МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ VI

Брест 2007

УДК 519.2.(076)

В VI части практикума содержатся краткие теоретические сведения, основные формулы, решения типовых задач по всем темам раздела «элементы математического программирования» учебной программы по высшей математике для технических специальностей, а также задания для аудиторных и домашних работ к каждому практическому занятию по этим темам. Издается в 8 частях.

Составители: Е. В. Кузьмина, ассистент
Л. Т. Мороз, доцент

ОГЛАВЛЕНИЕ

Графы. Действия над ними. Циклы в графах. Матричные способы задания графов. Алгоритм Фалкерсона.

Основные понятия теории графов.

Граф представляет собой некоторое множество точек плоскости или пространства и множество отрезков кривых или прямых линий, соединяющих все или некоторые из этих точек.

Определение. *Графом G* называется пара множеств (X, U), где X - множество вершин, U – множество ребер.

Для графа Q.(X, U) на рис. 1

$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8\}$,

$U = \{(x_3,\ x_3),\ (x_3,\ x_4),\ (x_4,\ x_6),\ (x_5,\ x_3),\ (x_6,\ x_7),\ (x_7,\ x_6),$

$(x_8,\ x_4),\ (x_8,\ x_5)\}$.

Различают два вида графов: ориентированные (рис.1) и неориентированные (рис 2), в ориентированном графе (орграфе) ребро имеет начало и конец. В орграфе ребро называют дугой, а вершину - узлом.

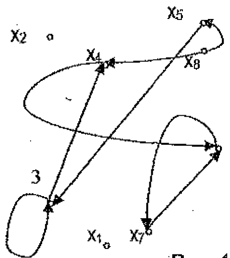


Рис. 1

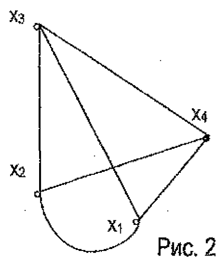


Рис. 2

Ребра графа могут пересекаться, но пересечение не обязательно является вершиной (рис.1). Если ребра пересекаются только в вершинах, то такой граф называется *плоским*. Примерами плоских графов могут служить план города, водопроводная сеть.

Вершины в графе называют *смежными*, если они различны и существует дуга (ребро), соединяющая эти вершины. Ребра, имеющие общую вершину, называются *смежными*.

Ребро и любая из его вершин называются *инцидентными*. Вершины в графе могут отличаться друг от друга количеством дуг (ребер), которым они инцидентны (принадлежат). Если две вершины, соединены более чем одним ребром, то такие ребра называются *кратными*.

Степенью вершины называемся количество ребер, инцидентных данной вершине. Вершина со степенью 1 называется *висячей*. Вершина со степенью 0 называется *изолированной*. Ребро, инцидентное одной и той же вершине, называется *петлей*.

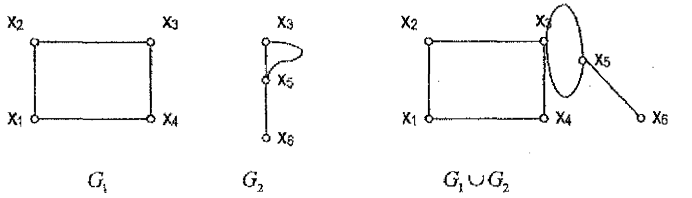
Граф называют *простым*, если он не содержит петель и параллельных дуг (ребер). Простой граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*. Граф, содержащий хотя бы две параллельные дуги (ребра), называется *мультиграфом*.

Операции над графами.

1) Объединение графов.

Определение: Объединением двух графов $G_1=(X_1, U_1)$ и $G_2=(X_2, U_2)$ называется граф $G=G_1 \cup G_2=(X, U)$, где $X = X_1 \cup X_2$, $U = U_1 \cup U_2$.

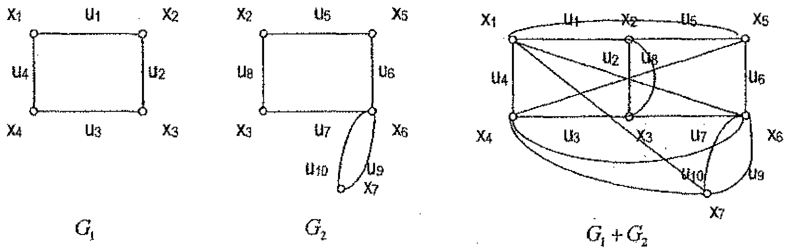
Пример. Найти объединение графов



2) Сумма графов.

Определение: Суммой двух графов $G_1=(X_1, U_1)$ и $G_2=(X_2, U_2)$ называется граф $G=G_1+G_2=(X, U)$, для которого $X = X_1 \cup X_2$, а $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, где U_3 - множество дуг (x, y), таких, что $x \in X_1 / X_2$, а $y \in X_2 / X_1$.

Пример. Найти сумму графов



2) Произведение графов.

Определение: Произведением двух графов $G_1=(X_1, U_1)$ и $G_2=(X_2, U_2)$ называется граф $G=G_1 \times G_2=(X, U)$, для которого

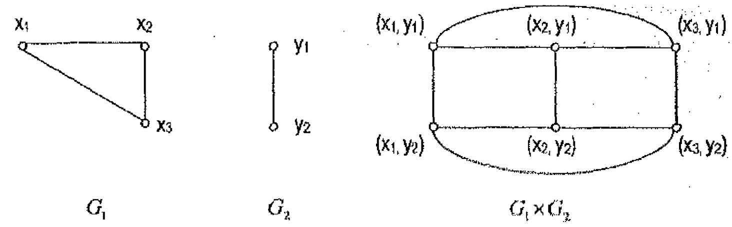
1) множество вершин $X = X_1 \times X_2$, т.е., если $x_1 \in X_1$; $x_2 \in X_2$., то $x=(x_1, x_2) \in X_1$;

2) множество ребер определяется по правилу: две вершины (x_1', x_2'), (x_1'', x_2'') смежные, если

$x_1' = x_1''$, а x_1' и x_1'' смежные или

$x_2' = x_2''$, а x_2' и x_2'' смежные.

Пример. Найти произведение графов



Кроме операций над графами существуют операции в графе:

1. удаление вершины,
2. удаление ребра,
3. замыкание двух вершин,
4. стягивание двух вершин.

Удаление вершины ведет к удалению всех инцидентных ребер. При замыкании две вершины заменяются третьей, и ей становятся инцидентны все ребра, которые были инцидентны двум предыдущим вершинам. При стягивании удаляются вначале ребра, а затем осуществляется замыкание.

Циклы в графах.

Путем в орграфе называется последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь, проходящий через все вершины, и притом только по одному разу, называется *гамильтоновым*. Путь, содержащий все дуги графа, и притом только по одному разу, называется *эйлеровым*. Конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется *контуром*. Контур, проходящий через каждую вершину графа только по одному разу (за исключением начальной и конечной вершин), называется *гамильтоновым*.

В неориентированном графе последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра смежны, называется *путем*, а конечный путь, у которого начальная и конечная вершины совпадают, — *циклом*.

Путь простой, если он проходит через каждую вершину не более одного раза.

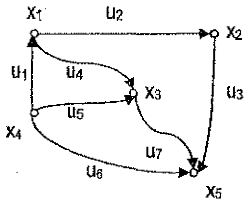
Простой цикл - цикл, в котором вершины обходятся не более одного раза

Неориентированный граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем, и несвязным в противном случае. Для установления связности орграфа ориентацию его дуг принимать в расчет не следует.

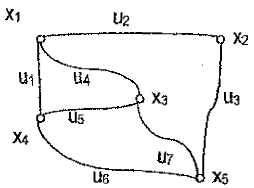
В различных приложениях теории графов дугам (ребрам) графов, моделирующим реальные процессы, обычно сопоставляют какие-либо числовые характеристики. Например, если дугами изображаются транспортные магистрали, то числовой характеристикой дуги может быть пропускная способность соответствующей магистрали; если же дугами изображаются работы некоторого комплекса, то числовая характеристика может означать время выполнения работы, количество некоторого ресурса, необходимого для ее выполнения, и т.д. В подобных случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные *веса*, а граф G с весами на дугах называют *взвешенным*.

Матричные способы задания графов. Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм Фалкерсона.

При большом числе вершин и дуг (ребер) рисунок графа теряет наглядность. В таких случаях для задания графов и работы с ними используются матрицы.



$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

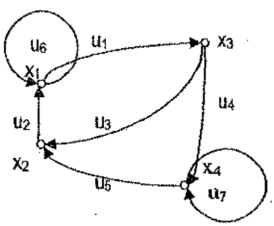


$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

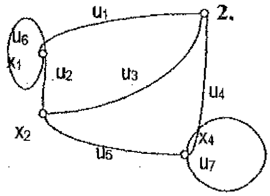
Графу G можно сопоставить *матрицу инциденций* орграфа G. Это прямоугольная матрица размерности $m \times n$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — дугам графа. Элементы матрицы r_{ij} равны: -1, если дуга u_j исходит из i-й вершины; +1, если дуга заходит в i-ю вершину; 0, если дуга не инцидентна i-й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут 1 и 0.

Строки матрицы инциденций называют *векторами инциденций графа G*.

Как для орграфов, так и для неориентированных графов можно определить *матрицу смежности вершин*. Матрица смежности вершин орграфа G, содержащего n вершин, — это квадратная матрица n-го порядка, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа G. Элементы p_{ij} матрицы равны числу дуг, идущих из i-й вершины в j-ю.

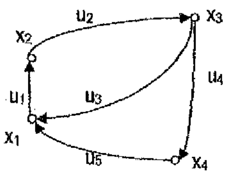


$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

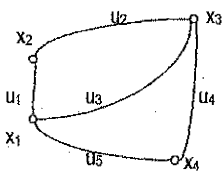


$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Граф G можно задать *матрицей смежности дуг (ребер)*. Матрица смежности дуг орграфа — это квадратная матрица m-го порядка (m — число дуг). Строки и столбцы матрицы соответствуют дугам (ребрам) графа. Элементы g_{ij} равны 1, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j, и 0 в остальных случаях. Матрицей смежности ребер неориентированного графа является матрица m-го порядка (m — число ребер) с элементами g_{ij}, равными 1, если ребра u_i и u_j смежны, и 0 в остальных случаях.



$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Говорят, что вершина x_i предшествует вершине x_j, если существует путь из x_i в x_j, тогда x_i называют предшествующей вершине x_j, а x_j — последующей за x_i. Под *упорядочением вершин* связного орграфа без контуров понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором:

1) вершины первой группы не имеют предшествующих, а вершины последней — последующих;
2) вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе;
3) вершины одной и той же группы дугами не соединяются.

Аналогичным образом вводится понятие упорядочения дуг.

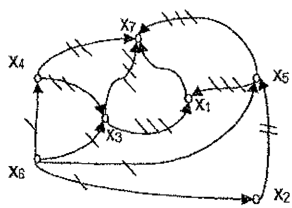
В результате упорядочения элементов получают граф, *изоморфный* данному (т.е. другой вариант изображения того же графа). Рассмотрим графический способ упорядочения вершин (алгоритм Фалкерсона).

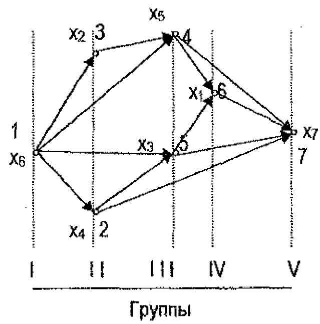
1. Находят вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Нумеруют вершины группы.

2. Мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины и дуги, из них выходящие. В получившемся графе найдется по крайней мере одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присваивают очередной номер и т. д. Этот шаг повторяют до тех пор, пока все вершины не будут упорядочены (пронумерованы).

Аналогичным образом упорядочивают дуги орграфа. Сначала находят дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют I группу). После вычеркивания дуг I группы в оставшемся графе вновь выделяют дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют II группу). И так до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы. В заключение упорядоченным дугам присваивают новые обозначения с индексами 1, 2, ...

Пример. Упорядочить вершины данного графа и построить изоморфный граф.



