Министерство образования Республики Беларусь

Брестский политехнический институт

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания и задания к контрольной работе

по теории вероятностей для студентов экономических

специальностей заочной формы обучения

Брест 1999

УДК 31

Работа содержит контрольные задания по курсу «Теория вероятностей достаточно подробное решение типового варианта, вопросы для самопроверки, отражающие данный курс, и методические указания по оформлению контрольной работы. Материалы данного пособия могут также быть использованы на занятиях со студентами всех форм обучения.

Составители: Т.А. Тузик, доцент,
А.В. Санюкевич, к.ф.-м.н.,
Г.Р. Емельянова, ассистент,
Р.А. Гоголинская, ассистент

1. Организационно-методические указания.

Основной формой работы студента-заочника является самостоятельное изучение материала. После прослушивания установочных лекций, приступая к любой теме, следует ознакомиться с содержанием основных ее вопросов, указанных в программе, с методическими указаниями, и, наконец, обратиться к рекомендуемой литературе. Для контроля за усвоением материала желательно ответить на вопросы для самопроверки. Выполнение письменной контрольной работы является важной составляющей при изучении курса "Теория вероятности". Она существенно способствует пониманию материала курса и является основой проверки степени усвоения студентом приобретенных знаний.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями.

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Перед решением каждой задачи необходимо привести ее условие.
3. Решение задач сопровождается необходимыми формулами, развернутыми расчетами, краткими пояснениями.
4. Работа должна быть оформлена аккуратно, написана число, разборчиво, без зачеркиваний. Необходимо оставить поля для замечаний рецензента и пронумеровать страницы.
5. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.

При удовлетворительном выполнении работа оценивается "допущена к защите". Студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления. Только после этого проводится ее защита.

В случае, если работа "не допущена к защите", студент делает исправления, вносит дополнения и представляет на проверку оба варианта выполнения контрольной работы.

Если при работе над заданиями возникают затруднения, студенту следует обратиться за помощью на кафедру высшей математики БПИ.

2. Вопросы для самопроверки.

Тема 1. Случайные события. Основные теоремы теории вероятностей.

1. Какие события называют случайными? Что означает термин *«статистическая устойчивость»*?
2. Что называется суммой нескольких событий, произведением нескольких событий?
3. Что такое полная группа событий, ее определение?
4. Сформулируйте классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.
5. Теорема сложения вероятностей двух и более несовместных событий.
6. Какие события называются зависимыми и независимыми? Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей нескольких событий.
7. Теоремы сложения вероятностей двух и более совместных событий.
8. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
9. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления событий.
10. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 2. Случайные величины (СВ).

1. Определение случайной величины. Дискретные и непрерывные СВ.
2. Что называется законом распределения СВ? Способы его задания для дискретной и непрерывной СВ.
3. Интегральная функция распределения СВ, ее свойства.
4. Плотность вероятности СВ и ее свойства.
5. Как вычислить вероятность попадания СВ в заданный интервал?
6. Числовые характеристики СВ. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Расчетные формулы и свойства.
7. Классические распределения и их числовые характеристики:
   - биноминальное;
   - равномерное;
   - Пуассона;
   - показательное.
8. Нормальное распределение. Вероятность попадания нормально распределенной СВ в заданный интервал. Правило «трех сигм».

Тема 3. Понятие о законе больших чисел и предельных теоремах.

1. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.
2. Теорема Бернулли. Свойство устойчивости относительных частот.
3. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова, ее частные случаи.
4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

3. Контрольные задания.

Задача № 1.

1.0 Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, - высшего качества, равна 0.9, для второго - 0.7, для третьего - 0.6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

1.1 Первый рабочий изготавливает 40% деталей второго сорта, а второй - 30%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) все четыре детали - второго сорта; б) хотя бы три детали второго сорта; в) не менее трёх деталей второго сорта.

1.2 Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течении смены потребует его внимания первый станок, равна 0.7, второй - 0.65, третий - 0.55. Найти вероятность того, что в течении смены потребуют его внимания: а) два станка; б) не менее двух станков; в) хотя бы один станок.

1.3 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0.8, второй - 0.7, третий - 0.65. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

1.4 На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, 90% из которых - высшего сорта; на заводе № 2 - панели, 85% из которых - высшего сорта. Для строительства взяли одну панель завода № 1 и две панели завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

1.5 В прибор входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.2; 0.15; 0.25. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

1.6 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0.9, 0.8, 0.7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры.

1.7 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0.8, вторым - 0.75, третьим - 0.6. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) три раза; в) один раз.

1.8 В первом ящике - 25 деталей, 18 из них - стандартные, во втором ящике - 30 деталей, 24 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) все детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь - стандартная; в) три детали - нестандартные.

1.9 Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0.6; 0.75; 0.8. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.10 В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.3; 0.2; 0.4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух узлов; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

1.11 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0.9, вторым - 0.7, третьим - 0.65. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз.

1.12 В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.3; 0.2; 0.4; 0.25. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя:

а) не менее трех радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

1.13 Самолет обнаруживается четырьмя радиолокаторами с вероятностями 0.6; 0.9; 0.7; 0.8. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.14 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0.7, второй - 0.95, третий - 0.45. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) один экзамен; б) ни одного экзамена; в) хотя бы два экзамена.

1.15 На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, 90% из которых - высшего сорта; на заводе № 2 - панели, 85% из которых - высшего сорта. Для строительства взяли две панели завода № 1 и одну панель завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

1.16 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0.6, вторым - 0.95, третьим - 0.8. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) более одного раза; б) три раза; в) ни одного раза.

1.17 Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течении смены потребует его внимания первый станок, равна 0.5, второй - 0.5, третий - 0.55, четвертый - 0.6. Найти вероятность того, что в течении смены потребуют его внимания: а) три станка; б) не менее трех станков; в) хотя бы один станок.

1.18 В первом ящике - 32 детали, из которых 24 - стандартные, во втором ящике - 28 деталей, 14 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) две детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь - стандартная; в) все детали - нестандартные.

1.19 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0.5, 0.6, 0.75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) три камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

1.20 В схему входят четыре узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.2; 0.3; 0.2; 0.1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех узлов; б) один узел; в) хотя бы один узел.

