*для любых* $t\in[0;h_n)$. *Тогда для решений задачи Коши* (4) $X_n(t)$ *и решения уравнения* (2) $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T}\mathsf{E}[X_n(t)-X(t)]^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}\mathsf{E}[X_{n0}(t)-x]^2+C/(n^{2/3}h_n^{1/3})+C(K(n,h_n)-(2\theta-1))^2$$

<u>*Теорема 8.*</u> *Пусть* $\theta\in[1/2;\infty)$, $f\in C_B^2(\mathbf{R})$ *и* $g\in C_B^1(\mathbf{R})$. *Если* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n^2=o(h_n)$, *причем* $\sup_{t\in[0,h_n)}\mathsf{E}[X_{n0}(t)-x]^2\to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши* (4) *в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t\in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность* $K(n, h_n)$.

**Литература**

1. В.С. Пугачев, И.Н. Синицын. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука,1990.630 с.

2. И.И. Гихман, А.В. Скороход. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев. Наукова думка,1982. 611 с.

3. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л. О приближении решений одного класса стохастических уравнений // Сиб. матем. журнал – 2001. – Т. 42, №1. – С.87-102

4. Ковальчук А.Н., Лазакович Н.В., Лаппо Д.П. Новые классы стохастических интегралов. // AMADE-2001: Тез. докл. межд. мат. конф., Минск, 15 – 20 февраля 2001 г. – Минск, 2001. – С. 84-85.

5. С. Ватанабэ, Н. Икэда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.

## СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

**А.В. Кот**

*(БрГУ, г. Брест)*

Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+\beta x(t)+\gamma x^3(t)=F(\sin t,\cos t) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$x(0)=x(2\pi),\ x'(0)=x'(2\pi), \qquad (2)$$

где $x(t)$ – $2\pi$ - периодическая дважды дифференцируемая по $t$ функция.

Разобьем отрезок $[0,2\pi]$ на $N$ частичных отрезков точками $t_i$ ($i=\overline{0,N}$). Аппроксимируем первую и вторую производную в дифференциальном уравнении (1) линейными комбинациями значений $x(t_i)$ ($i=\overline{0,N}$) следующим образом

$$\dot{x}(t_i)=\sum_{j=0}^{N_A} c_j^1 x(t_{i+j-l}), \tag{3}$$

$$\ddot{x}(t_i)=\sum_{j=0}^{N_A} c_j^2 x(t_{i+j-l}), \tag{4}$$

где $N_A$ – количество точек аппроксимации функции, а $l$ – номер точки, по которой производится аппроксимация. Заметим, что наиболее точно производная будет аппроксимирована в случае, когда $l=\left[\frac{N_A}{2}\right]$.

Значения коэффициентов $c_j^1$ и $c_j^2$ $(j=\overline{0,N})$ определяем с помощью метода неопределенных коэффициентов, как показано в [1]. При этом решается следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_0+c_1+...+c_n=0, \\ c_0t_0+c_1t_1+...+c_nt_n=0, \\ .................................. \\ c_0t_0^{k-1}+c_1t_1^{k-1}+...+c_nt_n^{k-1}=0, \\ c_0t_0^k+c_1t_1^k+...+c_nt_n^k=k!, \\ c_0t_0^{k+1}+c_1t_1^{k+1}+...+c_nt_n^{k+1}=(k+1)!t_i, \\ c_0t_0^{k+2}+c_1t_1^{k+2}+...+c_nt_n^{k+2}=\frac{(k+2)!}{2!}t_i^2, \\ .................................................. \\ c_0t_0^n+c_1t_1^n+...+c_nt_n^n=\frac{n!}{(n-k)!}t_i^{n-k}, \end{cases}$$

где $n$ – количество точек аппроксимации производной, а $k$ – порядок производной.

Осуществляя, таким образом, дискретизацию задачи (1) – (2), получим систему нелинейных уравнений вида

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} c_j^2 x_{i+j}+\alpha\sum_{j=0}^{n} c_j^1 x_{i+j}+\beta x_i+\gamma x_i^3-F(sin\,t_i,cos\,t_i)=0, \quad i=\overline{0,N-1}, \\ x_0-x_N=0. \end{cases} \tag{5}$$

Решив полученную систему нелинейных уравнений (5) одним из методов, рассмотренных в [2], получим значения $x_i$, которые являются численным решением дифференциальной задачи (1) – (2) в системе точек $t_i$ $(i=\overline{0,N})$.

