Если $c_1(n)$, $c_2(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (5), то решение уравнения (5) имеет вид

$$x(n) = c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n),$$

где $\Delta x_i(n)$ $(i = 1,2)$ находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n) = \frac{2c_2(n+1)P(n)}{nW}, \quad \Delta x_2(n) = -\frac{2c_1(n+1)P(n)}{nW}, \quad \text{где}$$

$$P(n) = [c_1(n+1)x_1(n) + c_2(n+1)x_2(n)]^2 - x_1(n)(c_1(n+1))^2 - x_2(n)(c_2(n+1))^2,$$
$$W = c_1(n+1)c_2(n+2) - c_1(n+2)c_2(n+1).$$

<u>Пример 2.</u> $x(n+3) + x(n)x(n+2) - x^2(n+1) + 1 = 0.$ (6)

Если $c_1(n)$, $c_2(n)$, $c_3(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (6), то решение имеет вид

$$x(n) = c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n) + c_3(n)x_3(n),$$

где $\Delta x_i(n)$ $(i = \overline{1,3})$ находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n) = \frac{W_1}{W}G(n),$$
$$\Delta x_2(n) = -\frac{W_2}{W}G(n),$$
$$\Delta x_3(n) = \frac{W_3}{W}G(n),$$
$$G(n) = -(c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n) + c_3(n)x_3(n))\cdot(c_1(n+2)x_1(n) + c_2(n+2)x_2(n) + c_3(n+2)x_3(n)) -$$
$$-(c_1(n+1)x_1(n) + c_2(n+1)x_2(n) + c_3(n+1)x_3(n))^2 + x_1(n)[c_1(n)c_1(n+2) - (c_1(n+1))^2 + 1] +$$
$$+ x_2(n)[c_2(n)c_2(n+2) - (c_2(n+1))^2 + 1] + x_3(n)[c_3(n)c_3(n+2) - (c_3(n+1))^2 + 1]$$

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Л.В. Дорошева
(МГПИ, г. Мозырь)

В математическом моделировании систем дистанционного зондирования [1-3] особый интерес представляет обратная задача: "восстановление" исходного изображения по результатам регистрации излучения бортовыми приборами космического аппарата. Математическая формулировка этой задачи сводится к интегральному уравнению первого рода

$$Au = f, u \in U, f \in F, \qquad (1)$$

где u - искомая функция; f - известная функция (входные данные, т.е. регистрируемое излучение); A - линейный оператор преобразования $U \to F$; U и F - метрические пространства. Поскольку f - результат эксперимента и известен приближенно, задача (1) оказывается некорректной [4] и необходима регуляризация ее решения. Обычно полагают $F \subset L_2$; принадлежность U к конкретному функциональному пространству определяется порядком регуляризации [4].

Метод преобразований Фурье позволяет получить регуляризованное решение обратной задачи (1) в виде [4]

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}(\omega)\check{K}(\omega)\exp[i(\omega, x)]}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} d\omega \qquad (2)$$

где $L(\omega) = \check{K}(\omega)\check{K}(-\omega)$, $M(\omega) = M(-\omega), M(\omega) > 0$ при $\omega \neq 0$; $\check{f}(\omega)$ и $\check{K}(\omega)$ - двумерные фурье-образы входной функции $f(x)$, $x = (x_1, x_2); \omega = (\omega_1, \omega_2)$ и функции влияния (в оптике - рассеяния) точечного источника $K(x_1 - s_1, x_2 - s_2)$; $M(\omega)$ - регуляризирующая функция; $\alpha > 0$ - параметр регуляризации.

Данная работа посвящена разработке способа выбора параметра регуляризации и регуляризирующей функции на основе учета предельных "изобразительных" возможностей оптического звена ОЭС.

