3. силовская q-подгруппа $<b>$ единственная ; она нормальна в G;

4. силовских p-подгрупп одна или q;

5. если $<a>$ силовская p-подгруппа, то $a^{-1}ba = b^r$ $(1 \le r < q)$, причем если $r = 1$, то $G = <ab>$.

Пусть p и q - простые числа, $p < q$, а r удовлетворяет сравнению $x^p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$ и H_r - группа с образующими a и b и определяющими соотношениями:

$$a^p = b^q = e, \quad a^s b^t \cdot a^u b^v = a^{s+u} b^{tr^u+v}.$$

Тогда H_r - абелева группа порядка pq и отображение, заданное формулой $f(a^s b^t) = a^{ms} b^t$ изоморфно.

Таким образом, возможны следующие типы групп порядка $pq(p < q)$:

1. при $q \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ существует лишь один тип групп порядка pq - циклические;

2. при $q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ существует два типа групп порядка pq:

а) циклические; б) неабелевы.

Отсюда следует, что существуют только две неизоморфные группы 6-го порядка – циклическая и симметрическая и существует лишь одна группа 15-го порядка – циклическая.

Литература.

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.

РЯДЫ ФУРЬЕ УСИЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ

Р. Ю. Плотников

(БГТУ, г. Брест)

Часто при решении прикладных задач, в которых функция представляется рядом Фурье, приходится тратить много времени на вычисление большого количества членов ряда Фурье для достижения требуемой точности. Однако, существуют методы, позволяющие уменьшить объем вычислений за счет замены функции быстро сходящимся рядом Фурье или путем усиления сходимости ряда Фурье.

Применение рядов Фурье с быстро убывающими коэффициентами удобно, так как для вычисления суммы ряда достаточно вычислить только несколько первых членов ряда Фурье. При этом чем быстрее убывают коэффициенты, тем меньше членов ряда нужно удержать для отыскания его суммы с требуемой степенью точности.

Однако, несколько большее время затрачивается на приведение функции к быстро сходящемуся ряду Фурье или усиление сходимости ряда, чем в случае с медленно сходящимся рядом Фурье, полученным стандартными методами. Тем не менее эти затраты времени компенсируются упомянутым выше отсутствием необходимости вычислять большое количество членов ряда.

Важность быстроты сходимости рядов Фурье.

Как было отмечено, в приложениях наиболее удобны ряды Фурье с быстро убывающими коэффициентами, так как в этом случае несколько первых членов достаточно точно определяют его сумму.

Кроме этого, в конкретных задачах часто возникает необходимость в почленном дифференцировании ряда Фурье. Каждое такое дифференцирование понижает порядок убывания коэффициентов Фурье на одну единицу.

Следует отметить, что почленное интегрирование ряда Фурье всегда допустимо, при этом получается ряд, коэффициенты которого имеют порядок убывания на одну единицу более высокий, чем порядок убывания коэффициентов исходного ряда.

Быстрота убывания коэффициентов Фурье периодической функции $f(t)$ определяется дифференциальными свойствами этой функции. А именно, если $f(t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до (m – 1)-го порядка включительно, то коэффициенты Фурье функции $f(t)$ имеют порядок убывания не ниже, чем $\frac{1}{k^{m+1}}$. Следовательно, для того, чтобы иметь быстро сходящийся ряд Фурье для функции $f(t)$, нужно добиться непрерывности как функции $f(t)$, так и ее первых производных.

Метод А.С. Малиева разложения функций в быстро сходящийся ряд Фурье.

Предположим, что функция $f(t)$ задана на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ и имеет в нем непрерывные производные до (m – 1)-го порядка и m-ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле. Такой выбор интервала задания функции не ограничивает общности, так как если $f(t)$ задана на любом интервале [α, β], то, совершив замену аргумента t на θ по формуле $t=\frac{2(\beta-\alpha)}{T}\theta+\alpha$, придем к функции $\psi(\theta)$, заданной уже на интервале $\left[0,\frac{T}{2}\right]$.