Часто вместо решения в численном виде выгоднее иметь его представление в аналитическом виде. Для этого можно воспользоваться следующими способами аппроксимации решения:

1. С помощью полинома Ньютона

$$x(t)=x_0+(t-t_0)x(t_0,t_1)+...+(t-t_0)(t-t_1)...(t-t_{n-1})x(t_0,t_1,...,t_n),$$

где $x(t_0,t_1,...,t_n)$ – разностное отношение $n$–го порядка функции $x(t)$.

2. С помощью ряда Фурье

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=l}^{N_G}\left(a_n\,cos\frac{\pi nt}{l}+b_n\,sin\frac{\pi nt}{l}\right),$$

где $N_G$ – количество гармоник ряда Фурье, а $l=\frac{\pi}{\omega}$ – полупериод функции $x(t)$.

Коэффициенты $a_n$ и $b_n$ можно вычислить, используя, например, квадратурные формулы трапеций:

$$a_0=\frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i+x_{i+1}),$$

$$a_n=\frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(x_i\cos\frac{4\pi ni}{N}+x_{i+1}\cos\frac{4\pi n(i+1)}{N}\right),$$

$$b_n=\frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(x_i\sin\frac{4\pi ni}{N}+x_{i+1}\sin\frac{4\pi n(i+1)}{N}\right).$$

3. С помощью кубического сплайна [3]

$$s(t)=x_i+\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1})\right)(t-t_i)+\frac{m_i}{2}(t-t_i)^2+\frac{m_{i+1}-m_i}{6h}(t-t_i)^3,$$

где $m_i=\ddot{x}(t_i)$ – коэффициенты сплайна, которые можно вычислять стандартным способом, решая следующую систему линейных уравнений:

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=12x(t_{i-1},t_i,t_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1}, \qquad (6)$$

где $x(t_{i-1},t_i,t_{i+1})$ – вторая разделенная разность функции $x(t)$.

Система уравнений (6) – это система $N-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $N+1$ неизвестных $m_i$, $i=\overline{1,N-1}$. Недостающие два уравнения можно получить из следующих соображений:

Так как функция $x(t)$ – периодическая, то $m_0=m_N$ и $m_{N+1}=m_1$. В этом случае систему (6) удобно решать методом прогонки.

Предположим, что на концах отрезка функция $x(t)$ имеет нулевую кривизну, т.е. $\ddot{x}(t_0)=m_0=0$ и $\ddot{x}(t_N)=m_N=0$. В этом случае система (6) также решается методом прогонки.

Заметим, что коэффициенты $m_i$ $(i=\overline{1,N-1})$ можно вычислять, используя формулы (4). При этом нет необходимости в решении системы линейных уравнений (6), т.к. все коэффициенты вычисляются напрямую.

Как показал опыт, лучшим методом для определения коэффициентов $m_i$ является именно последний метод.

4. С помощью естественного периодического сплайна $n$-ой степени [4]

$$S(t)=x_0+\sum_{k=0}^{m}a_k(t-t_0)^k+\sum_{n=1}^{N-1}b_n(t-t_n)_+^m, \tag{7}$$

где $\varphi_+=\frac{1}{2}(\varphi+|\varphi|)=\begin{cases}\varphi, если\,\varphi>0,\\ 0, если\,\varphi\le 0.\end{cases}$

Коэффициенты $a_k$ и $b_k$ сплайна получаем, решая следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{m}a_k(t_p-t_0)^k+\sum\limits_{n=1}^{p-1}b_n(t_p-t_n)^m=x_p-x_0,\ p=\overline{1,N},\\ \sum\limits_{k=p}^{m}\frac{k!}{(k-p)!}a_k(t_N-t_0)^{k-p}+\frac{m!}{(m-p)!}\sum\limits_{n=1}^{N-1}b_n(t_N-t_n)^{m-p}=p!a_p,\\ p=\overline{0,m-1}.\end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что система (8) плохо обусловлена. В связи с этим вместо системы (8) вида $AX=B$ на практике лучше решать систему вида $(\alpha E+A^TA)X=A^TB$, $\alpha>0$, $\alpha<<1$.

После того, как решение записано в аналитическом виде, его можно подставить в дифференциальную задачу (1) – (2) и оценить полученную погрешность.