Пусть входные данные $\tilde{f}(x)$, описывающие некоторый ландшафт земной поверхности, имеет детерминированную и случайную составляющие. Будем полагать, что детерминированная составляющая $\bar{f}(x)$ задана дискретно и аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. Пусть составляющая $\bar{f}(x)$ имеет резкий скачок в альбедо в направлении оси x_1: $q(x_1) = \bar{q}$, если $x_1 < 0$, и $\tilde{q}(x_1) = \bar{q} + \Delta q$, если $x_1 \geq 0$.

В силу разных причин возникают временные вариации альбедо и интенсивности света, попадающего на приемник излучения при $x_1 > 0$. Вдали от границы раздела областей с разными альбедо угловые отклонения направлений отраженного потока (строго говоря, - максимума индикатрисы отражения) во времени и в пределах апертурного угла усредняются. Вблизи границы скачка в поле зрения объектива будут попадать одновременно точки поверхности с разными альбедо ($\overline{q}$ и $\widetilde{q}$); картина резкого перехода при $x_1 = 0$ окажется несколько размытой (аналогичные явления имеют место при учете статистических факторов зернистости фотоматериалов [7]). Для учета процесса размытия границы перехода без привлечения автокорреляционной функции и энергетического спектра случайной функции, введем "эффективную" функцию размытия линии $q(s)$. Это позволяет рассматривать результирующую функцию как свертку "эффективной" функции рассеяния с детерминированным сигналом $\bar{f}(x)$:

$$\widetilde{f}(x) = (q * \bar{f})(x) \tag{3}$$

Положим, следуя [8], $\breve{q}(\omega) = F[q(s)]$ в виде $\breve{q}(\omega) = \exp(-\alpha|\omega|)$.

Здесь в общем случае двумерного скачка $|\omega| = |\omega_1| + |\omega_2|$, а для аппроксимации функции "размытия точки" принята зависимость

$$q(s_1, s_2) = \left[\pi^2\alpha^2(1+\frac{s_1^2}{\alpha^2})(1+\frac{s_2^2}{\alpha^2})\right]^{-1}, \tag{4}$$

где параметр $\alpha > 0$ характеризует размер пятна рассеяния оптического звена.

В интерпретации (3) функции $\widetilde{f}(x)$ задача (1) оказывается поставленной корректно, а ее решение может быть представлено в виде

$$\widetilde{u}(x) = F^{-1}\left[\frac{\breve{f}(\omega)\exp(-\alpha|\omega|)}{\breve{K}(\omega)}\right] \tag{5}$$

где F^{-1} - оператор обратного преобразования Фурье и учтено, что реальная ОЭС передает ограниченный спектр пространственных частот $|\omega| \in [0, \omega_n]$($\omega_n$ - предельная передаваемая частота) и в силу этого $1/|\breve{K}(\omega)| < \infty$. Как известно [4], регуляризирующая функция $\varphi(\alpha, \omega)$, в частности $\alpha M(\omega)$, должна удовлетворять определенным условиям. Нетрудно доказать, что $\exp(-\alpha|\omega|)$ удовлетворяет всем условиям, кроме $\forall\alpha > 0$ $\frac{\varphi(\alpha,\omega)}{\breve{K}(\omega)} \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим это требование. Функция принадлежит пространству Лебега, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\varphi(\alpha,\omega)}{\breve{K}(\omega)}\right|^2 d\omega<\infty \tag{6}$$

В [2] и [8, 9] предложены аппроксимации

$$\left|\breve{K}(\omega)\right|=\sum_{k=1}^{n}a_k\exp(-b_k|\omega|), \tag{7}$$

где $b_k>0$ для $\forall k$, а коэффициенты a_k и b_k в (7) выбираются такими, что $b_k\to\infty, a_k\to 0$ при $k\to\infty$. При $\omega\to\omega_n$ в (7) остается только одно слагаемое $a_1\exp(-b_1|\omega_n|)$. Условие (6) дает оценку параметра α при $\omega=\omega_n$

