$\{\lambda(i_1 \pm i_3)+\mu(i_2 \mp i_4)\}$, $\{i_4+\lambda i_1+\mu i_2, i_2-\lambda i_3+\mu i_4)\}$, $\{i_2 \pm i_4, \pm i_1+\lambda i_2+i_3)\}$, $\{i_2-i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2+i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_4+\lambda i_3, i_2-\lambda i_1\}$, $\{\lambda(i_1 \pm i_3)+\mu(i_2 \mp i_4)\}^{\perp}$, $\{i_1, i_3\}$,$\{i_2, i_4\}$, ${}^2E_4$. Относительно G_9 с алгеброй $\vartheta_9=\{i_5+\lambda i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1$: $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, ${}^2E_4$. Относительно G_{10} с алгеброй $\vartheta_{10}=\{i_6+\lambda i_9\}, \lambda \neq 0, \pm 1$: $\{i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_2, i_4\}$, $\{i_1+i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 \pm i_4, i_1, i_3\}$, ${}^2E_4$. Относительно G_{11} с алгеброй $\vartheta_{11}=\{i_5-i_7+i_8-i_{10}+2i_6-2i_9\}$: $\{i_1-i_3\}$, $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, ${}^2E_4$.Относительно G_{12} с алгеброй $\vartheta_{12}=\{i_6-i_9+\lambda(i_5-i_7)\}$, $\lambda \neq 0$: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2-i_4\}$, ${}^2E_4$. Относительно G_{13} с алгеброй $\vartheta_{13}=\{i_5+i_7+i_8-3i_{10}\}$: $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, ${}^2E_4$.

ОДНОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ

Л.И. Лавринович

(БГУ, г. Минск)

Пусть $T=[t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, – промежуток управления, N – натуральное, число, $h=(t^*-t_*)/N$ – промежуток квантования, $T_h=\{t_*, t_*+h, \ldots, t^*-h\}$ – квантованный промежуток управления. Скалярную функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем дискретным управлением с периодом квантования h, если $u(t)=u(t_*+kh)$, $t \in [t_*+kh, t_*+(k+1)h[$, $k=\overline{0, N-1}$.

В классе дискретных управлений рассмотрим линейную задачу оптимального управления

$$
\begin{aligned}
& c'x(t^*) \to \max, \\
& \dot{x} = A(t)x+b(t)u+w(t),\ x(t_*)=x_0, \\
& x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n : g_* \le Hx \le g^*\}, \\
& w(t) \in W = \{w \in R^n : w_* \le w \le w^*\}, \\
& u(t) \in U = \{u \in R : |u| \le 1\},\ t \in T.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $x=x(t)$ – n-вектор состояния системы управления в момент времени t, $u=u(t)$ – значение скалярного управляющего воздействия, $w(t)$ – n-вектор возмущения, $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, – $n \times n$-матричная и n-векторная кусочно-непрерывные функции соответственно, $H \in R^{m \times n}$,.

Будем предполагать, что 1) в процессе управления может реализоваться любое кусочно-непрерывное возмущение $w(t) \in W$, $t \in T$; 2) в каждый текущий момент $\tau \in T_h$ будет известно состояние системы $x(\tau)$; 3) до начала процесса управления известно, что в в некоторый наперед заданный момент замыкания t^1, будут доступны значения $x(t^1)$.

Требуется построить такое управление, чтобы 1) система в момент времени t^* попала на множество X^*, независимо от реализовавшегося возмущения; 2) гарантированное значение критерия качества задачи (1) было наибольшим.

Для простоты обозначений положим $t_*=t^0$, $t^*=t^2$, $X^2=X^*$. Определим множество X^1 (множество замыкания) по множеству X^2 следующим образом: $z \in X^1$ тогда и только тогда, когда система с помощью допустимого управления $u(t) \in U$, $t \in [t^1, t^2[$, из состояния $x(t^1)=z$ переводится в момент t^2 на множество X^2, не зависимо от реализовавшегося возмущения $w(t) \in W$, $t \in [t^1, t^2[$. Аналогичным образом по множеству X^1 определим множество X^0, как множество всех начальных состояний, из которых система в момент времени t^1 может быть переведена на множество X^1. Очевидно, задача (1) имеет допустимые управления в том и только том случае, если $x_0 \in X^0$.