1.21 Первый рабочий изготавливает 35% деталей второго сорта, а второй - 20%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) все четыре детали - второго сорта; б) хотя бы одна деталь второго сорта; в) не менее двух деталей второго сорта.

1.22 Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0.75; 0.85; 0.6. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.23 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0.7, вторым - 0.9, третьим - 0.5. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) менее двух раз; б) два раза; в) три раза.

1.24 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0.75, второй - 0.9, третий - 0.85. Вычислить вероятность того, что студент сдаст; а) три экзамена; б) не менее одного экзамена; в) более одного экзамена.

1.25 Первый рабочий изготавливает 25% деталей второго сорта, а второй - 35%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) ни одной детали второго сорта; б) хотя бы две детали второго сорта; в) не менее трёх деталей второго сорта.

1.26 В первом ящике - 24 детали, из которых 16 - стандартные, во втором ящике - 18 деталей, 15 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) три детали будут стандартными; б) хотя бы две детали - стандартные; в) ни одной стандартной детали.

1.27 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0.7, 0.85, 0.75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

1.28 Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, - высшего качества, равна 0.5, для второго - 0.75, для третьего - 0.9. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) две высшего качества; б) хотя бы две высшего качества; в) одна высшего качества.

1.29 В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.15; 0.3; 0.1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) два узла; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

1.30 В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.1; 0.2; 0.35; 0.2. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) одна радиолампа; в) хотя бы одна.

Задача № 2.

На фабрике производятся швейные изделия. Вероятность появления брака равна p. Была введена упрощенная система контроля изделий, состоящая из двух независимых проверок. В результате k-й проверки ($k = 1,2$) изделие удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью α_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью β_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий:

а) бракованное изделие будет принято;

б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано;

в) случайно взятое на проверку швейное изделие будет отбраковано;

г) отбракованное изделие удовлетворяет стандарту;

д) из a изделий, взятых на проверку, b изделий будут удовлетворять стандарту.

№ варианта	p	α_1	α_2	β_1	β_2	a	b
0	0.11	0.035	0.0125	0.0045	0.0015	3	1
1	0.10	0.05	0.025	0.005	0.005	4	1
2	0.30	0.04	0.02	0.002	0.001	5	1
3	0.20	0.02	0.015	0.001	0.001	6	1
4	0.05	0.03	0.01	0.003	0.001	3	2
5	0.12	0.04	0.015	0.005	0.003	4	2
6	0.15	0.07	0.03	0.006	0.003	5	2
7	0.10	0.03	0.01	0.003	0.001	6	2
8	0.05	0.01	0.005	0.002	0.0015	3	2
9	0.06	0.08	0.03	0.004	0.003	4	3
10	0.12	0.03	0.01	0.002	0.001	5	3
11	0.20	0.07	0.04	0.006	0.004	6	3
12	0.10	0.01	0.005	0.005	0.004	3	1
13	0.08	0.03	0.012	0.001	0.0005	4	1
14	0.10	0.04	0.02	0.003	0.002	5	1
15	0.12	0.05	0.025	0.005	0.0025	6	1
16	0.20	0.07	0.03	0.004	0.003	3	2
17	0.05	0.02	0.01	0.001	0.001	4	2
18	0.04	0.03	0.01	0.002	0.001	5	2
19	0.09	0.04	0.02	0.002	0.0015	6	2
20	0.12	0.06	0.03	0.005	0.003	3	2
21	0.20	0.02	0.01	0.003	0.001	4	3
22	0.07	0.01	0.005	0.005	0.002	5	3

№ варианта	p	α_1	α_2	β_1	β_2	a	b
23	0.13	0.01	0.006	0.005	0.002	6	3
24	0.12	0.06	0.035	0.006	0.0035	3	1
25	0.06	0.03	0.01	0.002	0.001	4	1
26	0.04	0.07	0.03	0.005	0.003	5	1
27	0.12	0.01	0.005	0.006	0.005	6	1
28	0.08	0.03	0.015	0.005	0.0025	3	2
29	0.13	0.05	0.02	0.001	0.0005	4	2
30	0.30	0.04	0.01	0.003	0.001	5	2

Задача № 3.

а) Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p. Найти вероятность того, что событие наступит ровно m раз.

№ варианта	n	m	p
0[а]	245	50	0.25
1	144	120	0.8
2	110	18	0.15
3	220	140	0.6
4	112	13	0.1
5	99	17	0.2
6	117	85	0.7
7	240	80	0.3
8	115	100	0.9
9	62	5	0.1
10	154	90	0.6

б) Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p. Найти вероятность того, что событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз.

№ варианта	n	m_1	m_2	p
0[б]	245	45	60	0.25
11	144	115	125	0.8
12	110	15	20	0.15
13	220	130	145	0.6
14	112	10	14	0.1

№ варианта	n	m_1	m_2	p
15	99	15	20	0.2
16	117	80	100	0.7
17	240	70	90	0.3
18	115	100	110	0.9
19	62	5	10	0.1
20	154	80	100	0.6

в) Вероятность производства бракованной детали равна p. Найти вероятность того, что из взятых на проверку n деталей m бракованных.

№ варианта	n	m	p
0в	1000	5	0.002
21	1000	6	0.008
22	2500	2	0.001
23	1500	10	0.006
24	3500	5	0.002
25	10000	4	0.0005
26	8000	6	0.0008
27	4500	5	0.0008
28	2000	1	0.0001
29	5000	3	0.0008
30	7000	4	0.0006

Задача № 4.