$$\alpha>2b_1. \tag{8}$$

При условии (8) $\exp(-\alpha|\omega|)$ удовлетворяет всем требованиям к регуляризирующим функциям и, следовательно, (5) - регуляризирующий функционал. Функционал (5), как и (2), дает приближенное решение задачи (1) и, в общем случае, $u_\alpha(x)\neq\tilde{u}(x)$. Наложив условие $u_\alpha(x)=\tilde{u}(x)$ и, сравнивая (2) и (5), получим выражение для регуляризирующей функции:

$$M(\omega)=\left|\breve{K}(\omega)\right|^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\frac{|\omega|^n}{n!}\approx\left|\breve{K}(\omega)\right|^2\sum_{m=0}^{p}\alpha^m\frac{|\omega|^{m+1}}{(m+1)!}, \tag{9}$$

где p - порядок регуляризации.

Функционалы (2) и (5) дают сглаженные решения задачи (1). Для ОЭС физически это означает потерю в решении информации о высших гармониках изображения, что эквивалентно расфокусировке оптической системы и потере разрешающей способности. Во избежание излишнего сглаживания в (9) целесообразно ограничиться регуляризацией, например, первого порядка. Тогда решение $\tilde{u}\in U$, а $U\subset W_2^1$ и $\tilde{u}(x)$ равномерно сходится к $u_\alpha(x)$ при $\alpha\to 0$.

При аппроксимации (7) для вычисления коэффициентов a_1 и b_1 удобно воспользоваться двумя опорными частотами: верхней $\omega^{в}=\omega_n$ и нижней $\omega^{н}=\omega_n/2$, что дает

$$b_1\approx\frac{2}{\omega_n}\ln\left|\frac{\breve{K}(\omega_n/2)}{\breve{K}(\omega_n)}\right|.$$

Тогда для значения параметра α, согласованного с функцией $\breve{K}(\omega)$, получаем оценочную зависимость .

$$\alpha \approx \frac{4}{\omega_n} \ln \left| \frac{\breve{K}(\omega_n/2)}{\breve{K}(\omega_n)} \right|. \tag{10}$$

В ряде случаев известна не $\breve{K}(\omega)$, а функция влияния $K(s)$. Аппроксимируя $K(s)$ функцией $q(x)$ из (5) и рассматривая $K(s)$ на уровне полуширины функции влияния, т.е. $K(s_0) = 1/2K(0)$, находим $\alpha = s_0$, где $2s_0$ - размер пятна рассеяния оптического звена на уровне 1/2 высоты функции влияния.

Полученные зависимости для $M(\omega)$ и α позволяют уменьшить поле искомых значений параметра и, тем самым, сократить объем вычислений.

Литература.

1. Креков Г.М., Орлов В.М., Белов В.В., и др. Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования. Новосибирск: Наука, 1988. 185 с.
2. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А., Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. Росс Ю.К., Князихин Ю.В., Кууск А.Э. и др. Математическое моделирование переноса радиации в растительных средах. С.-П.: Гидрометеоиздат, 1990. 198 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
5. Грынь В.И. О двухшаговых итерационных методах регуляризации// Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1992. Т. 32. №11. С. 1821-1824.
6. Семенчева О.П., Смолик Ч.К. Решение одномерных интегральных уравнений первого рода типа свертки совместным применением метода регуляризации А.Н. Тихонова и метода экстраполяции// Весці АН БССР. 1990. №6. С. 117.
7. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. М.: Мир, 1966. 254 с.

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ ПЯТИДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Н.А. Илючик, В. М. Мадорский

(БрГУ, г. Брест)

Рассмотрим краевую периодическую задачу Дуффинга:

$$x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma x = F(\sin t, \cos t) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = A_1, \\ \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = A_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Заменив дифференциальную краевую задачу ее разностной аппроксимацией на сетке, получим систему нелинейных уравнений. При решении нелинейной системы квазиньютоновскими методами на каждой итерации необ-