Пусть τ – произвольный текущий момент. Обозначим $u^0(t \mid \tau, z)$, $t \in [\tau, t^*]$, – оптимальное программное управление в задаче

$$\begin{aligned} & c' x(t^2) \to \max, \\ & \dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t),\ x(\tau) = z, \\ & x(t^j) \in X^j,\ t^j > \tau, \\ & w(t) \in W,\ u(t) \in U;\ t \in [\tau, t^2]. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть X_τ – множество всех $z \in R^n$, для которых задача (2) имеет решения. Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau \mid \tau, z),\ z \in X_\tau,\ \tau \in T_h, \tag{3}$$

назовем оптимальным дискретным управлением типа замыкаемой обратной связи.

Под траекторией замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x(t)) + w(t),\ x(t^0) = x_0,$$

будем понимать решение линейного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t),\ x(t^0) = x_0,$$

с управлением

$$u^*(t) = u^0(t^0 + kh, x(t^0 + kh)), t \in [t^0 + kh, t^0 + (k+1)h[, k = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Функцию (4) назовем реализацией обратной связи (3) в конкретном процессе управления. Устройство, способное в режиме реального времени вычислять текущее значения оптимальной обратной связи, называется оптимальным регулятором.

Опишем подробнее процедуру построения множеств в точках замыкания. Предположим, что множество X^* можно описать следующим образом:

$$x = \sum_{i=1}^{s} z_i \beta_i, \quad (5)$$

где $z_i \in R^n$, $i = \overline{1,s}$, - некоторые фиксированные векторы, а скаляры β_i удовлетворяют следующему условию $d_{i*} \le \beta_i \le d_i^*$, $i = \overline{1,s}$.

Рассмотрим отрезок $[t^1, t^2]$. Формула Коши для уравнения (1) на этом отрезке имеет вид

$$x(t^2) = F(t^2)F^{-1}(t^1)x(t^1) + \int_{t^1}^{t^2} F(t^2)F^{-1}(\tau)(bu(\tau) + w(\tau))d\tau \quad (6)$$

Из (6) видно, что для того чтобы гарантировать переход системы на терминальное множество, необходимо выполнение следующих условий:

$$h_i x(t^2) \le \alpha_i - \max_{w \in W} h_i \int_{t^1}^{t^2} F(t^2)F^{-1}(\tau)w(\tau)d\tau, i = \overline{1,m}. \quad (7)$$

Таким образом, вместо множества X^2 определено некоторое вписанное в него множество $\underline{X}^2$. Из формулы (6) можно получить уравнение, описывающее множество X^1:

$$x(t^1) = F(t^1)F^{-1}(t^2)x(t^2) - \int_{t^1}^{t^2} F(t^1)F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau \quad (8)$$

Поскольку управление строится в классе дискретных функций и выполняется условие (5), то множество X^p можно записать следующим образом:

$$x(t^p) = \sum_{i=1}^{s} F(t^p)F^{-1}(t^*)z_i \beta_i + \sum_{j=1}^{q} l_j u_j, \quad (9)$$

где q – число точек переключения на интервале $[t^p, t^*]$, l_j - соответствующие интегралы (8). Таким образом, множество X^1 представимо в виде (5).

Применив описанную процедуру, можно построить множество X^0. Построив данные множества, можно сформулировать задачу оптимального управления для нахождения замыкаемой обратной связи. Оптимальные программное и позиционное гарантирующие управления с учетом замыкания являются решениями следующей экстремальной задачи

$$J(u) = \max_{w} c' x(t^*) \to \min_{u}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + bu, x(t^0) = x_0, \\ &x(t^k) \in \underline{X}^k, k = \overline{1, 2} \\ &|u(t)| \le 1, t \in T. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку решение ищется в классе дискретных функций, то для решения данной задачи применимы методы линейного программирования, что позволяет значительно упростить вычислительный процесс.

При исследовании данной задачи было отмечено, что при росте числа точек замыкания целевая функция уменьшается, однако при этом значительно возрастает размерность задачи линейного программирования. Кроме того, в ходе численных экспериментов было выяснено, что для построения хорошей аппроксимации замкнутой обратной связи достаточно небольшого числа точек замыкания, поскольку, начиная с некоторого числа, добавление еще одного замыкания незначительно улучшает критерий качества.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание // Автоматика и телемеханика, 1996. № 7. С. 121-130. II. Многократно замыкаемые обратные связи // Автоматика и телемеханика, 1996. № 8. С. 90-99.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О МГНОВЕННОМ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

А.В. Маковский

(БГУ, г. Минск)

1. Постановка задачи

Рассмотрим идеализированное представление о мгновенном точечном взрыве как о движении газа, которое вызвано мгновенным выделением конечной энергии в некоторой точке.