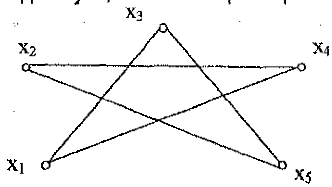


Решение. Заметим, что в вершину x_6 не входит ни одна дуга. Следовательно, она не имеет предшествующих, а потому относим ее к I группе. Больше подобных вершин на графе нет. Исключаем из рассмотрения вершину x_6 и дуги, из нее исходящие. Отметим эти дуги одной черточкой — первое вычеркивание. В оставшемся графе опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга. Это вершины x_2 и x_4. Они образуют II группу. Выполняем второе вычеркивание и т.д. (см. рис.). На рисунке для наглядности проведены вертикали, соответствующие группам разбиения, на которых последовательно отмечались точки: сначала x_6, затем x_2 и x_4 и т. д. Затем эти точки соединили дугами так, как на данном графе, и получили изоморфный граф с упорядоченными вершинами. Остается перенумеровать его вершины в натуральном порядке.

Аудиторные задания.

1. Нарисуйте полный граф с n вершинами. Скольким ребрам инцидентна каждая вершина в нем?
   а) n=2; б) n=3; в) n=5.
2. Составьте множество двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1,2,3. Сколько таких чисел? (Для решения постройте соответствующий граф).

3. Найдите два пути, связывающие вершины x_1, и x_2 в графе. Будут ли они простыми?

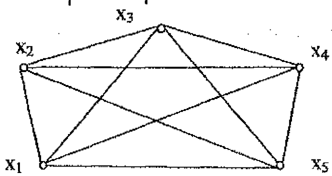


4. Найдите в графе циклы, содержащие

   а) 4 ребра, в) 5 ребер

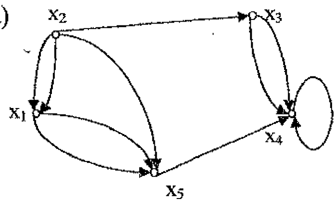
   б) 6 ребер, г) 10 ребер.

   Какие из этих циклов простые?

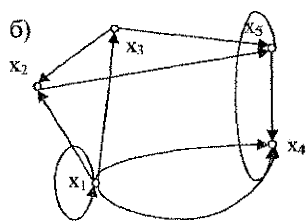


5. Составьте матрицу смежностей графа

а)



б)

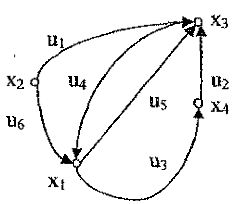


6. По матрице смежностей постройте граф

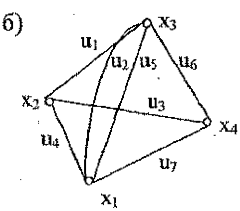
$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad б)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Составьте матрицу инциденций графа

а)



б)

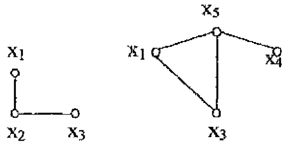


8. По матрице инциденций постройте граф

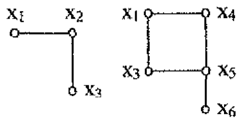
$$a)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad б)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Постройте объединение и сумму графов

а)

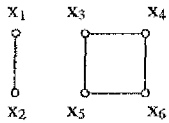


б)

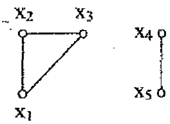


10. Постройте произведение графов

а)

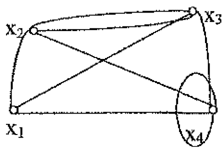


б)



Домашние задания.

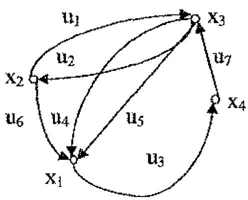
1. Составьте матрицу смежностей графа



2. По матрице смежностей постройте граф

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

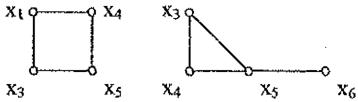
3. Составьте матрицу инциденций графа



4. По матрице инциденций постройте граф

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

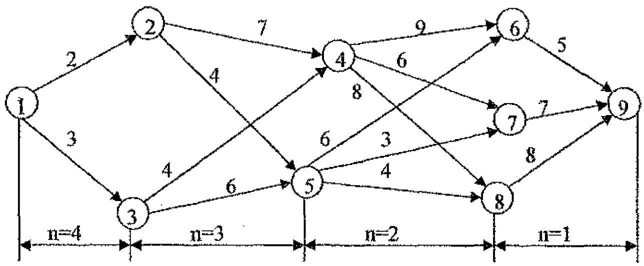
5. Постройте объединение и сумму графов



Задача о кратчайшем пути.

<u>Задача о кратчайшем пути.</u>

<u>Пример.</u> Найти путь минимальной длины между начальной и конечной вершинами сети методом динамического программирования (цифры, приписанные дугам сети, означают расстояния между соответствующими вершинами)



<u>Решение.</u> На рис. вершинам сети поставлены в соответствие города, а дугам — транспортные магистрали. Разобьем все множество вершин (городов) на подмножества. В первое подмножество включим исходную вершину 1, во второе — вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершины 1, в третье — вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершин второго подмножества. Таким образом, продолжая разбиение, получаем пять подмножеств: {1}, {2, 3}, {4, 5}, {6, 7, 8}, {10}. Очевидно, что любой маршрут из города 1 в город 9 содержит ровно четыре дуги, каждая из которых связывает вершины, принадлежащие соответствующим подмножествам. Следовательно, процесс решения задачи (нахождения оптимального маршрута) разбивается на четыре этапа. На первом этапе принимается решение, через какой город, принадлежащий второму подмножеству, двигаться из города 1. На втором этапе необходимо определить, через какой город третьего подмножества двигаться из некоторого города, принадлежащего второму подмножеству, и т. д.

Перенумеруем этапы от конечной вершины сети к начальной (см. рис.) и введем обозначения: n — номер шага (n=1, 2, 3, 4); $f_n(s)$ — минимальная длина пути от города s до конечного города, если до конечного города осталось n шагов; $j_n(s)$ — номер города, через который нужно ехать из города s, чтобы достичь $f_n(s)$; c_{sj} — расстояние между городом s и городом j. Здесь все обозначения несут важную смысловую нагрузку f означает целевую функцию, s — состояние системы (номер города), индекс n несет динамическую информацию о том, что из города s до конечного города осталось n шагов.

Предположим, что путешественник прибыл в город 9, следовательно, число оставшихся шагов равно нулю (n=0) и $f_n(s)=f_0(9)=0$, так как из города 9 двигаться не надо.

Рассмотрим последний шаг (n=1) и вычислим для него значение функции. Очевидно, что в город 9 можно попасть или из города 8, или из города 7, или из города 6. Вычислим длину пути для этих двух состояний:

$f_1(8)=c_{89}+f_0(9)=8+0=8,$ s=8, $j_1(8)=9$;

$f_1(7)=c_{79}+f_0(9)=7+0=7,$ s=7, $j_1(7)=9$;

$f_1(6)=c_{69}+f_0(9)=5+0=5,$ s=6, $j_1(6)=9$;

Чтобы произвести расчет для n=2, выдвинем гипотезу о месте нахождения путешественника: 1-я гипотеза — путешественник находится в городе 5; 2-я гипотеза — путешественник находится в городе 4.

Из города 5 в город 9 можно двигаться или через город 8, или через город 7, или через город 6. Поэтому оптимальный маршрут из города 5 найдется из выражения

$f_2(5)=\min\limits_j\{c_{56}+f_1(6);c_{57}+f_1(7);c_{58}+f_1(8)\}=\min\limits_j(6+5;\ 3+7;\ 4+8)=10$, где s=5, $j_2(5)=8$, т.е. условно-оптимальный маршрут проходит через город 8.

Аналогично находим значения функции для s=4:

$f_2(4)=\min\limits_j\{c_{46}+f_1(6);c_{47}+f_1(7);c_{48}+f_1(8)\}=\min\limits_j(9+5;\ 6+7;\ 8+8)=13$, где s=4, $j_2(4)=7$, т.е. маршрут проходит через город 7.

Рассмотрим шаг n=3. Для этого шага путешественник находится в городе 3 или в городе 2.

Из города 3 в город 9 можно двигаться или через город 5, или через город 4. Получим:

$f_3(3)=\min\limits_j\{c_{34}+f_2(4);c_{35}+f_2(5)\}=\min\limits_j(4+13;\ 6+10)=16$, где s=3, $j_3(3)=5$.

Значения функции для s=2:

$f_3(2)=\min\limits_j\{c_{24}+f_2(4);c_{25}+f_2(5)\}=\min\limits_j(7+13;\ 4+10)=14$, где s=2, $j_3(2)=5$.

Вычисления для четвертого шага (n=4):

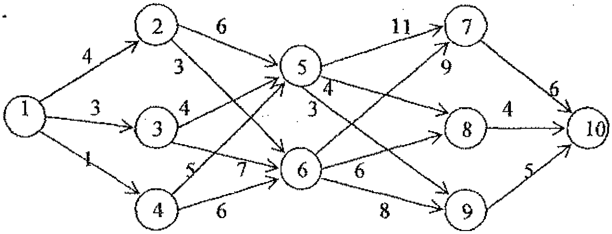
$f_4(1)=\min\limits_j\{c_{12}+f_3(2);c_{13}+f_3(3)\}=\min\limits_j(2+14;\ 3+16)=16$, где s=1, $j_4(1)=2$ и оптимальный маршрут проходит через второй город.

Далее видно, при s=2 следует, что оптимальный маршрут проходит через город 5, так как $j_3(2)=5$. Продолжая рассуждения, для n=2 определяем, что оптимальный маршрут проходит через город 8 ($j_2(5)=8$). Наконец, из города 8 необходимо двигаться в конечный город 9 (место назначения). Таким образом, двигаясь от последней записи к первой, определили оптимальный маршрут (1 —2 — 5 — 8 —9), длина которого составляет $f_4(1)=16$.

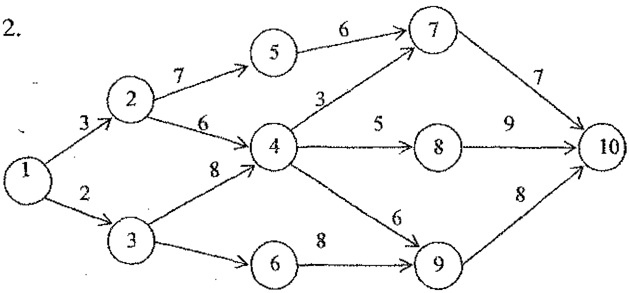
Аудиторные задания.

Найти путь минимальной длины между начальной и конечной вершинами сети (цифры, приписанные дугам сети, означают расстояния между соответствующими вершинами)

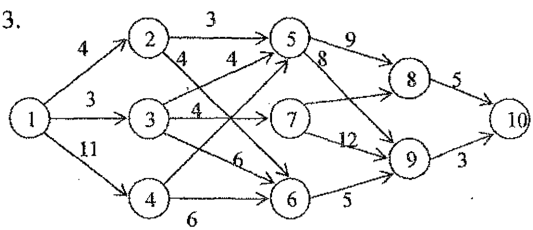
1.



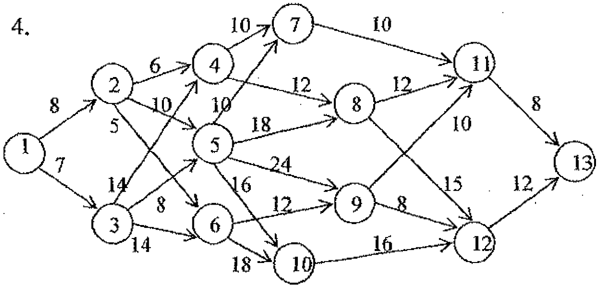
2.



3.



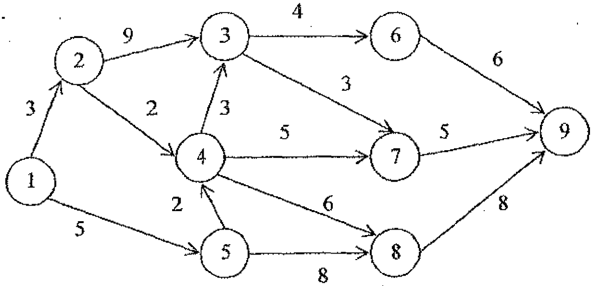
4.



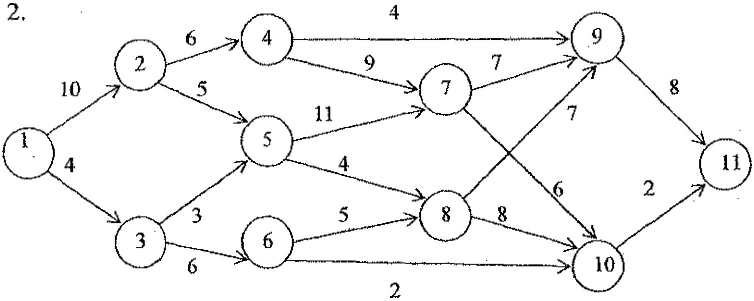
Домашние задания.

