СИСТЕМЫ С ОТРАЖАЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕЙ СОБОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ МАТРИЧНЫХ ЭКСПОНЕНТ

Э. В. Мусафиров

(ГГУ, г. Гомель)

Данная работа посвящена исследованию периодических дифференциальных систем на наличие периодических решений и их устойчивость с помощью отражающей функции (ОФ) [1].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где $P(t)$ – непрерывно дифференцируемая необходимое число раз матрица.

Известно [2], что отражающую матрицу (ОМ) любой системы (1) можно представить в виде $F(t) \equiv e^{S(t)}$, где $S(t)$ – нечетная $n \times n$-матрица.

Значит, ОМ любой системы (1) можно представить в виде

$$F(t) \equiv e^{\sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i \alpha_i(t)}, \tag{2}$$

где A_i – некоторые постоянные $n \times n$-матрицы, $\alpha_i(t)$ – некоторые нечетные непрерывно дифференцируемые необходимое число раз скалярные функции (например, функции t, $\sin t$, $\sin 2t$, ..., которые целесообразно использовать при изучении 2π-периодических систем (1)).

Задача отыскания для системы (1) ОМ в виде (2) достаточно сложна. Поэтому, целесообразно среди систем (1) выделить те системы, ОМ которых представима в виде $F(t) \equiv \prod\limits_{i=0}^{m} e^{A_i \alpha_i(t)}$, где A_i, $i = \overline{0,m}$ – постоянные $n \times n$-матрицы, $\alpha_i(t)$, $i = \overline{0,m}$ – нечетные непрерывно дифференцируемые необходимое число раз скалярные функции. Производная такой матрицы достаточно проста и это облегчает нахождение самой матрицы $F(t)$ и основного соотношения (ОС) [1].

Введем обозначения: $K := -2P(0)$, $L := 4\big(P(0)\dot{P}(0) - \dot{P}(0)P(0)\big) - 2\ddot{P}(0)$.

<u>Лемма 1.</u> *Матрица $F(t) \equiv e^{A\,\alpha(t)} e^{B\beta(t)}$, где A, B — постоянные $n \times n$-матрицы; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — скалярные нечетные трижды непрерывно диффе-*

ренцируемые на $\mathbf{R}$ *функции, причем* $\dot{\alpha}(0)\neq 0$, $\dot{\beta}(0)\neq 0$, $\dot{\alpha}(0)\ddot{\beta}(0)\neq\dot{\beta}(0)\ddot{\alpha}(0)$, *является ОМ системы (1) тогда и только тогда, когда* $KL = LK$,

$$F(t)\left(A\,\dot{\alpha}(t)+B\dot{\beta}(t)+P(t)\right)\equiv -P(-t)F(t),\; A=\frac{K-\dot{\beta}(0)B}{\dot{\alpha}(0)},$$

$$B=\frac{\dot{\alpha}(0)L-\ddot{\alpha}(0)K}{\dot{\alpha}(0)\ddot{\beta}(0)-\dot{\beta}(0)\ddot{\alpha}(0)}.$$

<u>Теорема 1.</u> Матрица

$$F(t)\equiv e^{A\sin t}e^{B\sin 2t}, \tag{3}$$

где A, B *— постоянные* $n\times n$*-матрицы, является ОМ системы (1) тогда и только тогда, когда* $KL = LK$, $A=\dfrac{L+4K}{3}$, $B=-\dfrac{L+K}{6}$, $F(t)\left(A\cos t+2B\cos 2t+P(t)\right)\equiv -P(-t)F(t)$. *Причем, если* $2\pi\dfrac{p}{q}$*-периодическая система (1) (*$p,q\in\mathbf{N}$, $\dfrac{p}{q}$ *– несократимая дробь) имеет ОМ (3), то все решения этой системы* $2\pi p$*-периодические.*

<u>Теорема 2.</u> Матрица

$$F(t)\equiv e^{At}e^{B\sin t}, \tag{4}$$

где A, B *– постоянные* $n\times n$*-матрицы, является ОМ системы (1) тогда и только тогда, когда* $KL = LK$, $A = L+K$, $B=-L$, $F(t)\left(A+B\cos t+P(t)\right)\equiv -P(-t)F(t)$. *Причем, если* $2\pi p$*-периодическая система (1) (*$p\in\mathbf{N}$*) имеет ОМ (4), то матрица монодромии на периоде* $[-\pi p,\pi p]$ *есть* $F(-\pi p)=e^{-A\pi p}$, *и ее мультипликаторы* μ_i *находятся из уравнения* $\det\left(e^{-A\pi p}-\mu E\right)=0$.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим систему $\dot{x}=\begin{pmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{pmatrix}x$. Если

