МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по разделу "Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления" курса "Высшая математика" для студентов специальности
Т. 03.01

Брест 1996

УДК 517.9

Методические указания содержат необходимый теоретический и практический материал для проведения лекционных и практических занятий по разделу "Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления" у студентов специальности [illegible].

Настоящая методическая разработка может быть использована для самостоятельного изучения этой темы студентами всех специальностей.

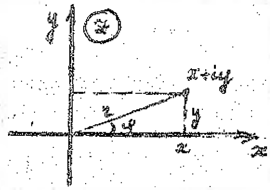
Составители: М.П.Сидорович, доцент, к.ф.-м.н.
Т.А.Гузик, доцент

Рецензент: доцент БрГУ, к.ф.-м.н. Семенчук Н.П.

I. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

I.I. МНОЖЕСТВА $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ.

Обычное собственно комплексное число обозначают z. Алгебраическая форма его записи имеет вид $z = x + iy$, где



$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $i = \sqrt{-1}$.

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

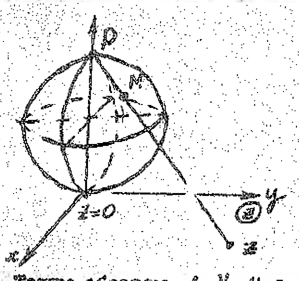
$\varphi = \arg z$, $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi \le \varphi < \pi$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Показательная форма записи $z = re^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}$.

Множество всех собственно комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$. К этим числам добавляется несобственное (бесконечное) комплексное число, называемое бесконечно удаленной точкой или ∞. Чтобы получить геометрическое изображение числа ∞, устанавливают соответствие между точками M сферы и точками z комплексной плоскости. (рис. I).



т. P – полюс,
т. $M \in$ сфере, проводим луч PM до пересечения с плоскостью (z).

Таким образом, ($\forall M \in$ сфере) $\Leftrightarrow$ ($z \in$ плоскости). Это соответствие называется стереографической проекцией. При таком соответствии сфера без точки P изображает множество всех собственно комплексных чисел.

Возьмем последовательность $z_n \to \infty$, тогда соответствующая последовательность точек M_n сферы будет стремиться к т. P. Поэтому точка P изображает бесконечно удаленную точку на сфере, а ей соответствующая точка плоскости (единственная) называется бесконечно удаленной.

Множество всех комплексных чисел, включая и бесконечно удаленную точку, обозначается $\overline{\mathbb{C}}$ и называется расширенной комплексной плоскостью.

Если $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $t \in T$ – непрерывные или непрерывно дифференцируемые функции действительного аргумента t, то $z = x(t) + i\,y(t)$ определяет в $\overline{\mathbb{C}}$ непрерывную кривую ℓ. Этот факт будем записывать в виде:

$$\ell:\ z = x(t) + i\,y(t).$$

Пример. Определить вид кривой $z = 3e^{it} - e^{-it}$, $t \in R$.

$$z = 3e^{it} - e^{-it} = 3(\cos t + i\sin t) - (\cos t - i\sin t) \to$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} t \in R \Rightarrow \frac{x}{2} = \cos t,\ \frac{y}{4} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Значит, ℓ – эллипс.

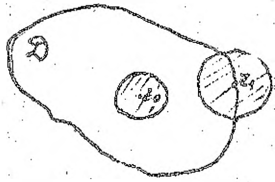
1.2. ОКРЕСТНОСТИ, ОБЛАСТИ, ИХ ГРАНИЦЫ

Уравнение $|z - z_0| = R$ определяет на плоскости $\mathbb{C}$ окружность с центром в т. z_0 радиуса R.

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, называется ε – окрестностью точки z_0 и обозначается $U_\varepsilon(z_0)$. Рассмотрим некоторое множество $D \subset \mathbb{C}$.

Точка z_0 называется внутренней точкой множества D, если существует окрестность т. z_0 из точек, целиком принадлежащих D.

Точка z_1 называется граничной точкой множества D, если в любой ее окрестности есть точки как принадлежащие D, так и не принадлежащие ей.



Множество всех граничных точек для $\mathcal{D}$ образует ее границу $\mathcal{L}$.

Областью называется множество $\mathcal{D} \subset \bar{\mathbb{C}}$, обладающее свойствами:

1. открытости: $\mathcal{D}$ состоит из внутренних точек;
2. связности: любые 2 точки $\mathcal{D}$ можно соединить непрерывной линией ℓ, состоящей из точек $\in \mathcal{D}$.

Множество, состоящее из области $\mathcal{D}$ и ее границы $\mathcal{L}$, называется замкнутой областью: $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \mathcal{L}$. Область n-связна, если ее граница состоит из n непересекающихся кусков

$n = 1$

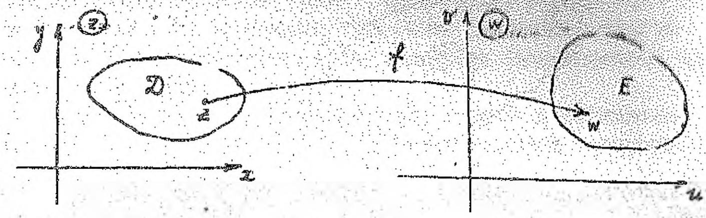
$n = 2$

Замечание. Если $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ — граница области $\mathcal{D}$, то обход по $\mathcal{L}$ совершают так, чтобы область $\mathcal{D}$ была слева.

Окрестностью бесконечно удаленной точки называется множество, удовлетворяющее неравенству $|z| > R$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $f(z)$, ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Даны две области $\mathcal{D}$ и $E \subset \bar{\mathbb{C}}$. Если каждому значению $z \in \mathcal{D}$ ставится в соответствие значение $w \in E$ (одно или несколько), то говорят, что w — функция от z, т.е. $w = f(z)$ (однозначная или многозначна*).