Найти путь минимальной длины между начальной и конечной вершинами сети (цифры, приписанные дугам сети, означают расстояния между соответствующими вершинами)

1.



2.



Поток на сети. Задача о максимальном потоке.

Поток на сети. Условие сохранения потока.

Определение. Транспортной сетью называется ориентированный граф G=(X, U) без петель, у которого

1) один и только один узел $I \in X$, не имеющий входящих дуг и называемый истоком,
2) один и только один узел $S \in X$, не имеющий выходящих дуг, называемый стоком,
3) каждой дуге $u \in U$ поставлено в соответствие целое число r_{ij}, называемое пропускной способностью дуги u.

Пропускная способность – это максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i, j). В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если вершины k и l на сети не соединены, то $r_{kl} = r_{lk} = 0$.

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро (i, j) в единицу времени, называется *потоком по ребру* (i, j).

Если поток из вершины i в вершину j равен x_{ij}, то поток из вершины j в вершину i будет равен $-x_{ij}$, т.е. $x_{ji} = -x_{ij}$. Кроме того, $x_{ii} = 0$.

Если поток x_{ij} по ребру (i, j) меньше его пропускной способности, т.е. $x_{ij} < r_{ij}$, то ребро (i, j) называют ненасыщенным, если же $x_{ij} = r_{ij}$, — насыщенным.

Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков по всем ребрам (i, j) сети называют *потоком по сети* или просто *потоком*.

Из физического смысла грузопотока следует, что поток по каждому ребру (i, j) не может превышать его пропускную способность, т. е.

$$x_{ij} \le r_{ij} \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right).$$

Понятно также, что для любой вершины, кроме истока I и стока S, количество вещества, поступающего в эту вершину, равно количеству вещества, вытекающего из нее. С учетом соглашения (4.1) это требование можно выразить записью

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 \quad (i \neq I, S)$$

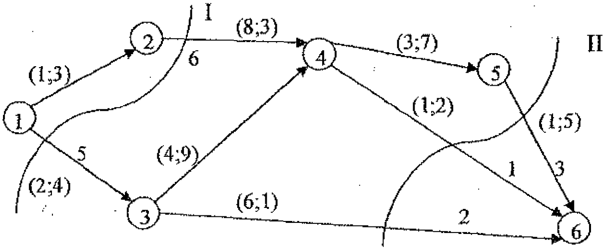
Это ограничение называют *условием сохранения потока: в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают.* Отсюда следует, что *общее количество вещества, вытекающего из истока I, совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток S*, т. е.

$$f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}$$

где j — конечные вершины ребер, исходящих из I; i — начальные вершины ребер, входящих в S. Линейную функцию f называют *мощностью потока на сети.*

Разрез на сети. Теорема Форда-Фалкерсона.

Пусть дана некоторая сеть. Разобьем множество вершин сети на два непересекающихся подмножества А и В так, чтобы исток I попал в подмножество А, а сток S — в подмножество В. В этом случае говорят, что на сети произведен разрез, отделяющий исток I от стока S. В результате произведенного разбиения вершин появятся ребра (i,j), конечные точки которых окажутся в разных подмножествах. Совокупность ребер (i,j), начальные точки которых принадлежат подмножеству А, а конечные — подмножеству В, называют разрезом сети и обозначают A/B.



На рисунке изображена сеть, на которой около каждого ребра указана его пропускная способность в обоих направлениях (в скобках) и величина потока по ребру. Стрелкой указано направление положительного потока. Кроме этого, на сети произведены два разреза: I и II. При разрезе A/B вершины сети оказались разбитыми на подмножества А = {1, 2} и В = {3, 4, 5, 6}, а ребрами, образующими разрез, стали (1, 3) и (2, 4). При разрезе II А = {1, 2, 3, 4, 5}; В = {6}, а образуют разрез ребра (3, 6), (4, 6) и (5, 6).

Величина $\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} r_{ij}$, представляющая собой сумму пропускных способностей r_{ij} всех ребер разреза, называется *пропускной способностью* разреза.

Величина $\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} x_{ij}$, представляющая собой сумму потоков x_{ij} по всем ребрам разреза, называется *потоком через разрез.*

Для разреза I пропускная способность равна $r_{13}+r_{24}=2+8=10$, а величина потока через разрез – $x_{13}+x_{24}=5+6=11$; для разреза II соответственно – 8 и 6.

Если на сети задан поток $X=\{x_{ij}\}$ и произведен разрез A/B, то хотя бы одно ребро любого полного пути, ведущего из истока I в сток S, будет обязательно принадлежать разрезу A/B. При этом величина потока по любому полному пути не превышает пропускную способность каждого его ребра, а потому величина X суммарного потока, устремленного из истока I в сток S, не может превысить пропускную способность любого разреза сети, т. е.

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} x_{ij} \le \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} r_{ij}.$$

Оказывается, если удастся построить на сети поток $X = \{x_{ij}\}$, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза A/B, то этот поток будет максимальным, а разрез A/B обладает минимальной пропускной способностью.

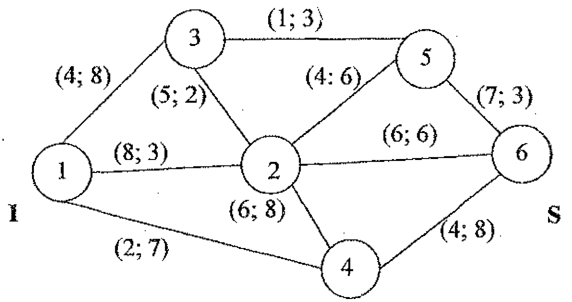
Теорема Форда - Фалкерсона. На любой сети максимальная величина потока из истока I в сток S равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего I от S.

Задача о максимальном потоке.

Постановка задачи о наибольшем потоке: при заданной конфигурации транспортной сети и известной пропускной способности дуг найти наибольшее значение потока, который может пропустить транспортная сеть, а также распределение потока по дугам транспортной сети.

Алгоритм для нахождения наибольшего потока, предложенный Фордом и Фалкерсоном, состоит в постепенном увеличении потока до тех пор, пока он не станет наибольшим. При этом предполагается, что пропускные способности дуг выражаются целыми числами.

Рассмотрим сеть, ориентированную в одном направлении от истока I к стоку S, с известными пропускными способностями r_{ij} от вершины i к вершине j.



Задача: *сформировать на сети поток максимальной мощности.* Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ потоков x_{ij} по всем ребрам (i; j) – *потоком по сети*, а функция $f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}$ (общее количество вещества, вытекающее из истока, и общее количество, втекающее в сток) – *мощность потока на сети.*

Решение задачи проведем в несколько этапов.

1). *Составим матрицу R пропускных способностей сети.* Размерность квадратной матрицы R равна числу вершин сети. Диагональные элементы ее равны нулю $\left(r_{ii}=0\right)$. Остальные элементы матрицы – пропускные способности соответствующих ребер, указанные на ребрах сети. Первое из этих чисел означает пропускную способность ребра в направлении от вершины i к вершине j, второе – в противоположном направлении. Так, например, в нашем случае $r_{24}=6,\ r_{42}=8$. Если две вершины не связаны общим ребром то пропускная способность между ними равна нулю. В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если же $r_{ij}=r_{ji}$, то в скобках на ребре указывают только одно число.

R	1	2	3	4	5	6
1	0	8	4	2	0	0
2	3	0	5	6	4	6
3	8	2	0	0	1	0
4	7	8	0	0	0	4
5	0	6	3	0	0	7
6	0	6	0	8	3	0

2). *Сформируем на сети начальный поток X* ^{0}. Числа $x^0_{ij}\left(i,j=1\div 6\right)$ должны удовлетворять всем требованиям для потоков.

Образуем в качестве начального поток X^0, в котором по пути 1 – 3 – 5 – 6 перемещается 1 единица, так как по ребру (3; 5) больше переместить нельзя (если $x_{ij}=r_{ij}$, то ребро называется *насыщенным*, в противном случае – *ненасыщенным*), 4 единицы по пути 1 – 2 – 5 – 6 (ребра (2; 5) – насыщенные) и 2 единицы по пути 1 – 4 – 6 (ребро (1; 4) – насыщенное). В результате получим следующие потоки по ребрам: $x^0_{12}=4,\ x^0_{13}=1,\ x^0_{14}=2,\ x^0_{35}=1,\ x^0_{25}=4,\ x^0_{46}=2,\ x^0_{56}=1+4=5$. Потоки по остальным ребрам равны нулю. По формуле (5) найдем мощность потока X^0 на сети

$f=x^0_{12}+x^0_{13}+x^0_{14}=x^0_{46}+x^0_{56}=4+1+2=2+5=7$ ед..

Далее следует убедиться, является ли X^0 потоком максимальной мощности.

X^0	1	2	3	4	5	6
1	0	4	1	2	0	0
2	–4	0	0	0	4	0
3	–1	0	0	0	1	0
4	–2	0	0	0	0	2
5	0	–4	–1	0	0	5
6	0	0	0	–2	–5	0

$R-X^0$	1	2	3	4	5	6
1	0	4	3	0	0	0
2	7	0	5	6	0	6
3	9	2	0	0	0	0
4	9	8	0	0	0	2
5	0	10	4	0	0	2
6	0	6	0	10	8	0

3). *Составим матрицу R – X* ^{0}*, элементы* $r_{ij}-x^0_{ij}$ *которой позволяют судить о насыщенности ребер сети.* Насыщенным ребрам будут соответствовать нули, а ненасыщенным – отличные от нуля числа. Например, ребро (1; 3) ненасыщенное, так как $r_{13}-x^0_{13}=4-1=3\neq 0$, а ребро (2; 5) насыщенное, так как $r_{25}-x^0_{25}=4-4=0$.

Зная матрицу R – X ^{0}, можно сформировать подмножество вершин, по которым можно попасть из I в S, двигаясь по ненасыщенным ребрам, а также, если поток X ^{0} не максимален, выделить полные пути из истока в сток. Тем самым увеличится мощность потока. С этой целью просматриваем первую строку матрицы R – X ^{0}. Очевидно, из вершины 1 можно попасть в вершины 2 и 3 по ненасыщенным ребрам.

Переходим к рассмотрению второй и третьей строк. Так из вершины 2 можно перейти в вершину 1 (это нас не устраивает, так как первая строка уже рассматривалась), в вершины 3, 4 и 6. По третьей строке видим, что ненулевые элементы указывают на возможность перехода только к вершинам 1 и 2, что уже не актуально. Таким образом, переходим к рассмотрению четвертой строки. И так далее.

В итоге видно, что существуют пути по ненасыщенным ребрам из истока в сток. То есть X^0 не является максимальным потоком и его мощность можно увеличить. Для этого рассмотрим один из возможных полных путей $1-2-4-6$. По нему можно пропустить поток с мощностью Δ, равной минимальной из скорректированных пропускных способностей ребер этого пути: $\Delta = \min\limits_{1-2-4-6}(4;4;2) = 2$.

Теперь для построения нового потока X^1 и его матрицы добавляем найденное $\Delta = 2$ к элементам $x_{12}^0, x_{24}^0, x_{46}^0$. Учитывая условие (1), получим матрицу нового потока, мощность которого равна $f\left(X^1\right) = 7 + 2 = 9$ ед.

X^1	1	2	3	4	5	6
1	0	6	1	2	0	0
2	–6	0	0	2	4	0
3	–1	0	0	0	1	0
4	–2	–2	0	0	0	4
5	0	–4	–1	0	0	5
6	0	0	0	–4	–5	0

$R-X^1$	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3	0	0	0
2	9	0	5	4	0	6
3	9	2	0	0	0	0
4	9	10	0	0	0	0
5	0	10	4	0	0	2
6	0	6	0	12	8	0

Видно, что поток X^1 не максимален, так как вершина 6 достижима из вершины 1 по ненасыщенным ребрам. За счет добавления нового полного пути $1-2-6$ получим поток X^2, мощность которого увеличится на величину $\Delta = \min\limits_{1-2-6}(2;6) = 2$ и станет равной $f(X^2) = 9 + 2 = 11$. Составляем матрицы:

X^2	1	2	3	4	5	6
1	0	8	1	2	0	0
2	–8	0	0	2	4	2
3	–1	0	0	0	1	0
4	–2	–2	0	0	0	4
5	0	–4	–1	0	0	5
6	0	–2	0	–4	–5	0

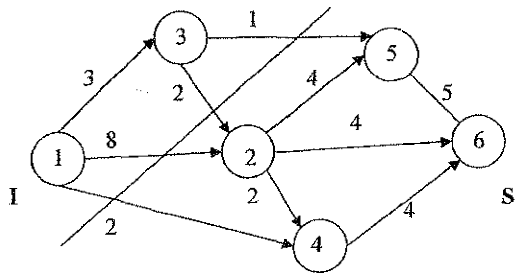
$R-X^2$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	3	0	0	0
2	11	0	5	4	0	4
3	9	2	0	0	0	0
4	9	10	0	0	0	0
5	0	10	4	0	0	2
6	0	8	0	12	8	0

За счет добавления нового полного пути $1-3-2-6$ получим поток X^2, мощность которого увеличится на величину $\Delta = \min\limits_{1-3-2-6}(3;2;4) = 2$ и станет равной $f(X^3) = 11 + 2 = 13$.

