АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СГЛАЖЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ БАРТЛЕТТА

М.А. Акинфина

(БГУ, г. Минск)

Рассмотрим дискретный устойчивый симметричный стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{0,\pm 1,...\}$ с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$.

Пусть $x(1),x(2),\ldots,x(T)$ – $T=L\times M$ - последовательных наблюдений за процессом $X(t)$, $t\in Z$, которые разбиты на L равных непересекающихся отрезков, содержащих по $M=2k(n-1)+1$ наблюдений (L не зависит от T), где $n\in N$, $k \in N \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$, причем при $k=\frac{1}{2}$ будем предполагать, что $n=2n'+1$, $n'\in N$.

В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ исследуем статистику

$$\tilde{f}_T(\lambda)=\int_{\Pi} W_T(\upsilon)\overline{f}_T(\lambda+\upsilon)d\upsilon, \qquad (1)$$

где $\overline{f}_T(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_M^l(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, является периодограммой Бартлетта, а $I_M^l(\lambda)$ и $W_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ соответственно - модифицированная периодограмма, построенная по наблюдениям l-го интервала, $l=\overline{1,L}$ и спектральное окно определенные в [1].

Пусть $H_M(\upsilon)=A_M H^{(M)}(\upsilon)$,

$$A_M=\left[\int_{\Pi}\left|H^{(M)}(\upsilon)\right|^{\alpha}d\upsilon\right]^{-1/\alpha},$$

$$H^{(M)}(\upsilon)=\operatorname{Re}\sum_{m=-k(n-1)}^{k(n-1)} e^{-i\upsilon m}h_k(m,n),$$

где $h_k(m,n)$ - окно просмотра данных, позволяющее представить $H^{(M)}(\upsilon)$ в виде

$H^{(M)}(\upsilon)=\frac{2\pi}{B'_{\alpha,T}}\left(\frac{\sin\frac{n\upsilon}{2}}{\sin\frac{\upsilon}{2}}\right)^{2k}$, $B'_{\alpha,T}=\int\limits_{\Pi}\left(\frac{\sin\frac{n\upsilon}{2}}{\sin\frac{\upsilon}{2}}\right)^{2k}d\upsilon$. Функции типа $H^{(M)}(\upsilon)$ называют полиномиальными ядрами типа Джексона.

Статистика $\widetilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ называется вспомогательной оценкой спектральной плотности. Она была исследована в работах [1], [2]. Показано, что смещение и среднеквадратическое отклонение данной оценки стремится к нулю при $T\to\infty$.

Теорема [2]. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ случайного процесса $X(t)$, $t\in Z$ в точке $\lambda_0\in\Pi$ положительна, удовлетворяет условиям Гельдера (3) и ограничена на множестве* Π т.е. $|f(\lambda)|\le D_0$, $\lambda\in\Pi$, *а* $|H_M(\lambda)|^{\alpha}$ *является положительным ядром на* Π, *для которого выполняется условие*

$$\int\limits_{\Pi}\left|H_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}-\upsilon\right)H_M\left(\lambda_0-\frac{x_2}{M_T}-\upsilon\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

$x_1,x_2\in[-1,1]$, $|x_1-x_2|>\varepsilon_T>0$, $\varepsilon_T\xrightarrow[T\to\infty]{}0$, $\varepsilon_T T\xrightarrow[T\to\infty]{}\infty$. *Тогда для статистики* $\widetilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *заданной равенством (1), справедливы соотношения:*

1) $\widetilde{\Delta}=\left|M\widetilde{f}_T(\lambda_0)-[f(\lambda_0)]^{p/\alpha}\right|\le S_1\frac{1}{M_T^{\gamma}}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$

где

$$S_1=\frac{p}{\alpha}D_0^{p/\alpha-1}\left(B_1(\lambda_0)\int\limits_{-1}^{1}W(\lambda)|\lambda|^{\gamma}d\lambda+B_1(\lambda_0)\frac{\alpha\pi^{\gamma+2k\alpha}}{2^{2k\alpha}(\gamma+1)(2k\alpha-1)}+2D_0\frac{(\pi-\rho)\pi^{4k\alpha-1}}{|\rho|^{2k\alpha}}\right)$$

2) $\left|D\widetilde{f}_T(\lambda_0)\right|\le\frac{D_1}{L}\frac{1}{n^t}=\frac{1}{L}\left\{V_{p,\alpha}\{f(\lambda_0)\}^{2p/\alpha}\int\limits_{-1}^{1}W^2(x)dx+C_fC_2\right\}\frac{1}{n^t}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$

где $t=\frac{2k^2\alpha^2-1-2k^2\alpha^2 s}{2k\alpha+1+2k^2\alpha^2}$, $V_{p,\alpha}=\frac{\Gamma(2p)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{\alpha}\right)\pi\sin p\pi}{2\Gamma^2(p)\Gamma^2\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)\sin^2\frac{p\pi}{2}}-1,$

3) $\tilde{\nabla} = M\left|\tilde{f}_T(\lambda_0) - \{f(\lambda_0)\}\right|^2 \le \left\{\frac{D_1}{L} + S_1^2\right\} n^{-\frac{2\gamma}{k\alpha+1}} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$

$$C_f = \frac{2p^2 e \max\limits_{\upsilon\in\Pi} f(\upsilon)\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha^2\left\{f\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T}\right) f\left(\lambda_0 - \frac{x_2}{M_T}\right)\right\}^{\frac{1}{2}-\frac{p}{\alpha}} \Gamma^2\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)},\quad C_2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k\alpha}\left(\pi^{2k\alpha+1} + 2(\pi)^{k\alpha}\right),$$

$B_l(\lambda_0)$, M_T , $H_M(\lambda)$ и $W(\lambda)$ определены выше, $\Gamma(x)$ *– гамма-функция числа x,* $0 < s \le \frac{1}{k\alpha+1}$, $k \ge \frac{2\gamma+1}{\alpha}$, $0 < p < \frac{\alpha}{2}$, $0<\alpha<2$, $\lambda_0\in\Pi$.