Дискретная случайная величина задана таблично:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

№ варианта	X	-5	-3	2	3	4
0	$P(x)$	0.21	0.12	0.35	0.23	0.09
1	$P(x)$	0.32	0.22	0.15	0.10	0.21
2	$P(x)$	0.12	0.24	0.11	0.51	0.02
3	$P(x)$	0.14	0.26	0.13	0.35	0.12
4	$P(x)$	0.17	0.31	0.20	0.11	0.21
5	$P(x)$	0.26	0.10	0.34	0.20	0.10

№ варианта	X	-2	-1	0	1	2
6	$P(x)$	0.11	0.23	0.27	0.19	0.20
7	$P(x)$	0.10	0.17	0.43	0.16	0.14
8	$P(x)$	0.13	0.21	0.40	0.16	0.10
9	$P(x)$	0.44	0.30	0.10	0.09	0.07
10	$P(x)$	0.11	0.23	0.24	0.25	0.17

№ варианта	X	0	1	2	3	4
11	$P(x)$	0.13	0.11	0.25	0.24	0.27
12	$P(x)$	0.10	0.23	0.24	0.15	0.27
13	$P(x)$	0.21	0.29	0.13	0.17	0.20
14	$P(x)$	0.17	0.20	0.31	0.21	0.11
15	$P(x)$	0.13	0.14	0.26	0.35	0.12

№ варианта	X	-5	-4	0	2	3
16	$P(x)$	0.09	0.26	0.34	0.20	0.11
17	$P(x)$	0.22	0.32	0.21	0.10	0.15
18	$P(x)$	0.17	0.20	0.31	0.21	0.11
19	$P(x)$	0.11	0.12	0.24	0.51	0.02
20	$P(x)$	0.40	0.21	0.16	0.13	0.10

№ варианта	X	0	2	3	4	5
21	$P(x)$	0.19	0.21	0.30	0.20	0.10
22	$P(x)$	0.10	0.20	0.30	0.21	0.19
23	$P(x)$	0.18	0.20	0.30	0.21	0.19
24	$P(x)$	0.15	0.25	0.20	0.25	0.15
25	$P(x)$	0.18	0.20	0.30	0.22	0.10

№ варианта	X	1	2	3	4	5
26	$P(x)$	0.10	0.20	0.20	0.20	0.30
27	$P(x)$	0.13	0.27	0.18	0.12	0.30
28	$P(x)$	0.28	0.12	0.30	0.19	0.11
29	$P(x)$	0.11	0.19	0.30	0.12	0.28
30	$P(x)$	0.20	0.20	0.30	0.15	0.15

Задача № 5.

Для непрерывной случайной величины задана функция распределения $F(x)$. Требуется найти:

а) параметр a;

б) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

0. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{3};\\ \frac{1}{2}+a\cos 3x, & -\frac{\pi}{3}\le x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax+\frac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{4};\\ a\cos 2x, & -\frac{\pi}{4}\le x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x<3;\\ 1+\frac{a}{x^3}, & x\ge 3.\end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1-ax^2, & -1\le x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-ae^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 1-\frac{a}{x^3}, & x\ge 1.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a\sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a\sin 3x, & 0\le x\le \frac{\pi}{6};\\ 1, & x>\frac{\pi}{6}.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x(a-x), & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ a(x+1), & -1\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ a(x-1)^3, & 1\le x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax^2, & 0\le x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 1+\frac{a}{x^5}, & x\ge 1.\end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2; \\ a(x+2)^2, & -2\le x\le 0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<5; \\ 1-\dfrac{a}{x^4}, & x\ge 5. \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\sin 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ ax-\dfrac{1}{9}x^2, & 0\le x\le 3; \\ 1, & x>3. \end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ 1-\dfrac{a}{x^4}, & x\ge 2. \end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2}; \\ a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ a(x+1)^2, & -1\le x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ ax+\dfrac{3}{14}x^2, & 0\le x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$

22. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<4; \\ 1-\dfrac{a}{x^3}, & x\ge 4. \end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-ae^{-2x}, & x\ge 0. \end{cases}$

24. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-ae^{-3x}, & x\ge 0. \end{cases}$

25. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-ae^{-5x}, & x\ge 0. \end{cases}$

26. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ 1+\dfrac{a}{x^4}, & x\ge 1. \end{cases}$

27. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ 1+\dfrac{a}{x^3}, & x\ge 2. \end{cases}$

28. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ 1-\dfrac{a}{x^5}, & x\ge 2. \end{cases}$

29. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-ae^{-4x}, & x\ge 0. \end{cases}$

30. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<4; \\ 1+\dfrac{a}{x^4}, & x\ge 4. \end{cases}$

Задача № 6.

Случайная величина T подчиняется показательному закону распределения с известным параметром λ. Записать функцию распределения $F(t)$, плотность вероятности $f(t)$, функцию надежности $R(t)$, где t - время. Найти числовые характеристики этого распределения $M(T)$, $D(T)$ и $\sigma(T)$. Определить, что вероятнее:

$$T(t)\in(1.00+0.02\cdot n;4.00-0.05\cdot n) \text{ или } T(t)\in(2.00+0.01\cdot n;6.00-0.03\cdot n),$$

$\lambda=1.0+0.1\cdot n$, где n - номер варианта.

Задача № 7.

Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X)$ и дисперсией $D(X)$. Записать плотность вероятности $f(x)$ и построить схематический график этой функции. Записать интервал практически наиболее вероятных значений случайной величины X. Что вероятнее:

$$X \in (\alpha;\beta) \text{ или } X \in (\gamma;\delta) \text{ ?}$$

№ варианта	$M(X)$	$D(X)$	α	β	γ	δ
0	0.7	3.24	-1	1	0	2
1	2	4	-1	4	5	6
2	-3	9	-5	-4	-2	-1
3	4	1	0	3	2	5
4	-5	16	-10	-6	0	4
5	3	4	0	5	6	7
6	-2	9	-6	-5	-4	0
7	5	1	0	3	2	6
8	-1	25	-3	1	0	4
9	1	9	-2	2	-1	5
10	-3	4	-4	0	1	6
11	2	16	0	3	2	5
12	-1	1	-3	0	1	4
13	3	4	-2	1	5	9
14	-2	16	-5	-1	0	3
15	4	25	-1	3	4	6
16	-3	9	-6	0	0	5
17	6	25	-2	1	5	7
18	-6	16	-4	2	4	9
19	0	4	-5	1	2	8
20	1	9	-2	3	4	8
21	1	16	-1	2	0	6
22	2	25	-2	3	4	10
23	5	9	1	6	7	9
24	-1	4	-4	-2	1	3
25	-3	9	-5	-1	2	4
26	2	1	-3	4	5	7
27	4	25	-3	1	2	8
28	6	100	-1	3	4	9
29	-3	64	-4	2	3	8
30	-5	16	-7	-3	-1	6

4. Методические указания к решению контрольных заданий.

Каждый блок заданий состоит из 7 однотипных задач. Поэтому мы надеемся, что примеры решений аналогичных задач, которые приведены здесь, помогут вам справиться с контрольной работой, а заодно глубже понять темы этого раздела высшей математики.