X^3	1	2	3	4	5	6
1	0	8	3	2	0	0
2	–8	0	–2	2	4	4
3	–3	2	0	0	1	0
4	–2	–2	0	0	0	4
5	0	–4	–1	0	0	5
6	0	–4	0	–4	–5	0

$R-X^3$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	11	0	7	4	0	2
3	11	0	0	0	0	0
4	9	10	0	0	0	0
5	0	10	4	0	0	2
6	0	10	0	12	8	0

Дальнейшее увеличение потока невозможно. Любой путь из I в S содержит по крайней мере одну насыщенную дугу. Таким образом, найден полный поток. X^3. Остается нанести его на сеть с указанием направления и величин потоков по отдельным ребрам.

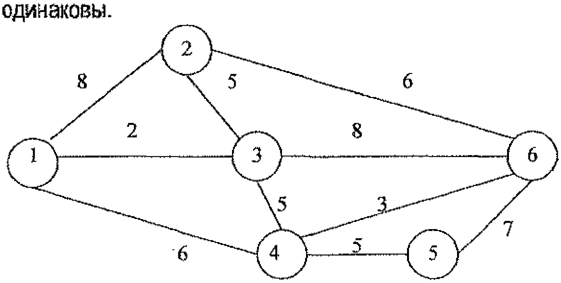


4). Проверим правильность построенного максимального потока, используя теорему Форда-Фалкерсона (максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза на сети, отделяющего исток от стока). Найдем на заданной сети разрез, пропускная способность которого совпадает с мощностью построенного максимального потока, равной 13 ед.. В соответствии с последней матрицей $R-X^3$ из вершины 1 по ненасыщенным ребрам можно попасть лишь в вершины 3. Отделим эти вершины от остальных (на сети –линия). Пропускная способность ребер разреза равна $r_{35}+r_{32}+r_{12}+r_{14}=1+2+8+2=13$ ед., что совпадает с максимальной мощностью на сети.

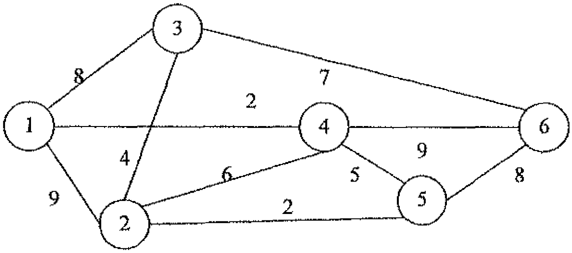
Аудиторные задания.

Найдите наибольший поток в сети, считая, что пропускные способности ребер в обоих направлениях одинаковы.

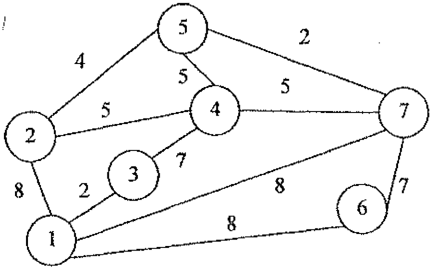
1.



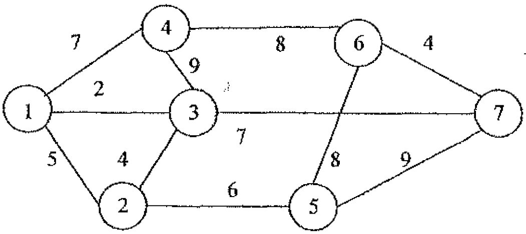
2.



3.



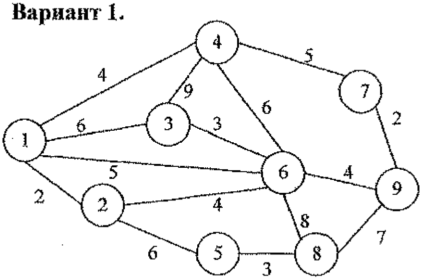
4.



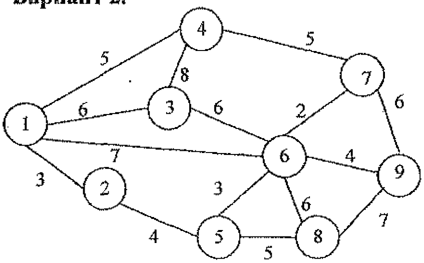
<u>Индивидуальные задания.</u>

На заданной сети сформировать поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S при условии, что пропускные способности всех ребер в обоих направлениях одинаковы.

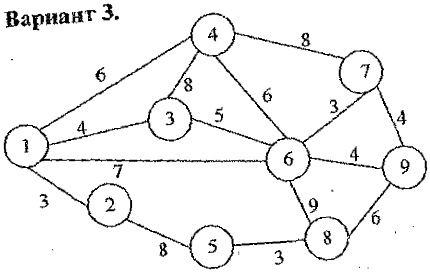
Вариант 1.



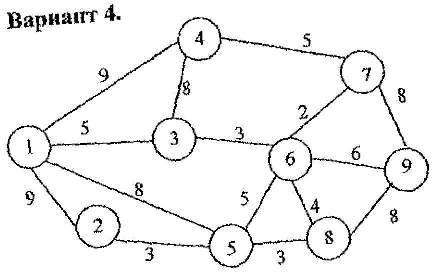
Вариант 2.



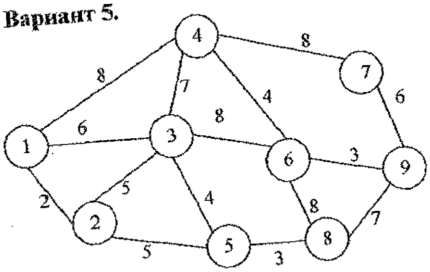
Вариант 3.



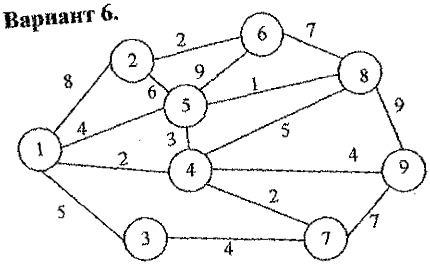
Вариант 4.



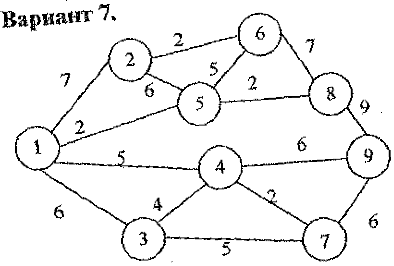
Вариант 5.



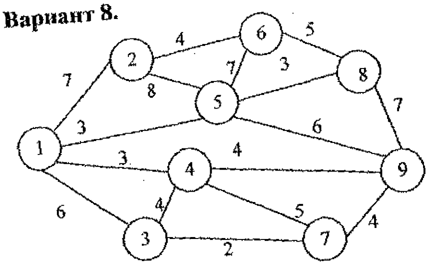
Вариант 6.



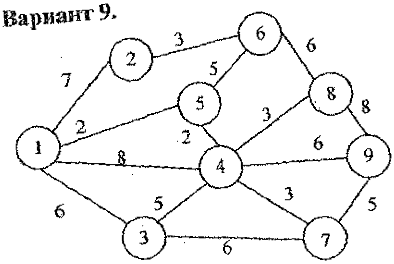
Вариант 7.



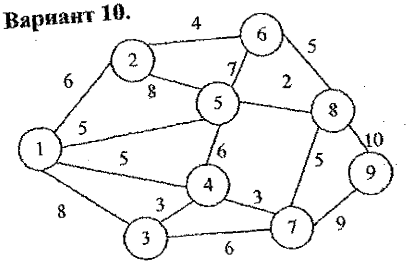
Вариант 8.



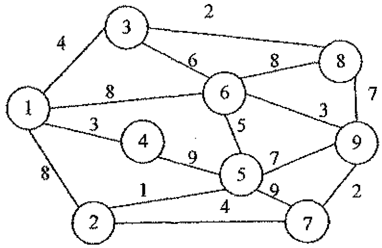
Вариант 9.



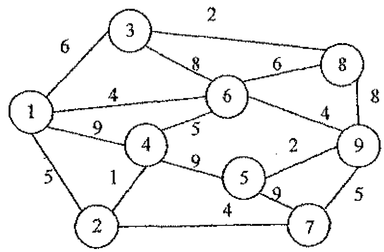
Вариант 10.



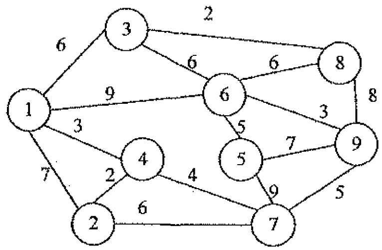
Вариант 11.



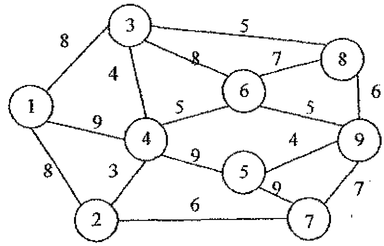
Вариант 12.



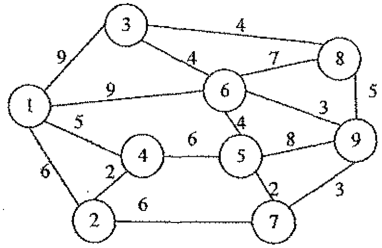
Вариант 13.



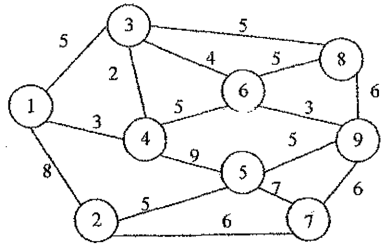
Вариант 14.



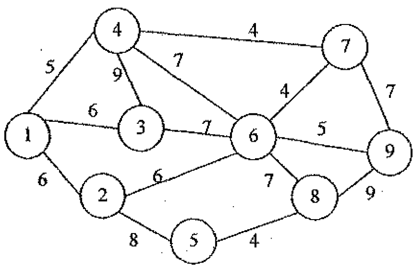
Вариант 15.



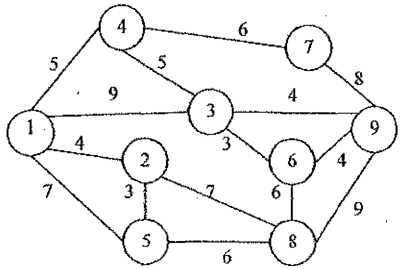
Вариант 16.



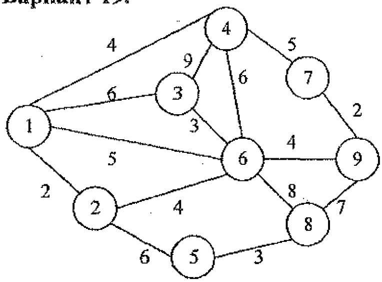
Вариант 17.



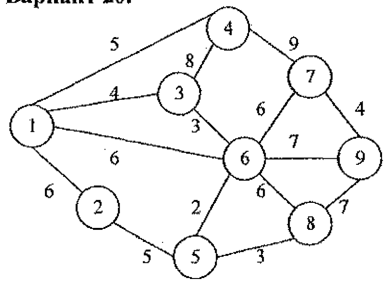
Вариант 18.



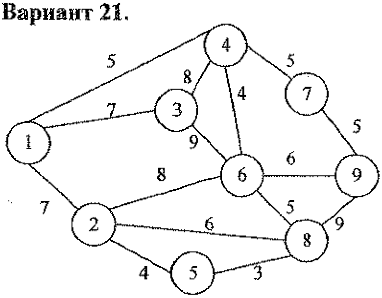
Вариант 19.