$z = x + iy$, $z \in D$

$w = u + iv$, $w \in E$

$u = \operatorname{Re} w = u(x,y)$,

$v = \operatorname{Im} w = v(x,y)$.

В случае многозначной функции множество E состоит из нескольких комплексных плоскостей (или их частей), которые образуют так называемую риманову поверхность.

Пример.

Функция $w = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i \cdot 2xy$ – однозначная в $\bar{\mathbb{C}}$.

Функция $w = \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}$ – четырехзначная:

при $z=0$ $w(0) = \sqrt{1} + \sqrt{-1} = \{1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i\}$.

Пусть $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ определена в $\mathring{U}(z_0)$

Число A называется пределом $f(z)$ при $z \to z_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ такое, что если $|z - z_0| < \delta$, то $|f(z) - A| < \varepsilon$.

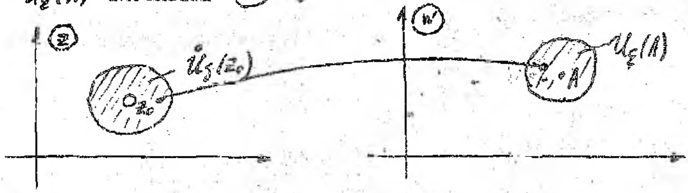
Записывают:
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A = a + ib. \qquad (I.3.I.)$$

Из этого равенства (I.3.I) следует, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$

и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$.

Геометрическое толкование равенства (I.3.I): окрестность

$\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ плоскости (z) отображается на окрестность $U_\varepsilon(A)$ плоскости (w).



Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad (I.3.2)$$

Из (I.3.2) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

Из (I.3.2) следует, что непрерывная функция отображает бесконечно малые элементы на бесконечно малые.

Функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ - действительные функции двух независимых переменных x и y.

Из равенств (I.3.I) и (I.3.2) следует, что вся теория пределов, непрерывности действительных функций переносится на функцию комплексного переменного.

I.4. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1) Степенная функция $w = z^n$, $n \in N$ однозначная, непрерывная для $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

2) Показательная функция $w = e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

$|w| = e^x$, $\arg w = y$, определена и непрерывна для $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Обладает всеми свойствами действительной показательной функции, имеет период $T = 2\pi i$, т.е. $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$.

3) Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$ – определены, непрерывны для $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, периодические с периодом $T = 2\pi$. Легко проверить следующие равенства

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$.

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$.

$\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$, $\quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

Функции $w = \sin z$, $w = \cos z$ не являются ограниченными:

$|\sin z| \gtrless 1$ и $|\cos z| \gtrless 1$.

4) <u>Гиперболические функции</u> $sh\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $ch\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Имеют место такие соотношения (проверьте их!)

$sh\, z = -i \sin iz$, $\quad ch\, z = \cos iz$.

$\sin z = \sin x \cdot ch\, y + i \cos x \cdot sh\, y$,

$\cos z = \cos x \cdot ch\, y - i \sin x \cdot sh\, y$.

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}, \quad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}.$$

5) <u>Логарифмическая функция</u> $w = Ln\, z$ вводится как обратная к показательной функции $z = e^w$:

$z = |z| e^{i\varphi} = e^{u+iv} \Rightarrow u, v = ?$

$|z| e^{i\varphi} = e^u \cdot e^{iv} \Rightarrow |z| = e^u$, $u = \ln|z|$ – действительная функция.

Т.к. аргументы равных комплексных чисел отличаются на $2k\pi$, то $v = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$Ln z = \ln|z| + i\arg z + i\cdot 2k\pi\ , \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Эта функция бесконечнозначна., определена и непрерывна при $\forall z\in\bar{\mathbb{C}}$, кроме $z=0$.

6) Общая степенная функция $w = z^{\alpha} = e^{\alpha Ln z}$.

7) Общая показательная функция $w = a^{z} = e^{z Ln a}$.

8) Обратные тригонометрические функции $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arc\,tg\, z$, $Arc\,ctg\, z$ определяются как обратные к функциям $\sin z$, $\cos z$, $tg\, z$, $ctg\, z$.

Например, пусть $w = Arc\sin z$, тогда $z = \sin w$

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}, \quad e^{iw} - e^{-iw} = 2iz,$$

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0, \quad e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2+1}$$

$$iw = Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$w = Arc\sin z = -i\, Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Аналогично рассуждая, найдем (проверьте!)

$$Arc\cos z = -i\, Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$Arc\,tg\, z = \frac{1}{2i} Ln\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$Arc\,ctg\, z = -\frac{1}{2i} Ln\frac{1+iz}{iz-1}.$$

Пример I. Вычислить $Arc\sin i$.

$$Arc\sin i = -i\, Ln\left(i^2 + \sqrt{1-i^2}\right) = -i\, Ln\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2\,(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)} = \sqrt{2}\,(\cos k\pi + i\sin k\pi)\ ,\ k = 0,1$$

$$(\sqrt{2})_1 = \sqrt{2}\ , \qquad (\sqrt{2})_2 = -\sqrt{2}$$

$$(\mathrm{Arc\,sin}\, i)_1 = -i\,\mathrm{Ln}\,(\sqrt{2}-1) = -i\,\left(\ln(\sqrt{2}-1) + i\arg(\sqrt{2}-1) + 2k\pi i\right) =$$

$$= -i\,(\ln(\sqrt{2}-1) + 2k\pi i) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1) \approx 2k\pi - i\,0{,}88\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

$$(\mathrm{Arc\,sin}\, i)_2 = -i\,\mathrm{Ln}\,(-1-\sqrt{2}) = -i\,\left(\ln(\sqrt{2}+1) + i\arg(-1-\sqrt{2}) + 2k\pi i\right) =$$

$$= -i\,(\ln(\sqrt{2}+1) + i\pi + 2k\pi i) = \pi(1+2k) - i\ln(1+\sqrt{2}),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin i = \begin{cases} -i\ln(\sqrt{2}-1), \\ \pi - i\ln(\sqrt{2}+1) \end{cases}$$