<u>Следствие.</u> Пусть выполнены условия теоремы и спектральная плотность $f(\lambda)=1$. *Тогда для статистики* $\tilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *заданной равенством* (1), *справедливы соотношения:*

$$1)\ \tilde{\Delta} \le S\frac{1}{M_T^\gamma} = \frac{p}{\alpha}\frac{(\pi-\rho)\pi^{4k\alpha-1}}{\rho^{2k\alpha}}\frac{1}{M_T^\gamma} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{7}$$

$$2)\ \left|D\tilde{f}_T(\lambda_0)\right| \le \frac{D}{L}\frac{1}{n^t} = \frac{1}{L}\left\{V_{p,\alpha}\int_{-1}^{1} W^2(x)dx + C_1C_2\right\}\frac{1}{n^t} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \tag{8}$$

$$3)\ \tilde{\nabla} \le \left\{\frac{D}{L} + S^2\right\} n^{-\frac{2\gamma}{k\alpha+1}} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{9}$$

$C_1 = \dfrac{2p^2 e\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha^2\Gamma^2\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)}$, *$M_T$,$W(\lambda)$, t, $V_{p,\alpha}$ и C_2 определены выше,* $\Gamma(x)$ *– гамма-функция числа x,* $0 < s \le \frac{1}{k\alpha+1}$, $k \ge \frac{2\gamma+1}{\alpha}$, $0 < p < \frac{\alpha}{2}$, $0<\alpha<2$, $\lambda_0\in\Pi$.

<u>Доказательство.</u> Используя теорему получаем требуемые соотношения.

Проведен анализ констант C_1, C_2 и D_1,построев графики S и D при $\alpha=0{,}5$, $k=3$, $\alpha=1{,}5$, $k=1$, и построим их графики в зависимости от p, где $p=\frac{\alpha}{b}$, $b\in N$, что минимальное значение p равняется p=0,001.

Рассмотрели среднеквадратическое отклонение $\tilde{\nabla}$. Взяв различное количество наблюдений и варьируя различным числом разбиений, получили следующие результаты.

α=0,5	p=1/500	γ=0,1, k=3
T	L	$\tilde{\nabla}$
100	2	1,105
300	5	$9{,}71\times10^{-1}$
1200	10	$2{,}04\times10^{-1}$
7500	25	$1{,}16\times10^{-1}$
30000	50	$7{,}5\times10^{-2}$
50000	40	$7{,}91\times10^{-2}$
150000	25	$9{,}1\times10^{-2}$
10^6	10^5	$1{,}9\times10^{-2}$

α=1,5	p=1/1500	γ=0,1, k=1
T	L	$\tilde{\nabla}$
40	2	1,062
100	5	$4{,}28\times10^{-1}$
400	2	$8{,}4\times10^{-2}$
2000	25	$7{,}9\times10^{-2}$
8000	20	$8{,}7\times10^{-2}$
10000	50	$3{,}96\times10^{-2}$
5×10^5	250	$9{,}535\times10^{-3}$
4×10^6	10^5	$2{,}1\times10^{-3}$

Из таблицы следует: 1) для того, чтобы $\tilde{\nabla}$ имело порядок 10^{-1} надо взять 300 наблюдений и L=5 при α=0,5; и 100 наблюдений, L=5 при α=1,5; 2) для того, чтобы $\tilde{\nabla}$ имело порядок 10^{-2} нужно брать 30000 наблюдений и 50 разбиений в случае $0<\alpha<1$ и 400 наблюдений, 2 разбиений в случае $1<\alpha<2$; 3) для того, чтобы $\tilde{\nabla}$ имело порядок 10^{-3} необходимо брать не менее 5×10^5 наблюдений и не менее 250 разбиений в случае $1<\alpha<2$, а в случае $0<\alpha<1$ $\tilde{\nabla}$ такого порядка не достигает даже при количестве наблюдений равном 10^6 и числе разбиений 10^5.

Литература.

1.Демеш Н.Н., Акинфина М.А. // Вестник БГУ. Серия физ. мат. инф. - 2001, №1. – С. 75-79.
2.Акинфина. – Минск, 1999. – 26 с. – Деп. В БелИСА. 16.06.99, № Д199971.

О КАНОНИЧЕСКОМ ЛИФТЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.С. Андреев
(БрГУ, г. Брест)

Пусть G – группа Ли, H – её замкнутая подгруппа Ли, $M=G/H$ – однородное G-пространство,

$$\pi : G \to {}^{G}\!/_{H} : a \mapsto aH$$