Для того, чтобы разложить в ряд Фурье функцию $f(t)$, заданную на интервале $\left[0,\frac{T}{2}\right]$, нужно эту функцию с помощью некоторой функции $g(t)$ продолжить в отрицательный интервал $\left[-\frac{T}{2},0\right]$, в результате чего получится функция

$$F(t)=\begin{cases} g(t), & -\frac{T}{2}\le t<0, \\ f(t), & 0\le t\le\frac{T}{2}, \end{cases}$$

заданная на интервале $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. Если нет заинтересованности в каком-либо специальном характере ряда Фурье, с помощью которого требуется представить функцию $f(t)$ (может, например, встретиться необходимость разложить $f(t)$ в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам, что предполагает соответственно четное или нечетное продолжение $g(t)$ функции $f(t)$), то можно продолжить ее на интервал $\left[-\frac{T}{2},0\right]$ с помощью любой функции $g(t)$.

Положим, что функция $g(t)$ на интервале $\left[-\frac{T}{2},0\right]$ имеет непрерывные производные до (m – 1)-го порядка и m -ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле. Однако теперь, несмотря на то, что функции $f(t)$ и $g(t)$ обладают каждая в своем интервале задания "хорошими" дифференциальными свойствами, периодическая функция $\varphi(t)$, получающаяся при периодическом продолжении $f(t)$ с интервала $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ на всю ось t, может такими свойствами не обладать. В точках $t=\nu\frac{T}{2},(\nu=0,\pm1,\pm2,...)$ функция $\varphi(t)$ может иметь разрывы; если $\varphi(t)$ непрерывна в этих точках, то в них могут иметь разрывы производные $\varphi(t)$ порядка ниже, чем (m – 1), что не позволит получить для $\varphi(t)$ достаточно быстро сходящийся ряд Фурье.

Потребовав теперь дополнительно, во-первых, чтобы $g(t)$ и $f(t)$ и их производные до (m – 1)-го порядка имели одинаковые значения соответственно в точках $t=-\frac{T}{2}$ и $t=+\frac{T}{2}$, т.е. потребовав выполнения $2m$ условий

$$g(0)=f(0),\ g\left(-\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right),$$

$$g'(0)=f'(0),\ g'\left(-\frac{T}{2}\right)=f'\left(\frac{T}{2}\right),$$

$$g''(0)=f''(0),\ g''\left(-\frac{T}{2}\right)=f''\left(\frac{T}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g^{(m-1)}(0)=f^{(m-1)}(0),\ g^{(m-1)}\left(-\frac{T}{2}\right)=f^{(m-1)}\left(\frac{T}{2}\right).$$

добьемся того, что периодическая функция $\varphi(t)$ будет иметь непрерывные производные до (m – 1)-го порядка и m -ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле.

Коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$ будут иметь в этом случае порядок убывания не ниже, чем $\frac{1}{k^{m+1}}$, а так как ряд Фурье $\varphi(t)$ в интервале $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ сходится к функции $f(t)$, то для последней получим ряд Фурье усиленной сходимости [1].

Из изложенного следует, что "улучшающая" функция $g(t)$, ограниченная поставленными условиями, остается достаточно произвольной в отношении своего вида. В частности, независимо от вида $f(t)$, можно брать в качестве $g(t)$ алгебраический многочлен. Удовлетворение $2m$ условиям требует лишь, чтобы многочлен $g(t)$ содержал $2m$ подлежащих определению коэффициентов, т.е. был бы ($2m$ – 1)-ой степени

$$g(t)=A_0t^{2m-1}+A_1t^{2m-2}+\ldots+A_{2m-2}t+A_{2m-1}.$$

Для упрощения процесса преобразования функции в быстро сходящийся ряд Фурье автором разработана программа для вычисления на ЭВМ коэффициентов «улучшающего» многочлена.

Работа выполнена под руководством профессора кафедры высшей математики А. И. Тузика.

Литература.

1. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для ВТУЗов – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.