Задача № 1.0. См. условие на стр. 5.

<u>Решение:</u> Перед решением задачи необходимо внимательно прочитать условие задачи и обозначить буквами все события, которые могут произойти.

Пусть событие A состоит в том, что все взятые детали высшего качества; событие B состоит в том, что только две из взятых деталей высшего качества; событие C состоит в том, что из взятых деталей хотя бы одна высшего качества. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 - деталь, взятая с первого автомата, будет высшего качества, H_2 - деталь, взятая со второго автомата, будет высшего качества, H_3 - деталь, взятая с третьего автомата, будет высшего качества. Из условий задачи находим:

$$P(H_1)=0.9,\ P(H_2)=0.7,\ P(H_3)=0.6,\ P(\overline{H}_1)=1-0.9=0.1,$$

$$P(\overline{H}_2)=1-0.7=0.3,\ P(\overline{H}_3)=1-0.6=0.4.$$

а) Событие A состоит в том, что все три взятые детали высшего качества. *Событие, которое состоит в том, что несколько событий произойдут одновременно, называется их произведением.* Тогда - $A=H_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все эти три гипотезы - независимые события (независимые в совокупности, так как вероятность любого из событий H_i не меняется при наступлении любой из двух других гипотез или обеих вместе). *Вероятность произведения событий, независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей.* Тогда вероятность события A найдем по формуле:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=0.9\cdot 0.7\cdot 0.6=0.378.$$

б) *Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в том, что произойдет хотя бы одно из этих событий.* Событие B равно сумме трех событий. Первое событие: детали с первого и второго автоматов - высшего качества, а с третьего – нет ($H_1\cdot H_2\cdot \overline{H}_3$). Второе событие: детали с первого и третьего автоматов - высшего качества, а со второго - нет ($H_1\cdot \overline{H}_2\cdot H_3$). Третье событие: детали со второго и третьего автоматов - высшего качества, а с первого - нет ($\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3$). Таким образом,

$$B=H_1\cdot H_2\cdot \overline{H}_3+H_1\cdot \overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3.$$

Все три слагаемых - несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. *Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей.* Так как гипотезы - независимые в совокупности события, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события B найдем по формуле:

$$P(B)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\overline{H}_3)+P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3)+P(\overline{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=$$
$$=0.9\cdot 0.7\cdot 0.4+0.9\cdot 0.3\cdot 0.6+0.1\cdot 0.7\cdot 0.6=0.252+0.162+0.042=0.456.$$

в) *Два события, одно из которых обязательно должно произойти, но наступление одного из них исключает возможность наступления другого, называются противоположными. Событие, противоположное событию A обозначается $\overline{A}$. Вероятность суммы противоположных событий равна сумме их вероятностей и равна единице, то есть $P(A)+P(\overline{A})=1$.* Событие C противоположно событию, которое состоит в том, что ни одна из взятых деталей не будет высшего качества. Тогда - $\overline{C}=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3$. Все эти три гипотезы - независимые в совокупности события и вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события C равна

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3)=1-0.1\cdot 0.3\cdot 0.4=1-0.012=0.988.$$

Задача № 2.0. См. условие на стр. 8.

<u>Решение:</u> Пусть A - событие, состоящее в том, что изделие удовлетворяет стандарту, $\overline{A}$ - изделие не удовлетворяет стандарту, B_k - изделие принимается при k – ой проверке, а $\overline{B}_k$ - изделие бракуется при k – ой проверке.

а) Определим вероятность того, что бракованное изделие будет принято. Так как заранее задано, что изделие с браком, то вероятность события $\overline{A}$ не учитывается. Чтобы это изделие было принято, должно произойти событие $B_1\cdot B_2$, то есть бракованное изделие принимается после обеих проверок. Вероятность этого события будет равна

$$p_1=\beta_1\cdot\beta_2=0.0045\cdot 0.0015=0.00000675=6.75\cdot 10^{-6}.$$

б) Найдем вероятность того, что изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано. Здесь также из условия известно, что оно уже удовлетворяет стандарту. Значит соответствующее событие будет равно сумме двух событий: одно - изделие отбраковано при первой проверке $\overline{B}_1$; второе - изделие было принято при первой проверке, но отбраковано при второй $B_1\cdot\overline{B}_2$. Значит вероятность будет равна (необходимо учесть, что в данном пункте вероятности событий B_1 и B_2 уже иные, нежели в пункте а)):

$$p_2=P(\overline{B}_1+B_1\cdot\overline{B}_2)=\alpha_1+(1-\alpha_1)\cdot\alpha_2=0.035+0.965\cdot 0.0125=0.0470625.$$

в) Пусть C - событие, состоящее в том, что случайно взятое на проверку швейное изделие будет отбраковано. В первых двух пунктах было известно из условия какое изделие идет на проверку. Теперь же мы не знаем этого. Возможны две гипотезы: H_1 - на проверку идет изделие, удовлетворяющее стандарту; H_2 - на проверку идет бракованное изделие. По условию, $P(H_1)=1-p=1-0.11=0.89$, $P(H_2)=p=0.11$. Вероятность искомого события будем искать по формуле полной вероятности. *Если событие может* *произойти лишь при условии наступления какого-либо из несовместных событий-гипотез, образующих полную группу (то есть какое-то одно из них обязательно наступает), то его вероятность равна сумме произведений вероятностей этих гипотез на условные вероятности искомого события при условии, что соответствующие гипотезы произошли.* Таким образом, при двух гипотезах

$$P(C)=P(H_1)P(C/H_1)+P(H_2)P(C/H_2).$$

Условная вероятность $P(C/H_1)$ означает вероятность события, которое состоит в том, будет отбраковано изделие, удовлетворяющее стандарту. Тогда, по пункту б) имеем $P(C/H_1)=p_2=0.0470625$. В пункте а) найдена вероятность того, что бракованное изделие будет принято. Противоположным ему является событие состоящее в том, что бракованное изделие будет отбраковано. Тогда условная вероятность

$$P(C/H_2)=1-p_1=1-0.00000675=0.99999325.$$

Найдем вероятность искомого события C:

$$P(C)=0.89\cdot 0.0470625+0.11\cdot 0.99999325\approx 0.15188.$$

г) Отбракованное изделие удовлетворяет стандарту. Следовательно произошла гипотеза H_1 при условии что наступило событие C. Вероятность этого события найдем по формуле Байеса, которая служит для переоценки вероятностей гипотез после того, как стало известно, что основное событие произошло. Таким образом

$$P(H_1/C)=\frac{P(H_1)P(C/H_1)}{P(C)}=\frac{0.89\cdot 0.0470625}{0.15188}\approx 0.27577.$$