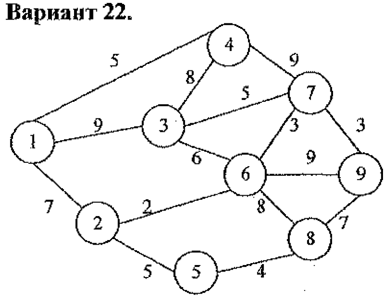
Вариант 20.



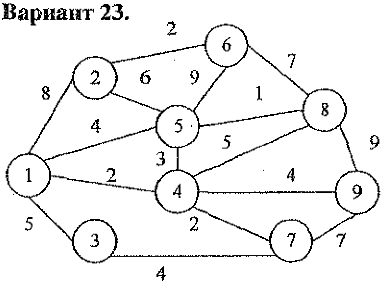
Вариант 21.



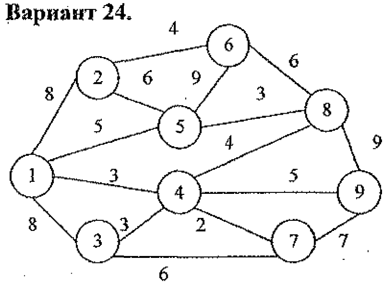
Вариант 22.



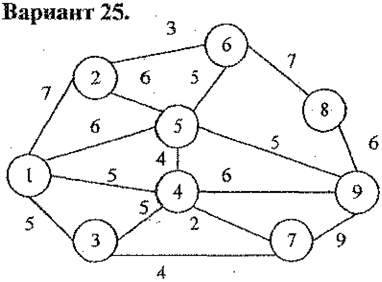
Вариант 23.



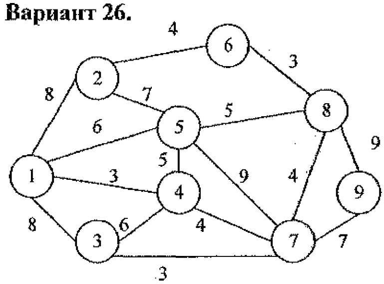
Вариант 24.



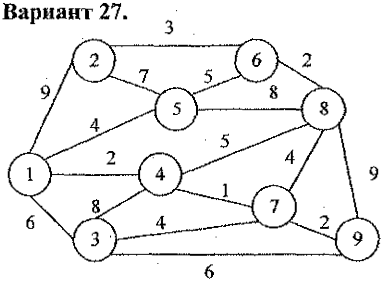
Вариант 25.



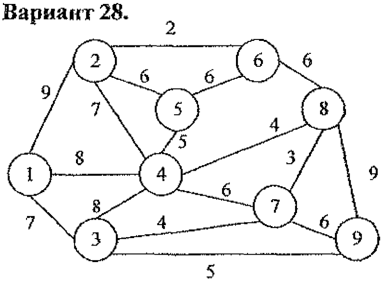
Вариант 26.



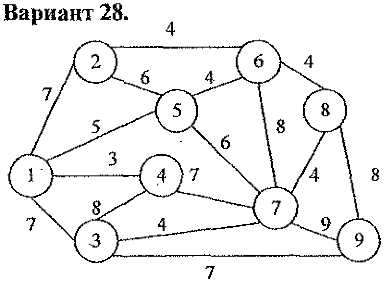
Вариант 27.



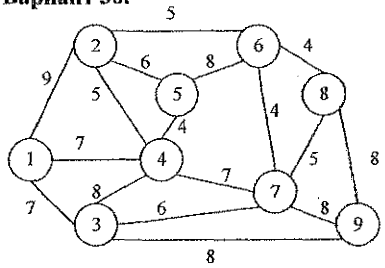
Вариант 28.



Вариант 28.



Вариант 30.



Транспортная задача.

Пусть в m пунктах производства $A_1, \ldots, A_m$ находится однородный продукт (уголь, картофель и т. д.) в количествах соответвенно $a_1, \ldots, a_m$ ед., который должен быть доставлен n потребителям $B_1, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, \ldots, b_n$ ед. Известны транспортные издержки c_{ij} (расходы), связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i $(i=\overline{1,m})$ в пункт $B_j (j=\overline{1,n})$. Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы при минимальных транспортных издержках удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет распределения всего продукта, произведенного всеми пунктами поставки.

Если суммарный запас груза совпадает с суммарным спросом, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задачу называют *закрытой*, в противном случае — *открытой*.

Для наглядности помещают все данные сформулированной выше задачи в таблицу, которую будем называть *распределительной* или *транспортной*.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество груза, планируемое к перевозке из i-го пункта поставки в j-й пункт потребления. Модель закрытой задачи имеет вид:

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad (3)$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right). \qquad (4)$$

Оптимальным будем считать план $\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn}\right)$, при котором суммарные транспортные затраты принимают минимальное значение (1). Уравнения (2) – ограничения по запасам – выражают требование, чтобы сумма всех поставок, идущих из i-го пункта, равнялась по запасам a_i груза в нем; уравнения (3) – ограничения по потребностям – чтобы сумма всех поставок, направляемых в j-й пункт, равнялась его спросу b_j. Условие (4) означает, что возврат груза не происходит.

Система ограничительных уравнений содержит mn переменных и m+n уравнений. Каждый опорный план задачи имеет m+n-1 базисных переменных и mn-(m+n-1) свободных переменных, равных нулю.

План перевозок будем строить непосредственно в транспортной таблице. Если переменная x_{ij} принимает значение a_{ij}, отличное от нуля то в соответствующую клетку (i; j) таблицы будем вписывать это значение; если же x_{ij}=0, то клетку (i; j) оставляем свободной. Каждый опорный план будет "загружать" m + n — 1 клеток, а остальные останутся свободными.

При решении транспортной задачи будем использовать прием последовательного улучшения плана, предусматривающий следующие этапы:

1) построение начального опорного плана;
2) оценка этого плана;
3) переход от имеющегося опорного плана к новому опорному плану с меньшими транспортными затратами.

Рассмотрим способы построения начального опорного плана. Составить опорный план можно различными способами. Однако для всех способов непременным является требование, чтобы в процессе заполнения распределительной таблицы в каждую загружаемую клетку вписывалась максимально возможная по величине поставка. В таком случае каждый раз будет либо исчерпываться весь запас груза у поставщика (мы будем говорить: "закрывается строка"), либо полностью удовлетворяться спрос потребителя ("закрывается столбец"). Соблюдение этого требования обеспечит заполнение именно m+n-1 клеток.

Способ "северо-западного угла". Первой загружается клетка (1; 1). Если закрывается строка, то следующей загружается клетка (2; 1); если же закрывается столбец, то следующей загружается клетка (1;2). Итак, каждый раз загружается клетка, соседняя либо по строке, либо по столбцу (в зависимости от конкретных данных задачи). Последней будет загружена клетка (m; n). В результате загруженные клетки расположатся вдоль диагонали (1; 1) — (m; n), поэтому способ "северо-западного угла" называют еще диагональным способом.

<u>Способ "минимального элемента".</u> Первой в распределительной таблице загружается клетка с наименьшим тарифом. Далее загружается клетка той же строки (столбца) со следующим по величине тарифом и т. д.

Поскольку при заполнении таблицы учитываются величины тарифов, то, как правило, построенный план оказывается ближе к оптимальному, нежели построенный способом "северо-западного угла".

Оптимальный план транспортной задачи находится в результате упорядоченного преобразования одного опорного плана в другой так, что транспортные расходы после каждого преобразования уменьшаются.

Потенциалами u_i и v_j соответственно *поставщиков* A_i и *потребителей* B_j являются компоненты оптимального плана задачи

$$\max\ \varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\,; \qquad (5)$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \qquad (6)$$

$$u_i,\ v_j \ \text{–произвольного знака,} \qquad (7)$$

двойственной к задаче (1) –(4).

В модели (5) — (7) переменные u_i отвечают ограничениям по запасам (2), а v_j — ограничениям по потребностям (3).

Если (x^*_{ij}) — оптимальный план задачи (1) — (4), а $(u^*_i;\ v^*_j)$ — соответствующий оптимальный план задачи (5) — (7), то, каждому x^*_{ij} > 0 соответствует равенство

$$u^*_i + v^*_j = c_{ij}\ , \qquad (8)$$

а каждому x^*_{ij}=0 отвечает неравенство

$$u^*_i + v^*_j \le c_{ij}\ . \qquad (9)$$

В соответствии с введенным понятием потенциалов и с учетом связей между моделями двойственных задач каждому поставщику (ограничению по запасам) поставим в соответствие потенциал u_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$, а каждому потребителю (ограничению по спросу) — потенциал v_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Таким образом в распределительной таблице для каждой загруженной клетки выполняется равенство $u_i + v_j = c_{ij}$ а для каждой свободной клети — неравенство $u_i + v_j \le c_{ij}$. Пользуясь этим утверждением, можно определить потенциалы: достаточно по загруженным клеткам составить систему уравнений типа $u_i + v_j = c_{ij}$ и решить ее. Правда, эта система является неопределенной, поскольку содержит m+n-1 уравнений с m+n неизвестными. Для ее решения одну из неизвестных (любую) фиксируют, придавая ей определенное числовое значение (любое). На результат исследования опорного плана на оптимальность это никак не влияет. Для облегчения расчетов одному из потенциалов придают обычно значение, равное нулю.

Для исследования плана на оптимальность по каждой свободной клетке проверяется условие $u_i + v_j \le c_{ij}$. Если хотя бы одна свободная клетка не удовлетворяет данному условию, то опорный план не является оптимальным, его можно улучшить за счет загрузки этой клетки. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной для загрузки является клетка, для которой разность (оценка) между тарифом клетки и суммой потенциалов наибольшая, т. е.

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} < 0.$$

Если для всех свободных клеток оценки $\Delta_{ij} < 0$, то опорный план перевозок является оптимальным.

Итак, если для опорного плана перевозок указанное условие оптимальности не выполняется, то за счет загрузки свободной клетки с отрицательной оценкой план перевозок улучшается. Для наиболее перспективной свободной клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписываются знаки: свободной клетке — плюс, следующей по часовой или против часовой стрелки занятой клетке — минус, следующей — снова плюс и т.д. Из поставок в клетках цикла с "отрицательными" вершинами выбирается наименьшее количество груза, которое и перемещается по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в положительных вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушится

В общем случае цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом. Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Цикл включает одну свободную клетку, остальные клетки цикла заняты. В цикле всегда четное число клеток. Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Цикл строится лишь для свободной клетки.

Ниже приведен алгоритм метода потенциалов.

1. *построить начальный опорный план.*
2. *вычислить потенциалы u_i и v_j поставщиков и потребителей посредством решения системы уравнений типа* $u_i + v_j = c_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.
3. *вычислить оценки Δ_{ij} свободных клеток по формуле* $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

   Если оценки всех свободных клеток неположительные, то исследуемый план является оптимальным и остается подсчитать транспортные расходы. Если же среди оценок есть положительные, то следует выбрать клетку с наибольшей положительные оценкой и перейти к следующему пункту алгоритма.
4. *загрузить выделенную в предыдущем пункте свободную клетку, и получив таким образом новый опорный план, возвратиться к п. 2 алгоритма.*

Замечание. Если в п. 3 все оценки отрицательные, то существует единственный оптимальный план. Если же среди неположительных оценок имеется хотя бы одна нулевая, то задача имеет множество оптимальных планов.

<u>Пример.</u> Составить реализуемый за минимальное время план перевозок груза от

поставщиков A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ к потребителям B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, при котором спрос удовлетворяется полностью, если известны запасы груза a_i, спрос b_j время c_{ij} доставки груза по маршруту $A_i - B_j$.

	B1	B2	B3	B4	a
A1	19	21	15	11	203
A2	14	17	19	13	231
A3	10	13	12	15	116
bj	90	133	152	175	550 / 550

Решение.

Краткие пояснения к условию задачи.

В первом столбце таблицы указаны n = 3 поставщиков некоторого груза (A_1, A_2, A_3), имеющегося у них соответственно в количествах a_i,- (см. последний столбец), а m=4 потребителям (B_1, B_2, B_3) этот груз требуется в количествах b_j(см. последнюю строку). На пересечении строк A_i и столбцов B_j стоят стоимости c_{ij}. перевозки единицы груза от i-того поставщика к j-тому потребителю. В конце последней строки и последнего столбца подсчитаны соответственно общие потребности $\sum b_j$ и общие запасы груза $\sum a_i$. В нашем случае они совпадают, а это значит, что все заказы будут выполнены, а от поставщиков весь груз будет вывезен. То есть мы имеем закрытую модель транспортной задачи.