При этом погрешность можно оценить либо только в узлах исходной сетки, либо на всем отрезке $[0,2\pi]$ в норме $L_2$. Очевидно, что второй способ предпочтительнее в связи с его большей строгостью.

Как показал вычислительный эксперимент, лучшими оказались методы аппроксимации решения с помощью кубического сплайна и естественного периодического сплайна невысокой степени.

**Литература.**

1. И.С. Березин, Н.П. Житков. Методы вычислений, т. 1. – М.: Наука, 1966.
2. В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов. Сплайн-аппроксимация функций: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1983.

# О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОДНОМЕРНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ G ВРАЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА $^2R_4$.

**О.Н. Курочка**

*(БрГУ, г.Брест)*

Классификация связных подгрупп Ли группы $G$ имеется. При классификации применялся метод линеаризаций, т.е. классифицировались подалгебры алгебры $\vartheta$ с точностью до сопряженности. Поэтому задача состоит в выделении из подгрупп группы $G$ таких, которые имеют образ стационарности из обобщенных флагов. Следовательно, надо уметь находить плоскости и векторные подпространства, инвариантные относительно данной подгруппы, а затем выделить те, которые образуют образ стационарности. Для решения этой задачи опять применим метод линеаризации.

Для нахождения одномерных инвариантных подпространств получаем следующее матричное уравнение $X\cdot C=\lambda X$, где $X$-произвольный элемент из $^2E_4$, а $C$- произвольный элемент из алгебры Ли исследуемой подгруппы.

Для нахождения двумерных инвариантных подпространств получаем систему: $X\cdot C=\lambda X+\mu Y$, $Y\cdot C=\nu X+\sigma Y$.

Получили следующие результаты. Подпространства, инвариантные относительно $G_1$ с алгеброй $\vartheta_1=\{i_{10}\}$, имеют вид: $\{i_1\}$, $\{i_1,i_2\}$, $\{i_3,i_4\}$, $\{i_1,i_3,i_4\}$, $^2E_4$. Относительно $G_2$ с алгеброй $\vartheta_2=\{i_5\}$: $\{\lambda i_3+\mu i_4\}$, $\{i_1,i_2\}$, $\{i_3,i_4\}$, $\{i_1,i_2,\lambda i_3+\mu i_4\}$, $^2E_4$. Относительно $G_3$ с алгеброй $\vartheta_3=\{i_6\}$: $\{i_1 \pm i_3\}$, $\{\lambda i_2+\mu i_4\}$, $\{i_1\pm i_3,\lambda i_2+\mu i_4\}$, $\{i_1,i_3\}$, $\{i_2,i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3,i_2,i_4\}$, $\{\lambda i_2+\mu i_4,i_1,i_3\}$, $^2E_4$. Относительно $G_4$ с алгеброй $\vartheta_4=\{i_8-i_{10}\}$: $\{\lambda i_1+\mu(i_2-i_4)\}$, $\{i_2-i_4,\lambda i_1+\mu i_3\}$, $\{\lambda i_1+\mu(i_2-i_4)\}^{\perp}$, $^2E_4$. Относительно $G_5$ с алгеброй $\vartheta_5=\{i_5-i_7\}$: $\{\lambda(i_2-i_4)+\mu i_3\}$, $\{i_2- i_4,\lambda i_1+\mu i_3\}$, $\{\lambda(i_2-i_4)+\mu i_3\}^{\perp}$, $^2E_4$. Относительно $G_6$ с алгеброй $\vartheta_6=\{i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$: $\{\lambda(i_1+i_3)+ \mu(i_2-i_4)\}$, $\{\nu(i_1+i_3)- \lambda(i_2-i_4), \lambda i_1-(1+\nu)i_2+i_4\}$, $\{i_1-\lambda i_2,i_2-i_4+\lambda(i_1+i_3)\}$, $\{i_2-i_4,\lambda i_1+\mu i_3\}$, $\{i_1+i_3,\lambda i_2+\mu i_4\}$, $\{\lambda(i_1+i_3)+ \mu(i_2-i_4)\}^{\perp}$, $^2E_4$. Относительно $G_7$ с алгеброй $\vartheta_7=\{i_5+i_{10}\}$: $\{i_1+i_2\}$, $\{i_3-\lambda i_1-\mu i_2,i_4+\mu i_1+\lambda i_2\}$, $^2E_4$. Относительно $G_8$ с алгеброй $\vartheta_8=\{i_6 -i_9\}$: