} A+B=1 & B=2 \\ & A=-1 \end{matrix} \right.$

Следовательно $\frac{U+1}{U(U-1)}=-\frac{1}{U}+\frac{2}{U-1}$

и $ln|x|$-$ln|U|$+2$ln|U-1|$=$ln|\tilde{C}|$

Заменим U на $\frac{y}{x}$:

$ln|x|$-$ln\left|\frac{y}{x}\right|$+2$ln|\frac{y}{x}-1|$=$ln|\tilde{C}|$

$ln|x|$-$ln|y|$+2$ln|\frac{y-x}{x}|$=$ln|\tilde{C}|$

$ln x^2 + ln\frac{(y-x)^2}{x^2}=ln|\widetilde{C}y|$

$\ln(y-x)^2 = ln|\widetilde{C}y|$

$(y-x)^2=|\widetilde{C}y|$; $(y-x)^2=\pm\widetilde{C}y$

Положим $=\pm|\widetilde{C}y|=C$. Тогда общий интеграл уравнения $(y-x)^2=Cy$

При решении уравнения с разделяющимися переменными мы делили обе части уравнения на $x^2U(U-1)$.

Приравниваем каждый множитель к нулю.

x=0 не является решением исходного уравнения. Если U=0, то y=0. Это решение. Оно может быть формально получено при $C=\infty$. Последнее означает, что постоянная C заменяется через $\frac{1}{C_1}$, после чего общий интеграл примет вид $C_1(y-x)^2=y$; полагая в последнем равенстве $C_1=0$, что соответствует $C=\infty$, будем иметь y=0.

Если U-1=0, те. U=1, получаем y=x. При подстановке этой функции в уравнение убеждаемся, что y=x – решение, оно входит в общий интеграл при C=0.

Найдём кривую, проходящую через точку A(1;2).

Определим C:

$(2-1)^2=C\cdot 2$; $C=\frac{1}{2}$

$(y-x)^2=\frac{1}{2}y$; $y=2(y-x)^2$

Получили исходный частный интеграл.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1985, т. I.

2. Жевняк Р.М., Карпук А. А. Высшая математика, ч.1-2. - Минск: ВШ,1984-1988.

3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики, - М.: Наука, 1985.

4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). - М.: Наука, 1981. ч. I.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко). - Минск: ВШ, 2000, ч. I.

6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1. - Минск: ВШ,1988.

7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. - Минск: ВШ, 1988

Содержание

Учебное издание

Составители:
Пархимович Игорь Владимирович
Гоголинская Рената Альдефонсовна
Остапчук Евгений Михайлович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФНП. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Методические указания и задания аттестационных работ по курсу
"Высшая математика"
для студентов строительного факультета

Ответственный за выпуск: Пархимович И.В.
Редактор: Строкам Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В
Компьютерная вёрстка: Кармаш Е.Л.

Подписано к печати 8.02.2008 г. Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Гарнитура Arial Narrow. Усл.п.л. 3,5. Уч.изд.л. 3,26. Тираж 200 экз. Заказ №56.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.