1). Для *составления математической модели* задачи обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого от A_i к B_j. Требуется распределить перевозки груза так, чтобы общие затраты на них были минимальны:

$$\text{найти} \qquad \min f(X)=\sum_i\sum_j c_{ij}\cdot x_{ij}$$

при ограничениях: а) по потребителям: (каждый заказ будет выполнен)

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=90, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=133, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=152, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=175, \end{cases}$$

а) по поставщикам: (все грузы будут вывезены)

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=203, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=231, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=116, \end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3,4.$$

Последнее условие означает, что перевозки осуществляются только от поставщиков к потребителям (обратных перевозок нет).

2). *Составление первоначального опорного плана.*

Опорный план транспортной задачи имеет n + m-1 =3+4-1=6 базисных переменных, которые записывают в соответствующие внутренние клетки таблицы. Остальные клетки свободных переменных, равных нулю, оставляют пустыми. Рассмотрим метод северо-западного угла, согласно которому вначале определяем $x_{11} = \min(a_1,\ b_1) = \min(203,\ 90) = 90$. При этом уменьшаем на 90 единиц запас первого поставщика и вычеркиваем потребность первого потребителя (остальные клетки перевозок к нему будут свободными). Получим таблицу. В верхних углах внутренних клеток мелким шрифтом записаны стоимости c_{ij}:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19 **90**	21	15	11	~~203~~ 113
A_2	10	13	12	15	116
A_3	14	17	19	13	231
b_j	~~90~~ 0	133	152	175	

В оставшейся части таблицы «северо-западная» клетка расположена в первой строке и во втором столбце. Аналогично находим соответствующий ей минимум потребности и оставшегося запаса $x_{12} = \min(a_1',\ b_2) = \min(113,\ 133) = 113$. Значит, запасы первого поставщика исчерпаны, и остальные клетки первой строки будут свободными. Теперь получим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19 **90**	21 **113**	15	11	~~203~~ ~~113~~ 0
A_2	10	13	12	15	116
A_3	14	17	19	13	231
b_j	~~90~~ 0	~~133~~ 20	152	175	

Следующая «северо-западная» клетка расположена во второй строке и втором столбце. Продолжая аналогично, получим таблицу перевозок с первоначальным планом. Последней будет заполнена «юго-восточная» клетка.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19 **90**	21 **113**	15	11	~~203~~ ~~113~~ 0
A_2	10	13 **20**	12 **96**	15	~~116~~ ~~96~~ 0
A_3	14	17	19 **56**	13 **175**	~~231~~ 175
b_j	~~90~~ 0	~~133~~ ~~20~~ 0	~~152~~ ~~56~~ 0	~~175~~ 0	

По этому плану X_0 осуществляются следующие перевозки: от A_1 к B_1 - 90 единиц и к

B_2 - 113 единицу груза, от A_2 к B_2 — 20 единицы и к B_3 - 96 единиц, от A_3 к B_3 — 56 единицы и к B_4 — 175 единиц груза. Общая стоимость их будет равна $f(X_0) = 19 \cdot 90 + 21 \cdot 113 + 13 \cdot 20 + 12 \cdot 96 + 19 \cdot 56 + 13 \cdot 175 = 8834$ денежных единиц.

3). *Для проверки на оптимальность полученного опорного плана применим так называемый метод потенциалов* (иначе, модифицированный распределительный метод - МОДИ). Каждому поставщику A_i, и каждому потребителю B_j приписываются соответственно числа u_i и v_j, называемые их потенциалами.

	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19 **90**	21 **113**	15	11	$u_1 = 0$
A2	10	13 **20**	12 **96**	15	$u_2 = -8$
A3	14	17	19 **56**	13 **175**	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 19$	$v_2 = 21$	$v_3 = 20$	$v_4 = 14$	

Для базисных перевозок рассматриваемого опорного плана должны выполняться равенства $u_i + v_j = c_{ij}$. В нашем случае получим систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 19, \\ u_1 + v_2 = 21, \\ u_2 + v_2 = 13, \\ u_2 + v_3 = 12, \\ u_3 + v_3 = 19, \\ u_3 + v_4 = 13. \end{cases}$$

Так как число потенциалов на единицу меньше, чем число уравнений полученной системы, то один из них выбирают произвольно. Например, $u_1 = 0$. Тогда из системы легко получим: $v_1 = 19$, $v_2 = 21$, $u_2 = -8$, $v_3 = 20$, $u_3 = -1$, $v_4 = 14$. После этого для всех свободных клеток подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то опорный план оптимален, если нет, то можно перейти к новому опорному плану с меньшим значением функции цели.

В нашем случае

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= \ 0 + 20 - 15 = \ 5, \ (\max) \\ \Delta_{14} &= \ 0 + 14 - 11 = \ 3, \\ \Delta_{21} &= -8 + 19 - 10 = \ 1, \\ \Delta_{24} &= -8 + 14 - 15 = -9, \\ \Delta_{31} &= -1 + 19 - 14 = \ 4, \\ \Delta_{32} &= -1 + 21 - 17 = \ 3. \end{aligned}$$

План X_0 не оптимален.

4). *Переход к новому опорному плану* связан с введением перевозки с наибольшим

$\Delta_{13} = 5$ в число базисных перевозок. Построим цикл пересчета свободной клетки (1; 3). Он представляет собой замкнутую ломаную линию, одна вершина которой лежит в выбранной клетке, а остальные в базисных клетках. При этом вершинам цикла поочередно приписываются знаки «плюс» или «минус», начиная со знака «плюс» у выбранной свободной клетки. Если в клетках со знаком «плюс» добавить, а со знаком «минус» отнять одно и тоже число, сохраняя неотрицательность переменных, то получим допустимый план перевозок. Чтобы план был опорным, это должна быть минимальная из перевозок, стоящих в клетках со знаком «минус». Минимум в отрицательных клетках равен 20. Проводим

X_0	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19 **90**	21 − **113**	15 +	11	0
A2	10	13 + **20**	12 − **96**	15	−8
A3	14	17	19 **56**	13 **175**	−1
v_j	19	21	20	14	

изменения вдоль цикла на эту величину. Получим новый опорный план X_1, в котором клетка (1; 2) станет свободной (см. ниже). Вычислим общую стоимость $f(X_1) = 19\cdot 90 + 21\cdot 17 + 15\cdot 96 + 13\cdot 116 + 19\cdot 56 + 13\cdot 175 = 8354$. Обратите внимание на то, что изменение общей стоимости равно 8834 – 8354 =480 = $\Delta_{13}\cdot 96 = 5\cdot 96$.

Аналогично проверим на оптимальность план X_1.

X_1	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19 − **90**	21 **17**	15 + **96**	11	0
A2	10	13 **116**	12	15	−8
A3	14 +	17	19 **56** −	13 **175**	4
v_j	19	21	15	9	

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 19, \\ u_1 + v_2 = 21, \\ u_1 + v_3 = 15, \\ u_2 + v_2 = 13, \\ u_3 + v_3 = 19, \\ u_3 + v_4 = 13. \end{cases}$$

Положив $u_1 = 0$, находим остальные потенциалы. Далее :

$$\Delta_{14} = 0 + 9 - 11 = -2,$$
$$\Delta_{21} = -8 + 19 - 10 = 1,$$
$$\Delta_{23} = -8 + 15 - 12 = -5,$$
$$\Delta_{24} = -8 + 9 - 15 = -14,$$
$$\Delta_{31} = 4 + 19 - 14 = 9, \ (\max)$$
$$\Delta_{32} = 4 + 21 - 17 = 8.$$

План X_1 не оптимален. Вводим в базисные клетку (3; 1). Аналогично получим опорный план X_2, для которого $f(X_2) = 19\cdot 34 + 21\cdot 17 + 15\cdot 152 + 13\cdot 116 + 14\cdot 56 + 13\cdot 175 = 7850$ Составление системы для потенциалов и их вычисление представляем читателю сделать самостоятельно. После этого вычисляем оценки:

X_2	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19 − **34**	21 **17**	15 **152**	11 +	0
A2	10	13 **116**	12	15	−8
A3	14 **56** +	17	19	13 **175** −	−5
v_j	19	21	15	9	

$\Delta_{14} = \ 0+18-11 = \ 7, \ (\max)$

$\Delta_{21} = -8+19-10 = \ 1,$

$\Delta_{23} = -8+15-12 = -5,$

$\Delta_{24} = -8+18-15 = -5,$

$\Delta_{32} = -5+21-17 = -1,$

$\Delta_{33} = -5+15-19 = \ 1.$

Минимум по отрицательным клеткам равен 32. После пересчета по циклу получим новый опорный план X_3, для которого $f(X_3) = 21 \cdot 17 + 15 \cdot 152 + 11 \cdot 34 + 13 \cdot 116 + 14 \cdot 90 + 13 \cdot 141 = 7612$ (см. таблицу ниже). Вычислим оценки:

X_3	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19	21 **17**	15 **152**	11 + **34**	0
A2	10	13 **116**	12	15	−8
A3	14 **90**	17 +	19	13 − **141**	2
v_j	12	21	15	11	

$\Delta_{11} = \ 0+12-19 = -7,$

$\Delta_{21} = -8+12-10 = -6,$

$\Delta_{23} = -8+15-12 = -5,$

$\Delta_{24} = -8+11-15 = -12,$

$\Delta_{32} = \ 2+21-17 = \ 6, \ (\max)$

$\Delta_{33} = \ 2+15-19 = -2.$

Строим цикл для клетки (3; 2) и переходим к новому опорному плану. Делаем сдвиг по циклу на 17 ед. Подсчитываем потенциалы и оценки для плана X_4.

X_4	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19	21	15 − **152**	11 + **51**	0
A2	10	13 − **116**	12 +	15	−2
A3	14 **90**	17 **17** +	19	13 **124** −	2
v_j	12	15	15	11	

$\Delta_{11} = \ 0+12-19 = -7,$

$\Delta_{12} = \ 0+15-21 = -6,$

$\Delta_{21} = -2+12-10 = \ 0,$

$\Delta_{23} = -2+15-12 = \ 1, \ (\max)$

$\Delta_{24} = -2+11-15 = -6,$

$\Delta_{33} = \ 2+15-19 = -2.$

После пересчета по циклу получим новый опорный план X_5. Вычислим оценки:

X_5	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	19	21	15 **36**	11 **167**	0
A2	10	13	12 **116**	15	−3
A3	14 **90**	17 **133**	19	13 **8**	2
v_j	12	15	15	11	

$\Delta_{11} = \ 0+12-19 = -7,$

$\Delta_{12} = \ 0+15-21 = -6,$

$\Delta_{21} = -3+12-10 = -1,$

$\Delta_{22} = -3+15-13 = -1,$

$\Delta_{24} = -3+11-15 = -6,$

$\Delta_{33} = \ 2+15-19 = -2.$

Так как все $\Delta_{ij} \le 0$, то план X_5

оптимален и $f_{\min} = f(X_5) = 15 \cdot 36 + 11 \cdot 167 + 12 \cdot 116 + 14 \cdot 90 + 17 \cdot 133 + 13 \cdot 8 =$ 7394. По этому плану следует перевезти от A_1 к B_3 363 ед. и к B_4 167 ед., от A_2 к B_3 116 ед., от A_3 к B_1 90 ед., к B_2 133 ед. и к B_4 8 единиц груза.

Аудиторные задания.

Составить реализуемый за минимальное время план перевозок груза от поставщиков A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ к потребителям B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, при котором спрос удовлетворяется полностью, если известны запасы груза a_i, спрос b_j время c_{ij} доставки груза по маршруту $A_i - B_j$.

1.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	22	15	18	202
A_2	15	25	27	24	154
A_3	10	20	26	20	217
b_j	112	165	150	146	

2.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	152
A_2	7	10	12	6	173
A_3	8	11	7	8	175
b_j	93	116	126	165	

3.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	148
A_2	8	9	12	4	166
A_3	6	4	9	11	186
b_j	120	131	104	145	

4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	141
A_2	5	9	11	4	177
A_3	10	6	8	9	182
b_j	81	102	174	143	

Домашние задания.

Составить реализуемый за минимальное время план перевозок груза от поставщиков A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ к потребителям B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, при котором спрос удовлетворяется полностью, если известны запасы груза a_i, спрос b_j время c_{ij} доставки груза по маршруту $A_i - B_j$.

1.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13	12	9	6	201
A_2	12	11	14	8	154
A_3	9	9	12	11	245
b_j	123	171	132	174	

2.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	13	8	4	216
A_2	9	11	13	7	148
A_3	11	9	6	14	236
b_j	164	136	193	107	

Сетевое планирование.