д) Найдем вероятность p_3 того, что одно случайно взятое на проверку швейное изделие удовлетворяет стандарту. Это событие противоположно событию C. Значит, $p_3=1-P(C)=1-0.15188=0.84812$. Для нахождения вероятности того, что из 3 изделий, взятых на проверку, только одно будет удовлетворять стандарту, воспользуемся формулой Бернулли. *Если вероятность **p** наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие A наступит ровно **m** раз в **n** независимых испытаниях, равна* $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, *где* $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $q=1-p$. Для нашего случая, $p=p_3$, $q=1-p_3=P(C)$, $n=a=3$, $m=b=1$. Тогда

$$P_3(1)=C_3^1p^1q^{3-1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}p_3P(C)^2=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot 0.84812\cdot 0.15188^2\approx 0.0587.$$

Задача № 3.0^{а}. См. условие на стр. 9.

Решение: Так как число испытаний велико (245), то пользоваться формулой Бернулли крайне затруднительно. Формально ответ может быть получен. Однако нахождение окончательных численных значений связано с очень громоздкими вычислениями. Поэтому для таких случаев были найдены приближенные формулы, которые дают достаточно точные значения искомых вероятностей при сравнительно несложных вычислениях.

В данном примере воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. *Если вероятность **p** наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A наступит ровно **m** раз в **n** независимых испытаниях, приближенно равна* $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, *где функция* $\varphi(x)$ *определяется равенством* $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, *а* $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *и* $q = 1-p$.

По условию, $n = 245$, $m = 50$, $p = 0.25$, $q = 1-p = 0.75$. Получим

$$x = \frac{50 - 245\cdot 0.25}{\sqrt{245\cdot 0.75\cdot 0.25}} = \frac{-11.25}{\sqrt{45.9375}} = -\frac{11.25}{6.778} \approx -1.66 .$$

Так как $\varphi(x)$- функция четная ($\varphi(-1.66) = \varphi(1.66)$), то по приложению находим искомую вероятность $P_{245}(50) \approx \varphi(1.66) = 0.1006$.

Задача № 3.0^{б}. См. условие на стр. 9.

Решение: Если требуется найти вероятность того, что число наступлений события A заключено в каких-то границах, то в этом случае используют интегральную теорему Муавра-Лапласа. *Если вероятность **p** наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит в **n** независимых испытаниях число раз, заключенное в границах от* m_1 *до* m_2 *включительно, приближенно равна* $P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, *где функция* $\Phi(x)$ *- функция Лапласа - определяется равенством* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$, *а* $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

По условию, $n = 245$, $m_1 = 45$, $m_2 = 60$, $p = 0.25$, $q = 1-p = 0.75$. Получим

$$x_1 = \frac{45 - 245\cdot 0.25}{\sqrt{245\cdot 0.75\cdot 0.25}} = \frac{-16.25}{\sqrt{45.9375}} \approx -2.40,$$

$$x_2 = \frac{60 - 245\cdot 0.25}{\sqrt{245\cdot 0.75\cdot 0.25}} = \frac{-1.25}{\sqrt{45.9375}} \approx -0.18.$$

Так как $\Phi(x)$- функция нечетная ($\varphi(-1.66) = \varphi(1.66)$), то по приложению находим: $\Phi(-2.40) = -\Phi(2.40) \approx -0.4918$, $\Phi(-0.18) = -\Phi(0.18) \approx -0.0714$. Таким образом, искомая вероятность:

$$P_{245}(45 \le m \le 60) \approx \Phi(-0.18) - \Phi(-2.40) = -0.0714 + 0.4918 = 0.4204.$$

Задача № 3.0[в]. См. условие на стр. 10.

Решение: Если число независимых испытаний n достаточно велико ($n > 100$), а вероятность появления события в каждом испытании p постоянна, но мала ($p \le 0.3$), и произведение np остается небольшим (не больше 10), то для отыскания вероятности того, что в этих испытаниях событие A появится ровно m раз, используют приближенную *формулу Пуассона:*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda_n^m e^{-\lambda_n}}{m!},$$ где $\lambda_n = np$ (среднее число появлений события A).

Поскольку число независимых испытаний $n = 1000$ достаточно велико, а вероятность $p = 0.002$ мала, то воспользуемся формулой Пуассона. По условию задачи $m = 5$. Так как $\lambda_n = np = 1000 \cdot 0.002 = 2$, то искомая вероятность:

$$P_{1000}(5) \approx \frac{2^5 e^{-2}}{5!} = \frac{32e^{-2}}{120} \approx 0.0361.$$

Задача № 4.0. См. условие на стр. 10.

Решение: Сумма вероятностей всех значений случайной величины должна быть равна единице. Проверим это: $0.21 + 0.12 + 0.35 + 0.23 + 0.09 = 1.00$. Так как это так и есть, то закон распределения дискретной случайной величины составлен верно.

Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений ее значений на соответствующие вероятности. Следовательно,

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 =$$
$$= -5 \cdot 0.21 + (-3) \cdot 0.12 + 2 \cdot 0.35 + 3 \cdot 0.23 + 4 \cdot 0.09 =$$
$$= -1.05 - 0.36 + 0.7 + 0.69 + 0.36 = 0.34.$$

Дисперсия дискретной случайной величины равна математическому ожиданию квадрата отклонения ее от ее математического ожидания, то есть $D(X) = M\left((X - M(X))^2\right)$.

Дисперсию, однако, проще считать по другой формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

то есть она равна математическому ожиданию квадрата дискретной случайной величины без квадрата ее математического ожидания. Найдем математическое ожидание квадрата дискретной случайной величины:

$$M(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 + x_5^2 p_5 =$$
$$= (-5)^2 \cdot 0.21 + (-3)^2 \cdot 0.12 + 2^2 \cdot 0.35 + 3^2 \cdot 0.23 + 4^2 \cdot 0.09 =$$
$$= 5.25 + 1.08 + 1.4 + 2.07 + 1.44 = 11.24.$$

Таким образом,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 11.24 - 0.34^2 = 11.1244.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ *случайной величины* X *называется арифметическое значение квадратного корня из ее дисперсии* $D(X)$.

Тогда, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{11.1244} \approx 3.34$.

Задача № 5.0. См. условие на стр. 12.

Решение: а) *Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения всюду непрерывна.* Заданная функция распределения $F(x)$ состоит из трех частей. Каждая из частей непрерывна на своем интервале. Проверим непрерывность в точках соединения. Если $x \to -\frac{\pi}{3} - 0$, то $F(-\frac{\pi}{3} - 0) = 0$. Если $x \to -\frac{\pi}{3} + 0$, то

$$F(-\frac{\pi}{3} + 0) = \frac{1}{2} + a\cos(3 \cdot (-\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2} + a\cos(-\pi) = \frac{1}{2} - a.$$

Следовательно, необходимо $\frac{1}{2} - a = 0$. Отсюда получаем $a = \frac{1}{2}$. Если $x \to -0$, то $F(-0) = \frac{1}{2} + a\cos(3 \cdot (-0)) = \frac{1}{2} + a\cos 0 = \frac{1}{2} + a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Если $x \to +0$, то $F(+0) = 1$. Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{3}; \\ 0.5(1 + \cos 3x), & -\frac{\pi}{3} \le x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

б) *Плотностью распределения вероятностей* $f(x)$ *непрерывной случайной величины называется производная ее функции распределения* $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения вероятностей нашей случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{3}; \\ -1.5\sin 3x, & -\frac{\pi}{3} \le x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

в) *Математическим ожиданием* $M(X)$ *непрерывной случайной величины с известной плотностью вероятностей* $f(x)$ *называется величина интеграла*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Найдем математическое ожидание нашей случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{-\pi/3} x\cdot 0dx+\int_{-\pi/3}^{0} x\cdot(-1.5\sin 3x)dx+\int_{0}^{+\infty} x\cdot 0dx=\int_{-\pi/3}^{0}(-1.5x\sin 3x)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} \text{интегрируем по частям} & \\ \int udv=uv-\int vdu \;; & \\ u=x \;, & du=dx \\ dv=-1.5\sin 3xdx\,, & v=0.5\cos 3x \end{matrix}\right|=0.5x\cos 3x\Big|_{-\pi/3}^{0}-0.5\int_{-\pi/3}^{0}\cos 3xdx=$$

$$=\left(0.5\cdot 0\cdot\cos(3\cdot 0)-0.5\cdot(-\frac{\pi}{3})\cdot\cos(-\frac{\pi}{3})\right)-\frac{1}{6}\sin 3x\Big|_{-\pi/3}^{0}=$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}(\sin 0-\sin(-\frac{\pi}{3}))=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx -0.604\,.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины с известной плотностью вероятностей $f(x)$ *называется величина интеграла*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx\,.$$

Как и в случае дискретной случайной величины, дисперсию будем искать по формуле $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$, где $M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$. Для нашего условия

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{-\pi/3} x^2\cdot 0dx+\int_{-\pi/3}^{0} x^2\cdot(-1.5\sin 3x)dx+\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot 0dx=\int_{-\pi/3}^{0}(-1.5x^2\sin 3x)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2 \;, & du=2xdx \\ dv=-1.5\sin 3xdx\,, & v=0.5\cos 3x \end{matrix}\right|=0.5x^2\cos 3x\Big|_{-\pi/3}^{0}-\int_{-\pi/3}^{0}x\cos 3xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x\,, & du=dx \\ dv=\cos 3xdx\,, & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right|=0.5x^2\cos 3x\Big|_{-\pi/3}^{0}-(\frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_{-\pi/3}^{0}-\frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{0}\sin 3xdx)=$$

$$=\left(0.5\cdot 0^2\cdot\cos(3\cdot 0)-0.5\cdot(-\frac{\pi}{3})^2\cdot\cos(-\frac{\pi}{3})\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 0\cdot\sin(3\cdot 0)-\frac{1}{3}\cdot(-\frac{\pi}{3})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})\right)-$$

$$-\frac{1}{9}\cos 3x\Big|_{-\pi/3}^{0}=(0+\frac{\pi^2}{36})-(0-\frac{\pi\sqrt{3}}{18})-(\frac{1}{9}\cos(3\cdot 0)-\frac{1}{9}\cos(3\cdot(-\frac{\pi}{3})))=$$

$$=\frac{\pi^2}{36}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{2}{9}.$$

Тогда дисперсия

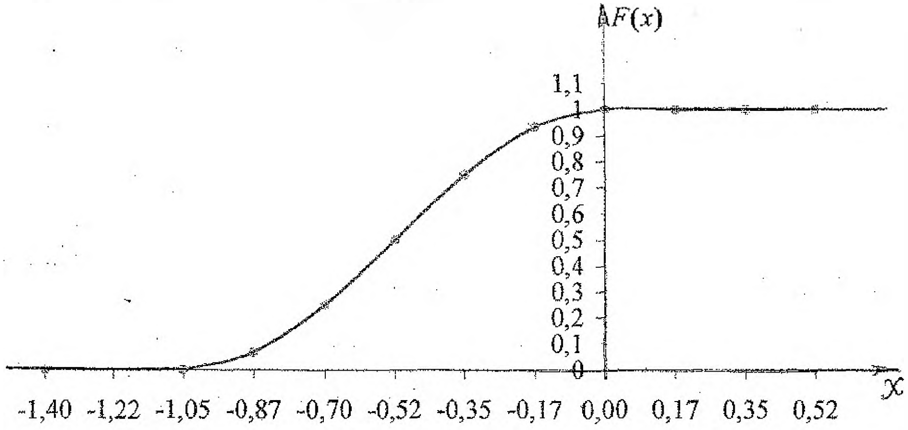
$$D(X)=(\frac{\pi^2}{36}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{2}{9})-(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{\pi^2}{36}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{2}{9}-\frac{\pi^2}{144}+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{3}{4}=$$

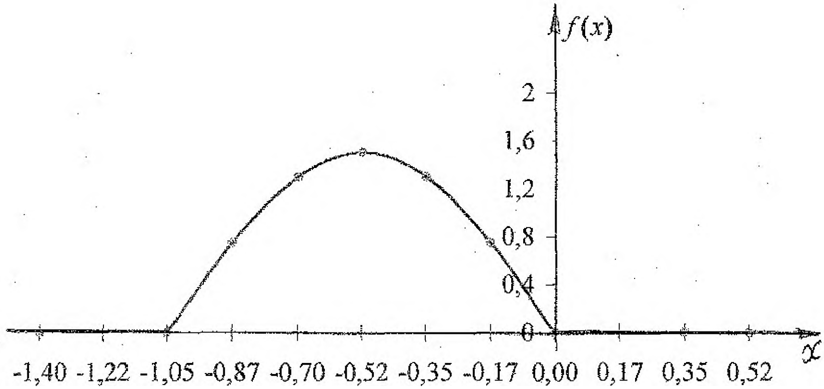
$$=\frac{\pi^2}{48}+\frac{5\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{35}{36}\approx 0.745$$

Найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{\pi^2}{48}+\frac{5\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{35}{36}}\approx\sqrt{0.745}\approx 0.863.$$

г) построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$:





Задача № 6.0.

Случайная величина T подчиняется показательному закону распределения с известным параметром $\lambda = 4.1$. Записать функцию распределения $F(t)$, плотность вероятности $f(t)$, функцию надежности $R(t)$, где t - время. Найти числовые характеристики этого распределения $M(T)$, $D(T)$ и $\sigma(T)$. Определить, что вероятнее:

$$T(t) \in (1.62;2.45) \text{ или } T(t) \in (2.31;5.07).$$

Решение: *Плотность показательного распределения задается функцией*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

При $\lambda = 4.1$ имеем

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ 4.1e^{-4.1t}, & \text{если} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Интегральную функцию распределения найдем по формуле $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$.

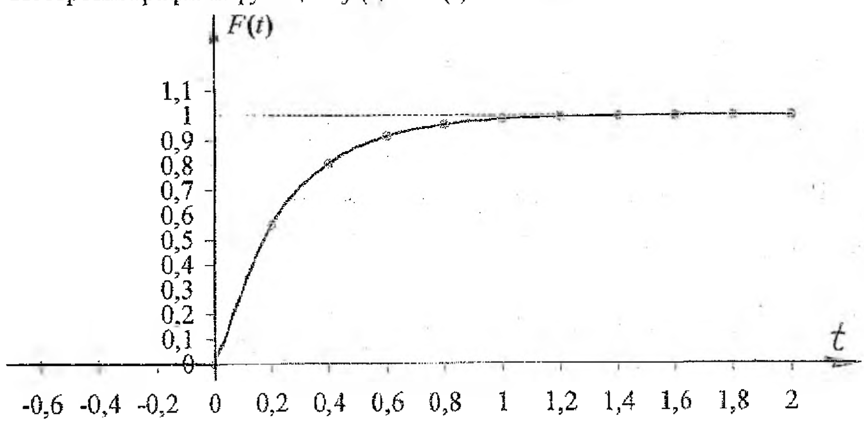
Если $t < 0$, то $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \int_{-\infty}^{t} 0dt = 0$. Если $t \ge 0$, то

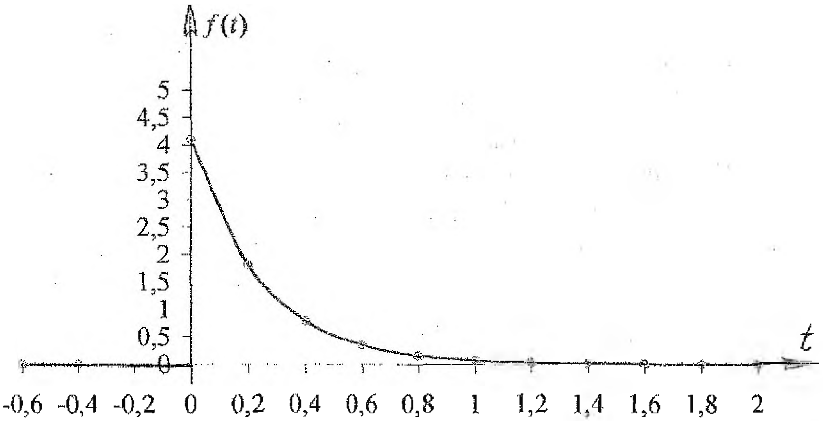
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{t} 4.1e^{-4.1t}dt = -e^{-4.1t}\Big|_0^t = -e^{-4.1t} + e^{-4.1\cdot 0} = 1 - e^{-4.1t}.$$

Таким образом, интегральная функция распределения имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ 1 - e^{-4.1t}, & \text{если} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Построим графики функций $f(t)$ и $F(t)$:





Если T - время безотказной работы механизма, то функция $R(T) = P(T > t)$ описывает вероятность безотказной работы механизма за время t. Эта функция называется функцией надежности. Функция надежности определяется так:

$$R(T) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-4.1t}, \text{ если } t > 0.$$

В общем случае для показательного распределения $M(T) = \sigma(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, $D(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Находим математическое ожидание показательного распределения:

$$M(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)dx = \int_{-\infty}^{0} t \cdot 0dt + \int_{0}^{+\infty} t \cdot 4.1e^{-4.1t}dt = \int_{0}^{+\infty} t \cdot 4.1e^{-4.1t}dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t \quad , & du = dt \\ dv = 4.1e^{-4.1t}dt\,, & v = -e^{-4.1t} \end{vmatrix} = -t \cdot e^{-4.1t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-4.1t}dt =$$

$$= (-\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{4.1t}} + 0) - \frac{1}{4.1}e^{-4.1t}\Big|_0^{+\infty} = 0 - (\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{4.1e^{4.1t}} - \frac{1}{4.1}e^{-4.1 0}) = \frac{1}{4.1} \approx 0.244.$$

Как и в пятой задаче, дисперсию ищем по формуле $D(T) = M(T^2) - M^2(T)$, где $M(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$:

$$M(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t)dx = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot 4.1e^{-4.1t}dt = \begin{vmatrix} u = t^2 \quad , & du = 2tdt \\ dv = 4.1e^{-4.1t}dt\,, & v = -e^{-4.1t} \end{vmatrix} =$$

$$= -t^2 \cdot e^{-4.1t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-4.1t}dt = (-\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^{4.1t}} + 0) + \frac{2}{4.1}\int_0^{+\infty} t \cdot 4.1e^{-4.1t}dt =$$

$$= 0 + \frac{2}{4.1} \cdot \frac{1}{4.1} = \frac{2}{4.1^2};$$

$$D(T)=M(T^2)-M^2(T)=\frac{2}{4.1^2}-\left(\frac{1}{4.1}\right)^2=\frac{2}{4.1^2}-\frac{1}{4.1^2}=\frac{1}{4.1^2}\approx 0.0595;$$

$$\sigma(T)=\sqrt{D(T)}=\sqrt{\frac{1}{4.1^2}}=\frac{1}{4.1}\approx 0.244.$$

Вероятность попадания случайной величины T в интервал $(a;b)$ определяется по формуле

$$P(a<T<b)=F(b)-F(a)=(1-e^{-bt})-(1-e^{-at})=e^{-at}-e^{-bt}.$$

Вычислим вероятности попадания в интервалы $(1.62;2.45)$ и $(2.31;5.07)$ и сравним полученные числа:

$$P(1.62<T<2.45)=e^{-4.1\cdot 1.62}-e^{-4.1\cdot 2.45}=e^{-6.642}-e^{-10.045}\approx$$
$$\approx 0.0013044-0.0000434=0.0012610;$$
$$P(2.31<T<5.07)=e^{-4.1\cdot 2.31}-e^{-4.1\cdot 5.07}=e^{-9.471}-e^{-20.787}\approx$$
$$\approx 0.0000771-10^{-9}\approx 0.0000771.$$

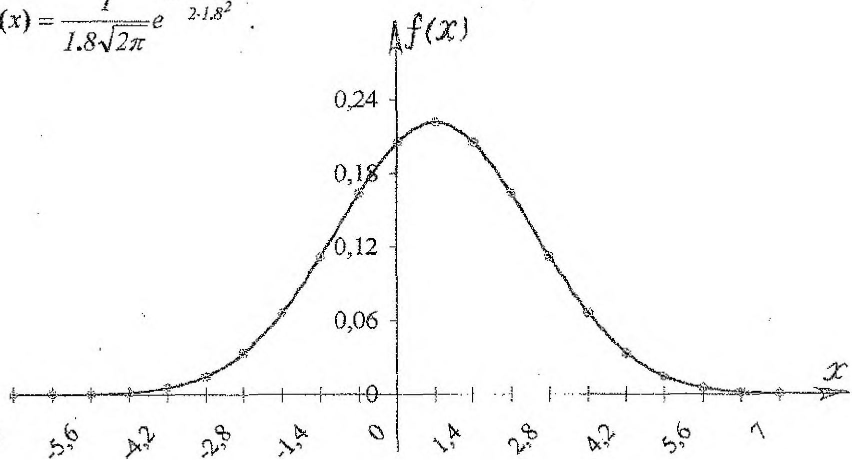
Таким образом, вероятнее, что случайная величина T принадлежит первому интервалу.

Задача № 7.0. См. условие на стр. 14.

Решение: Функция плотности распределения вероятностей для нормального распределения имеет вид: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X)$ и $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

Так как по условию $M(X)=0.7$ и $D(X)=3.24$, то $a=0.7$, $\sigma=\sqrt{3.24}=1.8$.

Тогда $f(x)=\frac{1}{1.8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-0.7)^2}{2\cdot 1.8^2}}$.



Построим схематический график этой функции. При $x = a = 0.7$ функция достигает максимального значения $f(0.7) = f_{\max} = \dfrac{1}{1.8\sqrt{2\pi}} \approx 0.22163$. При $x = a \pm \sigma$ график функции имеет перегиб (в данном случае в точках $x = -1.1$ и $x = 2.5$, $f(-1.1) = f(2.5) = \dfrac{1}{1.8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.1344$).

Интервал практически наиболее вероятных значений для любой нормально распределенной случайной величины X определяется правилом «трех сигм»:

$$P(X \in (a - 3\sigma; a + 3\sigma)) = 0.9973.$$

В данном случае, значения случайной величины X практически принадлежат интервалу $(0.7 - 3 \cdot 1.8; 0.7 + 3 \cdot 1.8)$ или $(-4.7; 6.1)$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$ определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$P(-1 < X < 1) = \Phi\left(\frac{1 - 0.7}{1.8}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - 0.7}{1.8}\right) = \Phi\left(\frac{0.3}{1.8}\right) - \Phi\left(-\frac{1.7}{1.8}\right) =$$

$$= \Phi(0.167) + \Phi(0.944) = 0.06618 + 0.32753 = 0.39371;$$

$$P(0 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2 - 0.7}{1.8}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 0.7}{1.8}\right) = \Phi\left(\frac{1.3}{1.8}\right) - \Phi\left(-\frac{0.7}{1.8}\right) =$$

$$= \Phi(0.722) + \Phi(0.389) = 0.26492 + 0.15132 = 0.41624.$$

Таким образом, случайная величина X вероятнее примет значения из интервала $(0; 2)$, чем из интервала $(-1; 1)$.

5. Литература.

1. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. - Мн.: Выш. шк., 1993. - 269 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш.шк., 1991.
3. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. -Мн.: Выш.шк., 1976.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М., 1979.
5. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике. -Мн.: Выш.шк., 1992.
6. Колемаев В.А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш., шк., 1991.- 400 с.
7. Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. - М., "Статистика", 1976 - 431 с.

Содержание

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Т.А. Тузик, доцент,
А.В. Санюкевич, к.ф.-м.н.,
Г.Р. Емельянова, ассистент,
Р.А. Гоголинская, ассистент

Теория вероятности
Методические указания и задания к контрольным работам
по курсу " Теория вероятности " для студентов экономических
специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Т.А. Тузик
Редактор Т.В. Строкач

Подписано к печати 18.12.98 г. Формат 60х84/16. Бумага писчая № 1.
Усл. п. л. 1.6. Уч. изд. л. 1,75. Заказ № 37. Тираж 150 экз.
Бесплатно. Отпечатано на ротапринте Брестского политехническог
института.
224017. Брест, ул. Московская, 267.