$$a(t)\equiv -\frac{1}{2}\left(l\cos t+2q\cos 2t\right)+2k_1\sin(s_1t)\cos(k\sin t+r\sin 2t)+$$
$$+\left(k_2\sin(s_2t)+k_3\sin(s_3t)\right)\sin(k\sin t+r\sin 2t),$$

$$b(t)\equiv \frac{1}{2}\left(k\cos t+2r\cos 2t\right)+2k_2\sin(s_2t)\cos(k\sin t+r\sin 2t)+$$
$$+\left(k_4\sin(s_4t)-k_1\sin(s_1t)\right)\sin(k\sin t+r\sin 2t),$$

$$c(t) \equiv -\frac{1}{2}(k\cos t + 2r\cos 2t) + 2k_3 \sin(s_3 t)\cos(k\sin t + r\sin 2t) +$$
$$+ (k_4 \sin(s_4 t) - k_1 \sin(s_1 t))\sin(k\sin t + r\sin 2t),$$
$$d(t) \equiv -\frac{1}{2}(l\cos t + 2q\cos 2t) + 2k_4 \sin(s_4 t)\cos(k\sin t + r\sin 2t) -$$
$$-(k_2 \sin(s_2 t) + k_3 \sin(s_3 t))\sin(k\sin t + r\sin 2t),$$

где $k, l, q, r, k_i, s_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,4}$, то по теореме 1 система имеет ОМ вида (3), где $A = \begin{pmatrix} l & -k \\ k & l \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix}$. Причем в этом случае $F(t) \equiv e^{l\sin t + q\sin 2t}\begin{pmatrix} \cos(k\sin t + r\sin 2t) & -\sin(k\sin t + r\sin 2t) \\ \sin(k\sin t + r\sin 2t) & \cos(k\sin t + r\sin 2t) \end{pmatrix}$. В случае, когда $s_i \in \mathbf{Z}$, $i = \overline{1,4}$, рассматриваемая система будет 2π-периодической с 2π-периодической ОМ. Тогда по теореме 1 все решения такой системы будут 2π-периодическими.

Полученные результаты для линейных дифференциальных систем можно распространить на нелинейные системы следующим образом.

Рассмотрим $2\pi\frac{p}{q}$-периодическую ($p, q \in \mathbf{N}$, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь) по t систему

$$\dot{x} = X(t,x),\ t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{5}$$

с непрерывно дифференцируемой по всем своим переменным функцией $X(t,x)$, для которой $X(t,0) = 0$. Согласно [3], если ОФ системы (5) линейна, то она является ОФ системы (1), где $P(t) \equiv \frac{\partial X}{\partial x}(t,0)$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть матрица $F(t)$ вида (3), где A, B, — постоянные $n \times n$-матрицы, является ОМ системы (1), где $P(t) \equiv \frac{\partial X}{\partial x}(t,0)$ и выполнено тождество

$$F(t)X(t,x) + X(-t, F(t)x) \equiv (F(t)P(t) + P(-t)F(t))x. \tag{6}$$

Тогда все решения системы (5) $2\pi p$-периодические.

Теорема 4. Пусть матрица $F(t)$ вида (4), где A, B — постоянные $n \times n$-матрицы, является ОМ системы (1), где $P(t) \equiv \frac{\partial X}{\partial x}(t,0)$. Тогда, 1) если $\forall i = \overline{1,n}$ $|\mu_i| < 1$, где μ_i, $i = \overline{1,n}$ решения уравнения $\det\left(e^{-A\pi\frac{p}{q}} - \mu E \right) = 0$, то решение $x \equiv 0$ системы (5) асимптотически устойчиво; 2) если $\exists i: |\mu_i| > 1$, то решение $x \equiv 0$ системы (5) неустойчиво; 3) если верно тождество (6) и $\exists i: \mu_i = 1$, то у системы (5) существует хотя бы одно однопараметрическое семейство $2\pi\frac{p}{q}$-периодических решений.

Литература.

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, Университетское, 1986. 86 с.

2. Вересович П.П. // Дифференц. уравнения. 1998. Т.34, №12. С. 2257 – 2259.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СИЛОВА

Т.Ф. Новик

(БрГУ, г. Брест)

В работе рассматривается возможность описать строение конечных групп при помощи теоремы Силова.

Определение 1. Если все элементы G имеют конечные порядки, являющиеся степенями одного и того же простого числа p, то говорят, что G является p-группой.

Определение 2. Если порядок конечной группы G делится на p^k ($k > 0$, p – простое число) и не делится на p^{k+1}, то всякая подгруппа группы G, имеющая порядок p^k, называется силовской подгруппой группы G относительно простого числа p или силовской p-подгруппой.

Если G-группа порядка pq, где $p < q$ - простые числа, то

1. силовские p-подгруппы и q-подгруппы циклические;

2. число силовских q-подгрупп равно $1 + kq$ (при некотором k) и делит pq; число силовских p-подгрупп равно $1 + lp$ (при некотором l) и делит pq;