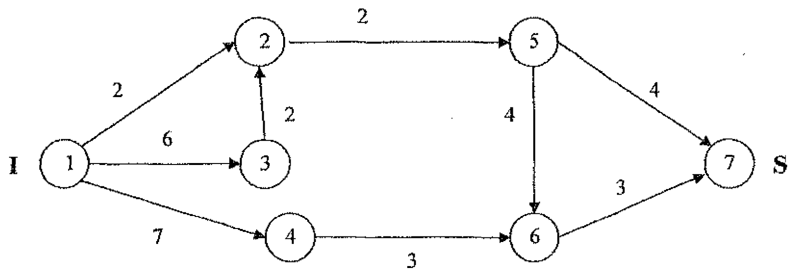
Предположим, что строится какой-либо объект, например, завод. При этом выполняется сложный комплекс работ, различных участки которого поручаются отдельным организациям, бригадам, цехам. Возникает много проблем: как наилучшим образом организовать отдельные работы, чтобы строительство закончить в кратчайший срок, как распределить рабочую силу, материалы, финансы, оборудование, чтобы себестоимость строительства была минимальной, какой участок в данный момент является самым ответственным и др. Чтобы успешно решить эти проблемы одной интуиции руководителя недостаточно, необходимы знания по сетевому проектированию.

Намеченный комплекс работ для достижения некоторой цели называется *проектом*. Это может быть строительство некоторого объекта, дела на неделю, год и т.д.

Проект расчленяется на отдельные виды работ, каждый вид требует затрат, времени. Некоторые работы могут выполняться только в определенном порядке. Некоторые работы можно выполнять одновременно, независимо друг от друга.

Каждому событию поставим в соответствие вершину, а работе - ориентированное ребро, получим некоторый граф. Над ребрами проставим время, необходимое для завершения соответствующей работы, получим так называемую сеть. Изображение такой сетки называемся сетевым графиком. Сетевой график является графической моделью всего комплекса работ.

На рисунке изображен сетевой график некоторого комплекса работ



В основе сетевого графика лежат три основных понятия: работа, событие, путь. Под работой понимается:

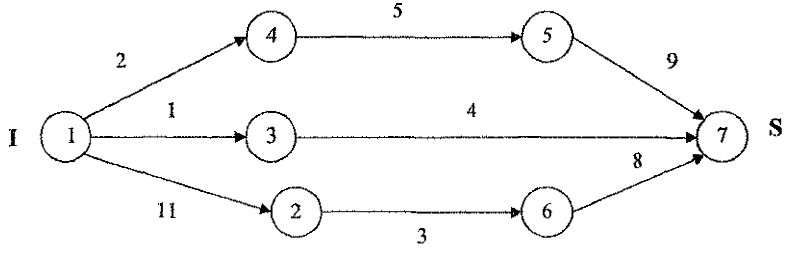
1) действительная работа - процесс, требующий затрат труда и времени (монтаж здания, побелка потолков, ...)
2) ожидание - процесс, не требующий затрат труда, а только времени (твердение бетона, сушка штукатурки, ...)
3) фиктивная работа - условная зависимость между событиями, вводится для удобства сети не требует затрат ни труда, ни времени (изображается на сетевом графике штриховыми стрелками).

Под событием в сетевом планировании понимается:

1) исходное событие - начало выполнения работы,

2) завершающее событие - достижение конечной цели,
3) промежуточное событие - результат выполнения одной или нескольких работ,

Пусть сетевой график некоторого проекта построен (см. ниже). Время выполнение отдельных работ измерено в неделях. За какое время можно выполнить все работы?



Путь в сети от исходного события до завершающего называются *полным путем* L. Время, необходимое для выполнения всех работ L, называется *продолжительностью пути* t(L).

В сетевом графике на рисунке от исходного события к завершающему ведут три пути: L_1 – (1, 4), (4, 5), (5,7); L_2 – (1, 3), (3, 7); L_3 – (1, 2), (2, 6), (6, 7).

Их продолжительности: соответственно 16, 5 и 22.

Продолжительность самого неблагоприятно пути равна 22 неделям. Следовательно, соответствующий проект не может быть реализован ранее, чем за 22 недели.

Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется *критическим путем*.

Ранним сроком $t_p(j)$ *свершения события* j назовем самый ранний момент времени, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

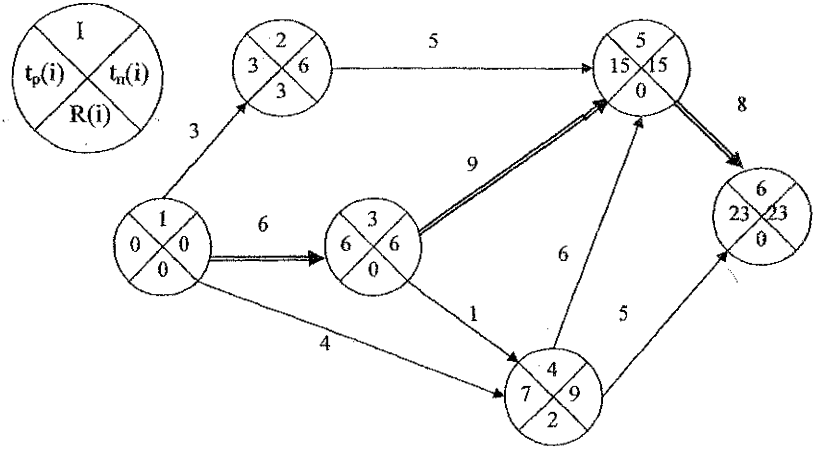
$$t_p(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+}\left(t_p(i) + t(i, j)\right),$$

где U_j^+ — множество работ, входящих в j-е событие, $t_p(j)$ – ранний срок свершения начального события работы (i, j); $t(i, j)$ — продолжительность работы (i, j).

Итак, если событием j заканчивается одна работа (i, j), то $t_p(j)$ равен сумме $t_p(i)$ — раннего срока свершения ее начального события — и $t(i, j)$ — продолжительности этой работы; если же событием j заканчивается несколько работ, то по каждой работе находится свой ранний срок, а искомым $t_p(j)$ будет максимальный из них.

Рассмотрим, как находить критический путь на примере сетевого графика (см. далее).

Кружки, которыми обозначены события, разделим на четыре сектора. В нижнем



секторе проставим номера событий. В левой части будем ставить наиболее ранний срок наступления каждого события j $t_p(j)$. Срок наступления исходного события 1 обозначим нулем. От события 1 к событию 2 ведет лишь один путь, поэтому $t_p(2)$=3. От события 1 к событию 3 также ведет один путь, $t_p(3)$=6.

К событию 4 ведут два ребра (1, 4) и (3, 4), $t_p(4)= \max\left(t_p(1)+4,\ t_p(3)+1\right) = \max(0+4,\ 6+1)=7$. Это значит, событие 4 нельзя ожидать раньше, чем через 7 недель.

К событию 5 ведут три ребра (2, 5), (3, 5), (4,5), $t_p(5)= \max\left(t_p(2)+5,\ t_p(3)+9,\ t_p(4)+6\right) = \max\left(3+5,\ 6+9,\ 7+6\right)$=15.

Далее $t_p(6)=\max(7+5,\ 15+8)$=23.

Число 23 - время выполнения всего проекта. Путь, соответствующий этому времени, - последовательность ребер (1, 3), (3, 5), (5, 6). Работы, ее соответствующие ребрам этого пути, называются *критическими*. Задержка одной из этих работ вызовет запаздывание всего проекта.

Некритические работы допускают некоторое заиливание в их выполнении. Для некритических событий можно определить некоторый интервал времени, в течение которого наступление данного события не повлияет на время завершения всего проекта.

Поздний срок наступления события - самый поздний срок наступления события, при котором планируемый срок окончания проекта не меняется. Обозначим его $t_п(i)$.

Для завершающего события $t_п(S)=t_p(S)$.

Рассмотрим, как находить поздние сроки наступления событий на примере сетевого графика на рисунке. При их определении надо двигаться по сетевому графику от завершающего события к исходному. Поздние сроки будем проставлять в правых частях секторов на рисунке.

Для события 6 $t_п(6)$=23. Событие 5 может начинаться не позднее чем за 8 недель до события 6. Тогда поздний срок наступления события 5 равен 23-8 = 15.

Событие 4 может начаться не позже чем за 5 недель до события 6 и за 6 недель до события 5. Таким образом, поздний срок наступления события 4 равен наименьшей из разностей 23 – 5=18 и 15 - 6 =9, $t_n(4)$=9.

Аналогично, рассматривая событие 3, найдем, что $t_n(3)$ =6. Для события 2 $t_n(2)$=6. Поздний срок наступления события 1 равен 0.

Для событий, лежащих на критическом пути, ранние и поздние сроки наступления событий совпадают.

Разность между поздними и ранними сроками наступления события определяет резерв времени этого события.

$$R(i)=t_n(i)-t_p(i)$$

Для нашей задачи $R(2)=$ 6-3=3, $R(4)=$ 9-7=2. Резерв времени будем проставлять в нижних частях секторов на рисунке.

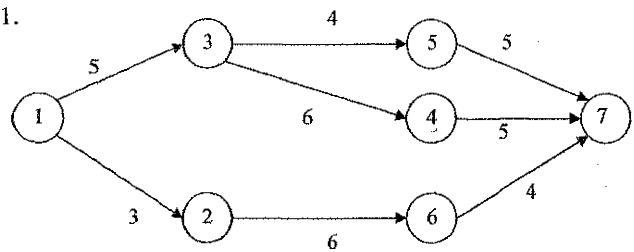
Резерв $R(i)$ показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без изменения срока наступлении завершающего события S. Понятно, что у критических событий ранние и поздние сроки свершения совпадают, так что резерв времени у них равен нулю.

Аудиторные задания.

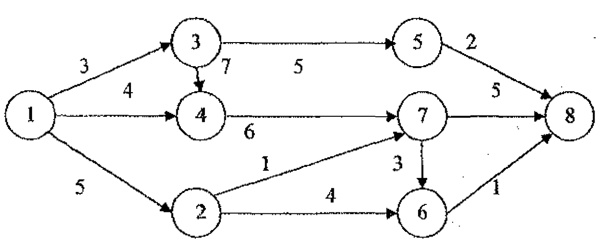
По сетевому графику определите

1) ранние сроки наступления событий
2) критический путь
3) поздние сроки наступления событий и резервы времени

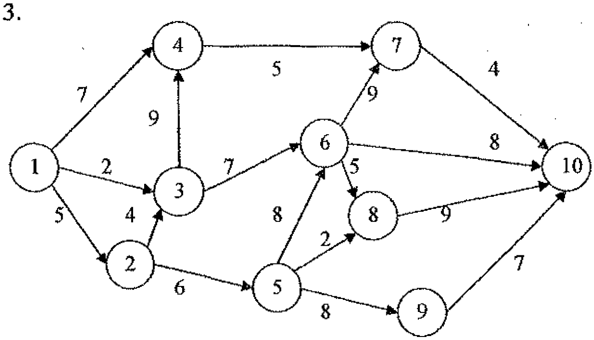
1.



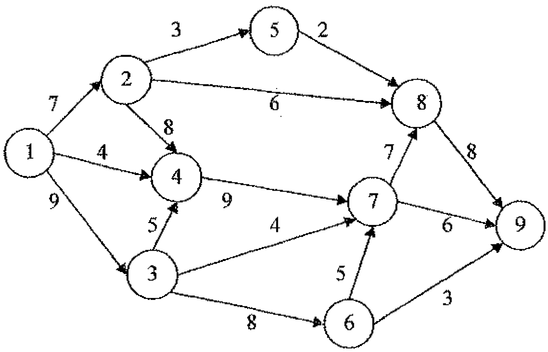
2.



3.



4.

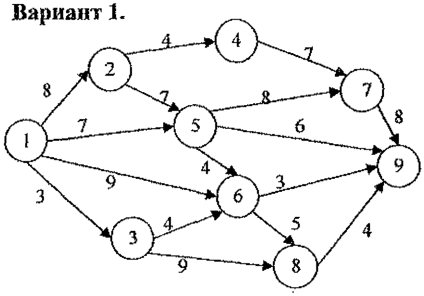


Индивидуальные задания.

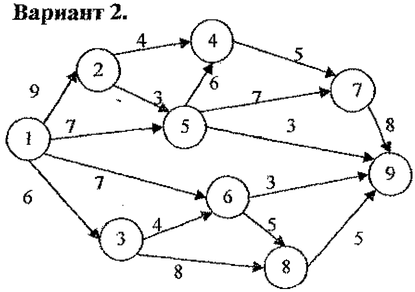
По сетевому графику определите

1) ранние сроки наступления событий
2) критический путь
3) поздние сроки наступления событий и резервы времени.

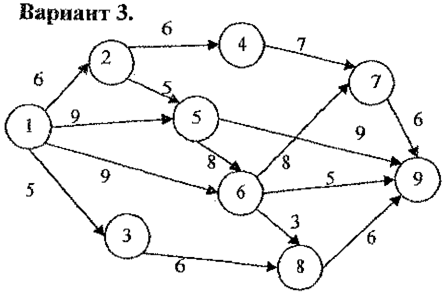
Вариант 1.



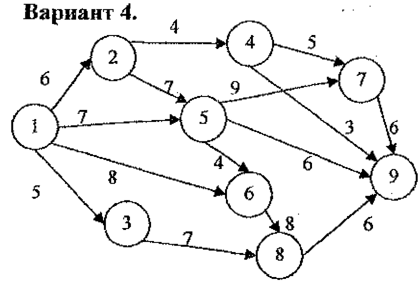
Вариант 2.



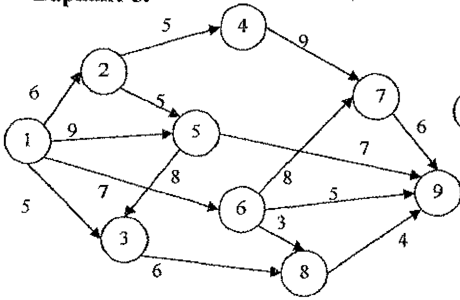
Вариант 3.



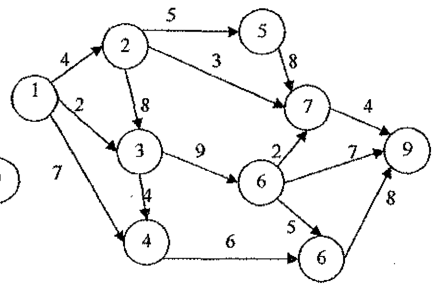
Вариант 4.



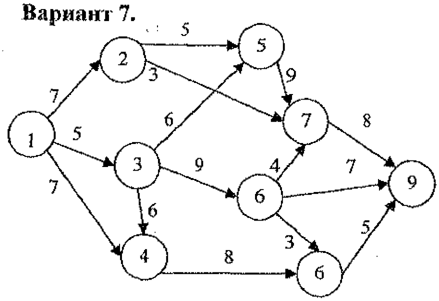
Вариант 5.



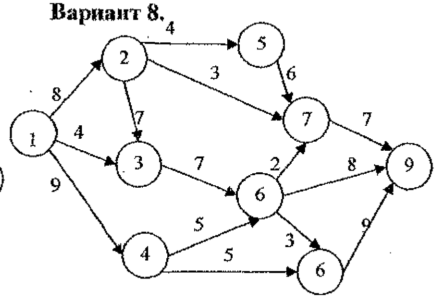
Вариант 6.



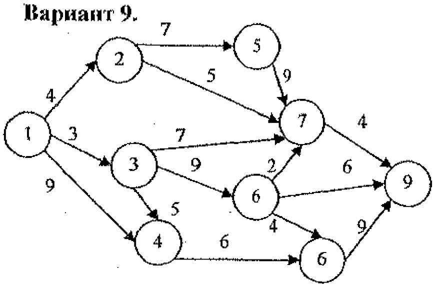
Вариант 7.



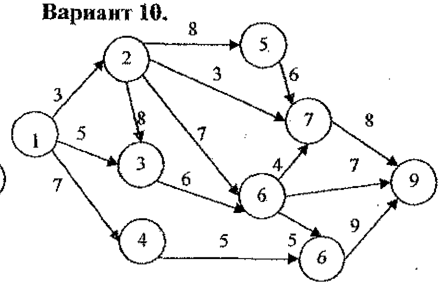
Вариант 8.



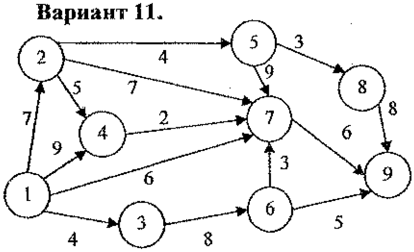
Вариант 9.



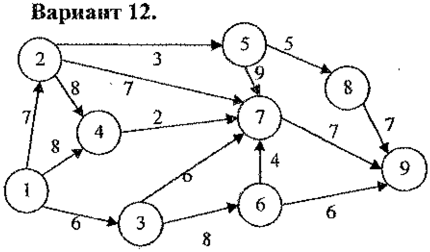
Вариант 10.



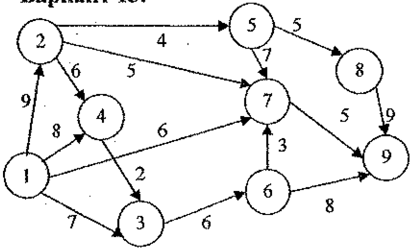
Вариант 11.



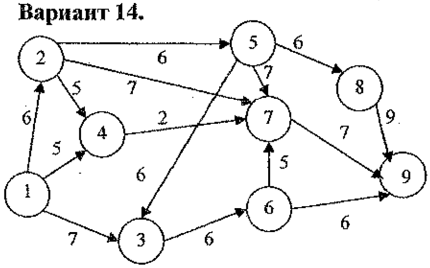
Вариант 12.



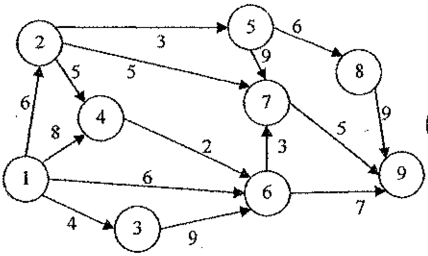
Вариант 13.



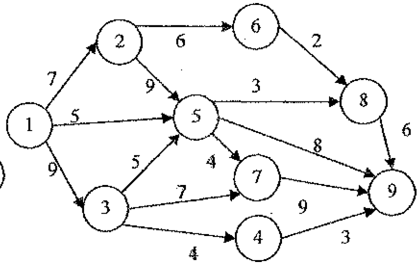
Вариант 14.



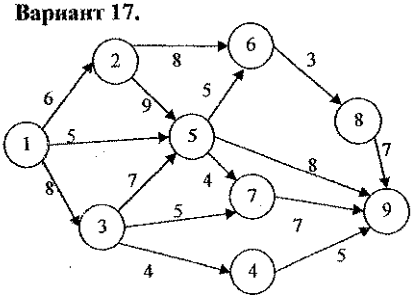
Вариант 15.



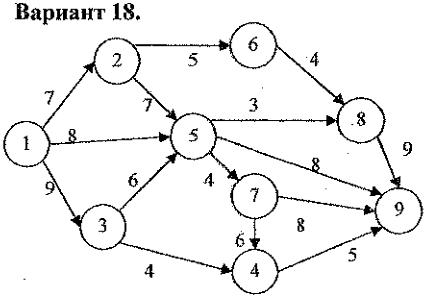
Вариант 16.



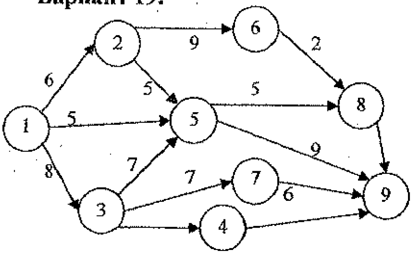
Вариант 17.



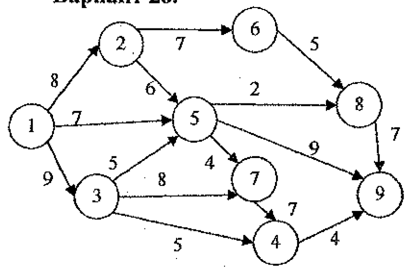
Вариант 18.



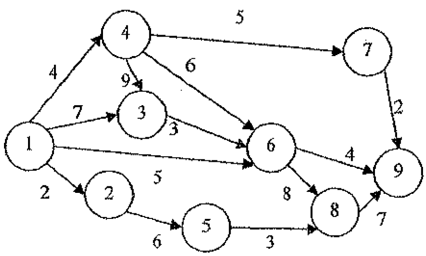
Вариант 19.



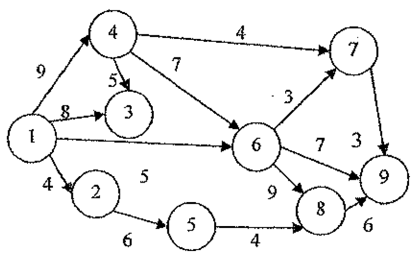
Вариант 20.



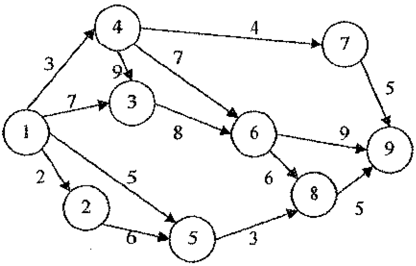
Вариант 21.



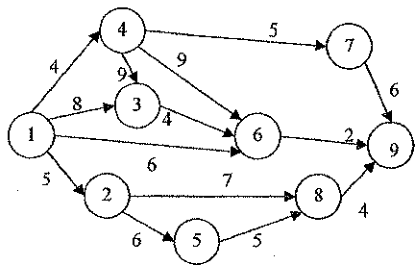
Вариант 22.



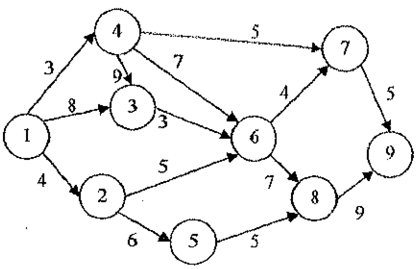
Вариант 23.



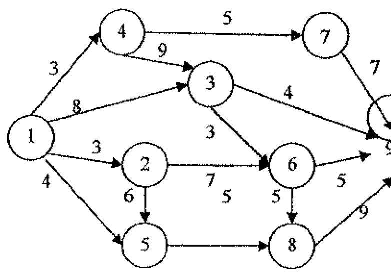
Вариант 24.



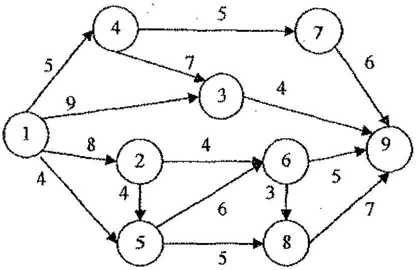
Вариант 25.



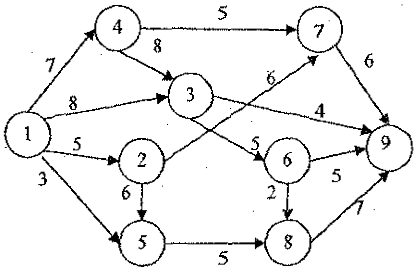
Вариант 26.



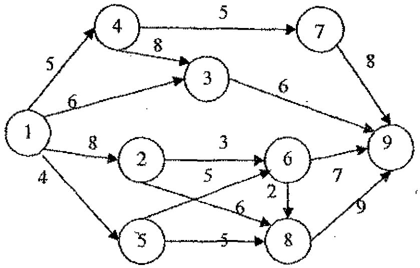
Вариант 27.



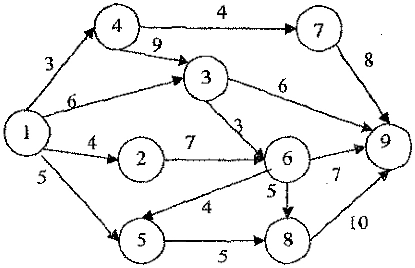
Вариант 28.



Вариант 29.



Вариант 30.



ЛИТЕРАТУРА

1. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961.
2. Кузнецов А. В. и др.. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Мн.:Вышэйшая школа., 1995.
3. Кузнецов А. В., Холод Н. И. Математическое программирование. Мн.: Вышэйшая школа., 1984.
4. Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Мн.: Вышэйшая школа., 1978.
5. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М. Физматгиз., 1963.
6. Рутицкий Я. Б., Годунов Б. А. Линейное программирование. Воронеж.: ВИСИ., 1975.
7. Годунов Б. А., Рубанов В. С. Методические указания к выполнению курсовой работы по курсу «Высшая математика». Брест.: БрПИ., 1997.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Кузьмина Елена Викторовна
Мороз Людмила Трофимовна

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ VI

Ответственный за выпуск: Л. Т. Мороз
Компьютерный набор Е. В. Кузьмина
Редактор: Т. В. Строкач
Корректор: Е. В. Никитчик

Подписано к печати 9.01.2007 г. Формат 60×84/16. Усл. п. л. 2,79. Уч. изд. л. 3,0. Заказ № 41. Тираж 150 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.