Пример 2. Вычислить $\mathrm{Ar\,sh}\, i$.

$$\mathrm{Ar\,sh}\, i = \mathrm{Ln}\,(i + \sqrt{i^2+1}) = \mathrm{Ln}\, i = \ln 1 + i\arg i +$$

$$+ i\cdot 2k\pi = i\cdot\frac{\pi}{2} + i\cdot 2k\pi = i\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{ar\,sh}\, i = \frac{\pi}{2} i\ .$$

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.I. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $w = f(z)$. АНАЛИТИЧНОСТЬ $f(z)$

Пусть функция $w = f(z)$ однозначно определена для $\forall\, z \in \mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Определение. Если при $\forall\, \Delta z \to 0$ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \qquad (2.I.I)$$

то он называется производной функции $f(z)$ в точке z, а функция дифференцируемой в т. z.
Из дифференцируемости функции $f(z)$ в т. z следует ее непрерывность в этой точке.

Так как приращение Δz стремится к 0 произвольным образом, т.е. точка $z+\Delta z \to z$ по произвольной непрерывной линии, лежащей в $\mathcal{D}$, то условие дифференцируемости функции $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ накладывает на функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определенные требования.

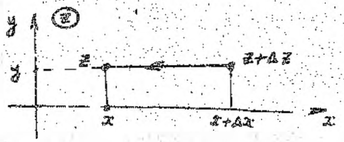
<u>Теорема</u>. Если функция $f(z)$ в т. z дифференцируема, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют в точке (x,y) частные производные первого порядка, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.I.2)$$

Условия (2.I.2) называются условиями Коши-Римана.

Доказательство.
Т.К. $f(z)$ дифференцируема в т. z, то предел (2.I.I) не зависит от способа стремления Δz к 0.

а)



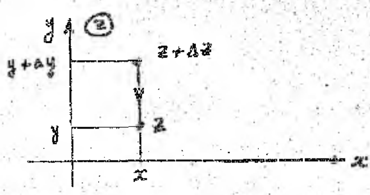
Пусть $z + \Delta z = (x+\Delta x) + i\,y$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i\,v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (2.1.3)$$

б)



Пусть $z+\Delta z = x + i(y+\Delta y)$,

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+i\,v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-i\,v(x,y)}{i\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \qquad (2.1.4)$$

Т.к. $f'(z)$ существует, то из (2.1.3) и (2.1.4) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

т.е. условия Коши-Римана (2.1.2).

Доказано, что условия (2.1.2) Коши-Римана являются и достаточными для дифференцируемости $f(z)$.

Функция $f(z)$, дифференцируема в т. z и в некоторой ее окрестности, называется аналитической в этой точке.

Если $f(z)$ – аналитическая в $\forall z \in D$, то она аналитическая в области D.

Для того чтобы $f(z)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно существование в D непрерывных частных производных от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющих условиям Коши-Римана.

При выполнении условий (2.1.2) производная $f'(z)$ находится по одной из четырех формул:

$$f'(z)=u'_x+i\,v'_x=v'_y-i\,u'_y=v'_y+i\,v'_x=u'_x-i\,u'_y.$$

Пример. Доказать, что $f(z)=z^2$ аналитическая $\forall z\in\mathbb{C}$

і знайти $f'(z)$.

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2ixy$$

$$u(x,y) = x^2-y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

$$\begin{aligned} u'_x &= 2x, & v'_x &= 2y & &\Longrightarrow & u'_x &= v'_y, \; u'_y = -v'_x \\ u'_y &= -2y, & v'_y &= 2x & & & 2x &= 2x, \; -2y = -2y, \\ & & & & & & &\forall z \in C. \end{aligned}$$

Тоді

$$f'(z) = u'_x - i u'_y = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z.$$

$$(z^2)' = 2z.$$

Для аналітичних функцій справедливі основні правила диференціювання і таблиця похідних

1. $(\alpha_1 f_1(z) \pm \alpha_2 f_2(z))' = \alpha_1 f_1'(z) \pm \alpha_2 f_2'(z)$, α_1, α_2 - const,

2. $(f_1(z)\cdot f_2(z))' = f_1'(z)\cdot f_2(z) + f_1(z)\cdot f_2'(z)$,

3. $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z)\cdot f_2(z) - f_1(z)\cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)}$, $f_2(z) \neq 0$.

4. $F(z) = \varphi(f(z))$, f і φ - аналітичні функції, то

   $F'(z) = \varphi'(w)\cdot w' = \varphi'(w)\cdot f'(z)$.

5. $(\cos z)' = -\sin z$, 6. $(\sin z)' = \cos z$,

7. $(z^\alpha)' = \alpha\cdot z^{\alpha-1}$, $\alpha \in C$, 8. $(\operatorname{tg} z)' = \sec^2 z$,

9. $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ 10. $(a^z)' = a^z \ln a$ і т.д.

Зауваження. Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$ і $f(z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + i\,v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, то умови (2.1.2) Коші-Рімана мають вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi}, \\ \dfrac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi} \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

и производная $f'(z)$ может быть записана так

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} - i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right).$$

Пример. Показать, что $w = Ln\, z$ аналитическая для $\forall z$, $z \in \mathbb{C}$, кроме $z = 0$ и найти w'.

$$Ln\, z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad u(r,\varphi) = \ln r,$$

$$v(r,\varphi) = \varphi + 2k\pi, \quad u'_r = \frac{1}{r}, \quad u'_\varphi = 0, \quad v'_r = 0,$$

$$v'_\varphi = 1 \qquad \left.\begin{array}{l} u'_r = \frac{1}{r} v'_\varphi \to \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\cdot 1 \\ v'_r = -\frac{1}{r} u'_\varphi \to 0 = -\frac{1}{r}\cdot 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Ln\, z = \frac{r}{z}\left(\frac{1}{r} + i0\right)$$

$$(Ln\, z)' = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

2.2. СОПРЯЖЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Дана аналитическая функция $w = u(x,y) + i\, v(x,y)$,

где $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.2.1)$$

Легко видеть, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ будут гармоническими. Действительно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} = 0, \qquad \Delta u = 0$$

u - гармоническая функция.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0, \qquad \Delta v = 0,$$

v – гармоническая функция.

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ – оператор Лапласа (лапласиан).

Гармонические функции u и v, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются сопряженными.

Доказано, что зная одну из сопряженных гармонических функций, можно найти другую гармоническую функцию так, чтобы $w = u + iv$ была аналитической.

Пусть известна $u = u(x,y)$, надо найти $v = v(x,y)$.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \Big| \text{ из условий (2.2.1)} \Big| =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$v = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} - u'_y(x,y)\,dx + u'_x(x,y)\,dy \qquad (2.2.2)$$

Аналогично, если известна $v = v(x,y)$, то $u = u(x,y)$

$$u = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_y(x,y)\,dx - v'_x(x,y)\,dy \qquad (2.2.3)$$

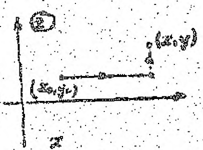
В формулах (2.2.2) и (2.2.3) (x_0,y_0) и (x,y) – соответственно фиксированная и переменная точки области $\mathcal{D}$, где $w = f(z)$ аналитическая.

Пример. Проверить, что функция $u = x^2 - y^2 + 3x - 2y$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и найти $f(z)$.

Составим оператор Лапласа Δu.

$u'_x = 2x+3,\quad u''_{xx} = 2,\quad u'_y = -2y-2,\quad u''_{yy} = -2.$

$\Delta u = 2-2 = 0 \Longrightarrow u = u(x,y)$ – гармоническая функция.



$$v = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y(x,y)\,dx + u'_x(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} -u'_y(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} u'_x(x,y)\,dy .$$

$$v = \int_{x_0}^{x} (2y_0+2)\,dx + \int_{y_0}^{y} (2x+3)\,dy = (2y_0+2)\,x\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ (2x+3)\cdot y\Big|_{y_0}^{y} = (2y_0+2)(x-x_0) + (2x+3)(y-y_0) = 2xy_0 + 2x$$

$$-2y_0x_0 - 2x_0 + 2xy - 2xy_0 + 3y - 3y_0 = 2xy + 2x + 3y + C.$$

$$v = 2xy + 2x + 3y + C, \qquad C = -2x_0y_0 - 2x_0 - 3y_0.$$

$$w = u + iv = x^2 - y^2 + 3x - 2y + i(2xy + 2x + 3y + C) =$$

$$= x^2 + 2ixy + (iy)^2 + 3(x+iy) + i(2x + 2iy) + iC =$$

$$= z^2 + 3z + 2iz + iC = z^2 + (3+2i)z + iC.$$

Полезно знать, что $x = \frac{1}{2}(z+\bar z),\quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar z),$

$z = x+iy,\quad \bar z = x-iy.$

2.3. Понятие конформного отображения

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в т. z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равно коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости z на плоскость w. Если $|f'(z_0)|>1$, то имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)|<1$ – сжатие. В этом и состоит геометрический смысл модуля производной.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к гладкой кривой ℓ на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$ к образу L этой кривой на плоскости w при отображении $w=f(z)$. При этом, если $\varphi=\arg f'(z_0)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi<0$ – по часовой.

Определение. Непрерывное отображение, обладающее (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) свойством сохранения углов (с сохранением направления отсчета) и свойством постоянства растяжений, называется конформным отображением.

Справедливо утверждение: отображение с помощью аналитической функции $w=f(z)$ является конформным во всех точках, где $f'(z)\neq 0$.

Пример. Найти коэффициент растяжения r и угол поворота φ при отображении $w=z^3$ в точке $z_0=2-i$.

Имеем $w'=3z^2=3(x+iy)^2=3(x^2-y^2)+i\cdot 6xy$.

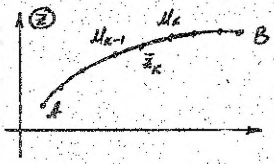
Для точки z_0 $r=|w'(z_0)|=|9-12i|=\sqrt{81+144}=15$,

$\varphi=\arg w'(z_0)=-\mathrm{arctg}\,4/3\approx-53°$.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

3.1. ИНТЕГРАЛ ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ $f(z)$.

Пусть $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ – непрерывная для $\forall z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, ℓ – гладкая ориентированная кривая, $\ell = \smile AB$.



Разобьем $\smile AB$ произвольно на n частей таких, что $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ и обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k|$. Выберем произвольную точку $\bar{z}_k \in \smile M_{k-1}M_k$, вычислим значение функции $f(\bar{z}_k)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{z}_k)\cdot\Delta z_k .$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, независимый от выбора точек $\bar{z}_k$, $k = \overline{1,n}$, то он называется интегралом функции $f(z)$ по дуге ℓ.

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{z}_k)\,\Delta z_k = \int_\ell f(z)\,dz \qquad (3.1.1)$$

Вычисление интеграла (3.1.1) сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций.

Если $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = u + iv$,

$dz = d(x+iy) = dx + i\,dy$, то

$$\int_\ell f(z)\,dz = \int_\ell (u+iv)(dx+idy) = \int_\ell u\,dx - v\,dy + i\int_\ell v\,dx + u\,dy$$

Интеграл (3.1.1) от функции комплексного переменного обладает свойствами криволинейного интеграла функции действительного переменного.

1. $\int_\ell (\alpha f_1(z) \pm \beta f_2(z))\,dz = \alpha\int_\ell f_1(z)\,dz \pm \beta\int_\ell f_2(z)\,dz$; $\alpha, \beta - const.$

2. $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$.

3. Если $|f(z)|\le M$, $z\in \ell$, $|dz| = d\ell$, то

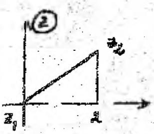
$$\left|\int_\ell f(z)dz\right| \le \int_\ell |f(z)|\cdot|dz| \le M\cdot L, \quad L \text{ – длина } \ell .$$

Для вычисления интеграла (3.I.I) необходимо знать подинтегральную функцию и уравнение линии ℓ.

$$\ell: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad \alpha\le t\le\beta, \quad z=z(t), \quad z=x(t)+iy(t)$$

$$\int_\ell f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt .$$

Пример 1. Вычислить $\int_\ell \bar z\, dz$ по отрезку, соединяющему точки $z_1=0$ и $z_2=2+2i$.

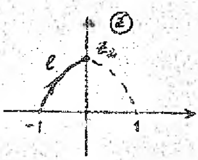


$y=x$, $z=x+ix$, $z=(1+i)x$, $0\le x\le 2$

$\bar z = x-iy = x-ix = (1-i)x$, $dz=(1+i)dx$.

$$\int_\ell \bar z\, dz = \int_0^2 (1-i)\cdot x\,(1+i)dx = 2\int_0^2 x\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 4.$$

Пример 2. Вычислить $\int_\ell \overline{z+1-i}\cdot \mathrm{Re}\, z\, dz$, где ℓ – дуга параболы $y=1-x^2$ от $z_1=-1$ до $z_2=i$.



$\ell: y=1-x^2$, $z=x+iy$

$z=x+i(1-x^2)$, $-1\le x\le 0$:

$\mathrm{Re}\, z = x$, $\overline{z+1-i} = \overline{x+i(1-x^2)+1-i} =$

$= \overline{(x+1)+i(1-x^2-1)} = (x+1)+ix^2$, $dz=(1-2ix)dx$.

$$J = \int_C \overline{z+1-i}\cdot \operatorname{Re} z\, dz = \int_{-1}^{0} (x+1+ix^2)\, x(1-2ix)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^2+x+ix^3-2ix^3-2ix^2-2i^2x^4)\,dx = \int_{-1}^{0}(x^2+x+2x^4)\,dx +$$

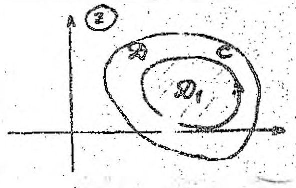
$$+ i\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2)\,dx = \left(\frac13 x^3+\frac12 x^2+\frac25 x^5\right)\Big|_{-1}^{0} + i\left(\frac14 x^4-\frac23 x^3\right)\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \left(\frac13-\frac12+\frac25\right)+i\left(\frac14-\frac23\right) = \frac{7}{30}-\frac{5}{12}\,i.$$

3.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНОЙ И МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Докажем теорему, играющую фундаментальную роль в теории функций комплексного переменного.

Теорема Коши. Если $f(z)$ – аналитическая в некоторой односвязной области $\mathcal{D}$ функция, то интеграл $\int f(z)\,dz$ по любому замкнутому кусочно гладкому контуру C, целиком лежащему в $\mathcal{D}$, равен 0.



$f(z)$ – аналитическая $\forall z\in\mathcal{D}$,

$C \subset \mathcal{D}$.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \qquad (3.2.1)$$

Т.к. $f(z)$ – аналитическая в области $\mathcal{D}$ функция, то отсюда следует, что $f(z)$ и $f'(z)$ – непрерывны в $\mathcal{D}$.

$f(z) = u+iv$ и $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$.

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy =$$

Применим формулу Грина, получим

$$= \iint_{\mathcal{D}_1}(-v'_x-u'_y)\,dx\,dy + i\iint_{\mathcal{D}_1}(u'_x-v'_y)\,dx\,dy = 0+i\,0 = 0.$$

Следствие I.

Если $f(z)$ - аналитическая в односвязной области D функция, то $\int\limits_{AB} f(z)dz$ не зависит от пути, соединяющем т. A и т. B.

Пример. Вычислить $\int\limits_{\ell} z^2 dz$, где ℓ - кривая, соединяющая точки $z_1=0$ и $z_2=1+3i$.

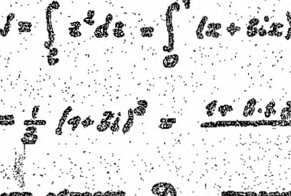
$f(z)=z^2$ - аналитическая для $\forall z\in\mathbb{C}$. ℓ - $\forall$ дуга.

ℓ: отрезок прямой: $y=3x$, $z=x+i\cdot 3x$, $0\le x\le 1$

$$I=\int\limits_{\ell} z^2dz=\int\limits_0^1 (x+3ix)^2(1+3i)dx = (1+3i)^3\int\limits_0^1 x^2dx=$$

$$=\frac{1}{3}(1+3i)^3=\frac{1+3\cdot 1\cdot 3i+3\cdot 1\cdot(3i)^2+(3i)^3}{3}=-\frac{26}{3}-6i$$

Пусть область D - двусвязная и $f(z)$ - аналитична в D.



Выберем т. A и B на границе D и проведем разрез AB. Область D превратится в односвязную.

$$C=C_1\cup C_2$$

C - контур области D, $C = AB\cup BC_2B\cup BA\cup AC_1A$

По теореме Коши $\oint\limits_{C} f(z)dz=0$

$$\int\limits_{AB} f(z)dz+\int\limits_{BC_2B} f(z)dz+\int\limits_{BA} f(z)dz+\int\limits_{AC_1A} f(z)dz=0$$

$$\int\limits_{AB} f(z)dz=-\int\limits_{BA} f(z)dz$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz = 0 \qquad (3.2.2)$$

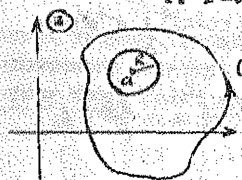
Равенство (3.2.2) представляет теорему Коши для двусвязной области $\mathcal{D}$.

Следствие 2.

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

Но, вообще говоря, эти интегралы $\neq 0$, т.к. внутри контура C_2 $f(z)$ может быть не аналитической.

Воспользуемся следствием 2 для вычисления интеграла $\oint_C \frac{dz}{z-a}$, контур C – любая кривая, содержащая внутри т. $z=a$.



Вместо контура C возьмем любой более простой контур, охватывающий т. $z=a$, например, окружность

$$|z-a|=R.$$

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = \left| \begin{array}{c} |z-a|=R \\ z-a=Re^{i\varphi} \\ dz=Rie^{i\varphi}d\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}} = 2\pi i.$$

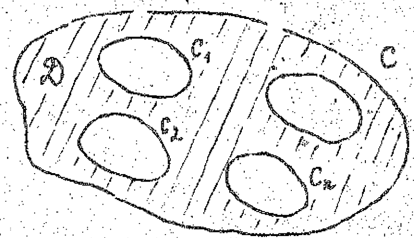
Пусть $\mathcal{D}$ $(n+1)$ – связная область с внешним контуром C и внутренними простыми контурами C_1, C_2, ..., C_n.

Теорема Коши для многосвязной области.

Если $f(z)$ аналитическая функция внутри $(n+1)$ – связной области $\mathcal{D}$, то

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz \qquad (3.2.3)$$

Направление обхода всех контуров одно и то же.



3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ОТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

Пусть $f(z)$ – аналитическая в односвязной области $\mathcal{D}$ функция, т. z_1 и $z_2 \in \mathcal{D}$.

$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ не зависит от пути, соединяющего z_1 и z_2 .

Обозначим $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \mathcal{F}(z)$

$\mathcal{F}(z)$ аналитическая в $\mathcal{D}$ функция и $\mathcal{F}'(z) = f(z)$.
Функцию $\mathcal{F}(z)$ называют первообразной для $f(z)$. Совокупность всех первообразных для $f(z)$ называют <u>неопределенным интегралом</u>

$$\Phi(z) = \mathcal{F}(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C .$$

<u>Для аналитических функций</u> $f(z)$ справедлива формула

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \mathcal{F}(z_1) - \mathcal{F}(z_0)$$

Отсюда следует, что интегралы от элементарных функций комплексного переменного вычисляются по тем же формулам, что и в обычном анализе.

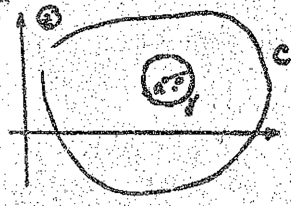
$$\int \sin z\, dz = -\cos z + C, \quad \int e^z dz = e^z + C,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \ln z + C, \quad \int\limits_0^{1+3i} z^2 dz = \frac{1}{3}(1+3i)^3 = -\frac{26}{3} - 6i.$$

3.4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$. Тогда $\frac{f(z)}{z-a}$ – аналитическая всюду в D, кроме $z = a$.

Рассмотрим $\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$.



Проведем окружность γ: $|z-a| = \rho$. Функция $\frac{f(z)}{z-a}$ будет аналитической в двусвязной области.

По следствию 2 имеем

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint\limits_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz + f(a)\oint\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} =$$

$$= \oint\limits_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz + 2\pi i \cdot f(a) \qquad (3.4.1)$$

Оценим первый интеграл. $f(z)$ – аналитическая и, следовательно, непрерывная в D функция. Значит, если $z - a \to 0$, то $f(z) - f(a) \to 0$.

γ: $|z-a| = \rho$, $\rho \to 0$.

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{\rho e^{i\varphi}}\, \rho i e^{i\varphi}\, d\varphi \right|_{z=a+\rho e^{i\varphi}} \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} \left| f(a+\rho e^{i\varphi})-f(a)\right| \cdot d\varphi \le \left| f(a+\rho e^{i\varphi_1})-f(a)\right| \cdot 2\pi \to$$

$$\xrightarrow[\rho\to 0]{} 0, \quad \varphi_1 \in (0, 2\pi).$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$ в равенстве (3.4.1), получим

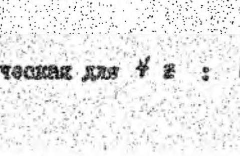
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz \qquad (3.4.2)$$

Формула (3.4.2) называется интегральной формулой Коши. Обычно ее записывают так: заменим z на t, a на z:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}. \end{cases}$$

$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt$ – интеграл Коши, $\frac{1}{t-z}$ – это ядро, $f(t)$ – плотность.

Пример. Вычислить интеграл Коши $\oint_C \frac{e^z}{z(z-i)}\, dz$, где C: $|z| = 0{,}5$.



Функция $f_1(z) = \frac{e^z}{z(z-i)}$ является аналитической внутри круга всюду, кроме $z = 0$. Представим ее в виде

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z-0},$$

где $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$ – аналитическая для $\forall z : |z| \le 0{,}5$.

К функции $f_1(z)$ применим интегральную формулу Коши (3.4.2).

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i\cdot f(\,) = 2\pi i\cdot\frac{e^0}{0-i} = 2\pi i\cdot\frac{1}{-i} = -2\pi.$$

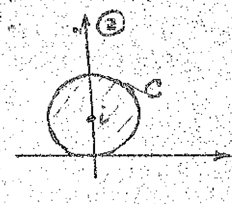
Доказано, что аналитическая в $\overline{D}$ функция $f(z)$ имеет в этой области производные всех порядков

$$\left\|\begin{aligned} & f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt \\ & f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \end{aligned}\right. \qquad (3.4.3)$$

Из существования в некоторой области $f'(z)$ следует существование и аналитичность всех ее производных $f^{(n)}(z)$. В этом существенное отличие между дифференцируемыми функциями $f(x)$ $x\in R$ и $f(z)$ $z\in \mathbb{C}$.

Пример. Вычислить $\oint_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}\,dz$, где $C: |z-i|=1$.

Функция $\sin z$ аналитическая для z в круге $|z-i|\le 1$.



$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}(\sin z)'''_{z=i} =$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}(\cos z)''_{z=i} = \frac{2\pi i}{3!}(-\sin z)'_{z=i} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{3!}\cos i = -\frac{2\pi i}{3!}\,\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = -\frac{\pi i}{3}\,\frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = -\frac{\pi i}{3}\operatorname{ch}1$$

3.5. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ.

Интегралом типа Коши называется интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\ell}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\mathcal{F}(z),$$

где ℓ - разомкнутый или замкнутый контур, $\varphi(t)$ - непрерывная функция, $t\in\ell$, заданная только на контуре, $z\bar{\in}\ell$.

Доказано, что $\mathcal{F}(z)$

1. однозначная, аналитическая функция во всякой области $\mathcal{D}$, не содержащей точек кривой ℓ.
2. Производные $\mathcal{F}(z)$ определяются по формуле

$$\mathcal{F}^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{\varphi(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt.$$

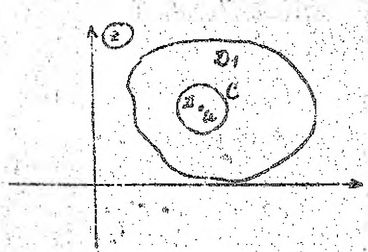
4. РЯДЫ ТЕЙЛОРА. РЯДЫ ЛОРАНА.

Основные понятия для числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, где $c_n\in\mathbb{C}$, и функциональных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z),\ z\in\mathbb{C}$ (сходимость, абсолютная условная, равномерная сходимость, свойства равномерно сходящихся в некоторой области $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ рядов) вводятся аналогично соответствующим понятиям для рядов в действительной области.

4.1. РЯД ТЕЙЛОРА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-a)^n$ (4.1.1) является функцией аналитической в области $|z-a|<R$, R - радиус сходимости. Чтобы найти эту область, составляем ряд из абсолютных величин членов ряда (4.1.1), к которому применяем признак Даламбера.

Пусть дана функция $f(z)$, аналитическая в области $\mathcal{D}$, содержащей точку $z=a$.



Пусть область D целиком содержится в D_1, C — ее граница, $C: |z-a|=r$, $D \cup C = \bar{D}$. Представим функцию $f(z)$ в виде степенного ряда в области $\bar{D}$, в этой области для аналитической функции $f(z)$ справедлива интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \qquad z \in \bar{D} \qquad (4.1.2)$$

Преобразуем ядро интеграла Коши

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-a)-(z-a)}=\frac{1}{(t-a)\left(1-\frac{z-a}{t-a}\right)}=$$

т.к. $t \in C$, $z \in D$, то $\left|\frac{z-a}{t-a}\right| = q < 1$, воспользуемся геометрической прогрессией

$$=\frac{1}{t-a}\left(1+\frac{z-a}{t-a}+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n+\dots\right) \qquad (4.1.3)$$

Ряд (4.1.3) по переменной t сходится равномерно на окружности C, т.к. для него при фиксированном $z \in D$ существует мажорантный ряд

$$1+q+q^2+\dots+q^n+\dots=\frac{1}{1-q}.$$

Подставим разложение (4.1.3) в формулу (4.1.2)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-a}\left(1+\frac{z-a}{t-a}+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n+\dots\right)dt$$

Равномерно сходящийся по t функциональный ряд можно почленно интегрировать.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{t-a}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-a)^2}\,dt\cdot(z-a)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-a)^3}\,dt\cdot(z-a)^2+\dots+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt\cdot(z-a)^n+\dots \qquad (4.1.4)$$

Обозначим коэффициенты полученного ряда

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt,\quad n=0,1,2,\dots,$$

Из формул (3.4.3) следует, что $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Подставим выражения для коэффициентов в разложение (4.1.4), получим ряд Тейлора для функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (4.1.5)$$

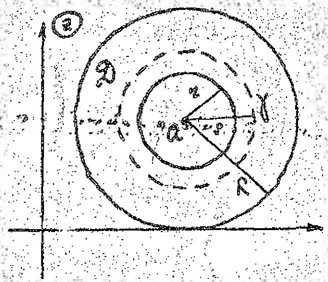
Функция $f(z)$ называется аналитической, если ее можно представить рядом Тейлора.

4.2. РЯД ЛОРАНА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ.

Обобщением ряда Тейлора является ряд Лорана. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r<|z-a|<R$, $0<r<R$, то она раскладывается в сходящийся ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (4.2.1)$$

где
$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt,\quad n=0,1,2,\dots$$



$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(t)\cdot(t-a)^{n-1}\,dt,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

где $\gamma: |z-a| = \rho, \quad r < \rho < R$.

Ряд (4.2.I) называется рядом Лорана для функции $f(z)$.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ – его правильная (регулярная) часть, сходящаяся при $|z-a| < R$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ – главная часть ряда Лорана, сходящаяся для z, у которых $|z-a| > r$.

Практически разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана иногда можно получить проще, используя так называемые основные разложения.

Примеры.

I. Функция $f(z) = \frac{1+z}{z^2+3z-4} = \frac{1+z}{(z+4)(z-1)}$ – аналитическая всюду, где $z \neq -4$ и $z \neq 1$. Составим различные ее лорановские разложения.

а) Составим разложение этой функции в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 4$. Представим $f(z)$ в виде суммы двух функций, одна из которых аналитична в области $|z| < 4$, а другая – в области $|z| > 1$. Легко проверить, что справедливо разложение

$$\frac{1+z}{(z+4)(z-1)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z+4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z-1}$$

Функцию $1/(z+4)$ раскладываем по положительным степеням z.

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}-\frac{z^3}{4^3}+\dots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}$$, сходится при $\left|\frac{z}{4}\right|<1$ или $|z|<4$.

Функцию $\frac{1}{z-1}$ раскладываем по отрицательным степеням z.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots+\frac{1}{z^{n-1}}+\dots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$, сходится при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ или $|z|>1$.

Итак,

$$\frac{1+z}{(z+4)(z-1)}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\quad 1<|z|<4.$$

б) Разложим $f(z)$ в ряд, сходящийся в области $|z|<1$. Для этого функции $1/(z+4)$ и $1/(z-1)$ раскладываем по положительным степеням z .

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+3z-4}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n}{4^{n+1}}-2\right)z^n,$$

$$|z|<1.$$

в) Разложение $f(z)$ в области $|z|>4$.

Функции $1/(z+4)$ и $1/(z-1)$ раскладываем по отрицательным степеням z .

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+3z-4}=\frac{3}{5z}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{z}}+\frac{2}{5z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$= \frac{3}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^n} + \frac{2}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3\cdot(-1)^n\cdot 4^n + 2\right)\cdot\frac{1}{z^{n+1}},$$

$$|z|>4.$$

г) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z=1$.

$$f(z)=\frac{z+1}{(z+4)(z-1)}=\frac{(z-1)+2}{(z-1)(z-1+5)}=\frac{1}{5\left(1+\frac{z-1}{5}\right)}+$$

$$+\frac{2}{5(z-1)}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{5}\right)^n+\frac{2}{5(z-1)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{5}\right)^n=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{5^n}+\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-1}}{5^n}.$$

Полученный ряд сходится, если $\left|\frac{z-1}{5}\right|<1$ или $|z-1|<5$.

Аналогично можно получить разложение $f(z)$ в ряд в области $|z+4|<5$.

Пример 2.

Функция $f(z)=e^{1/z}$ аналитическая всюду, где $z\neq 0$. Ее разложение в ряд имеет вид

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\dots+\frac{1}{n!\,z^n}+\dots,$$ сходится при $|z|>0$.

Ряд Лорана функции $f(z)$, аналитической в области $0<|z|<R$, имеет вид

$$f(z)=\dots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\frac{c_{-n+1}}{z^{n-1}}+\dots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+\dots+c_nz^n+\dots \quad (4.2.2)$$

Ряд Лорана для функции $f(z)$, аналитической в окрестности $z=\infty$ или $R<|z|<\infty$,

$$f(z)=c_0+c_1z+\dots+c_nz^n+\dots+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\dots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\dots \quad (4.2.3)$$

В ряду (4.2.3) $c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$ – является главной частью, а правильная часть – это сумма

$$\frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots$$

Точка, в которой функция $f(z)$ аналитична, называется правильной точкой функции. Если же функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $z=a$ и не определена или неаналитична в самой точке $z=a$, то $z=a$ называется особой точкой функции $f(z)$.

4.3. НУЛИ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ.

Нулем аналитической функции $f(z)$ называется такая точка $z=a$, в которой $f(a)=0$.

Если
$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0, \quad f^{(k)}(a)\neq 0,$$
то точка $z=a$ – нуль k-ого порядка функции $f(z)$.

Разложение же функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности такой точки $z=a$ имеет вид

$$f(z)=c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots=(z-a)^k\varphi(z),$$

причем $\varphi(a)\neq 0$.

Точка $z=a$, в которой нарушается аналитичность $f(z)$ называется особой; если в окрестности $z=a$ нет других особых точек функции $f(z)$, то $z=a$ – изолированная особая точка функции.

Особая точка $z=a$ является устранимой особой точкой функции, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$. В ряду Лорана для функции $f(z)$ нет главной части, т.е. членов с отрицательными степенями.

Например, для $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ точка $z=0$ – устранимая особая:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1,\qquad \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\dots$$

Особая точка $z=a$ является полюсом m-ого порядка функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$. В ряду Лорана есть члены с отрицательными степенями, старшая из которых равна m.

Например, функция $f(z)=2/z^2(1-z)$ при $z=0$ имеет полюс второго порядка, так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{2}{z^2(1-z)}=\infty,\qquad \frac{2}{z^2(1-z)}=\frac{2}{z^2}\left(1+z+z^2+\dots+\right.$$

$$\left.+z^n+\dots\right)=\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+2+2z+\dots+2z^{n-2}\dots$$

Главная часть содержит две отрицательные степени, $m=2$.

Особая точка $z=a$ называется существенно особой точкой $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует, а главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями.

Для функции $f(z)=e^{1/z}$ точка $z=0$ является существенно особой (см. пример 2, § 4.2).

4.4. ПОВЕДЕНИЕ $f(z)$ В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКЕ.

На расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ одна бесконечно удаленная точка. Ее окрестностью является внешность круга $|z|>R$ достаточно большого радиуса. При подстановке $w=1/z$ область $|z|>R$ переходит в область $|w|<\frac{1}{R}$, т.е. внутренность круга, содержащего точку $z=0$, достаточно малого радиуса; т.е. окрестность бесконечно удаленной точки переходит в окрестность нуля.

Пусть $f(z)$ аналитическая в окрестности $z=\infty$, тогда $f(1/z)$ будет аналитической в окрестности $z=0$, представим ее рядом Лорана

$$f(1/z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad z \in U(0) \qquad (4.4.1)$$

правильная часть — главная часть

Заменим в равенстве (4.4.1) z на $1/z$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n, \quad z \in U(\infty) \qquad (4.4.2)$$

правильная часть — главная часть

Особая точка $z=\infty$ является для $f(z)$:

1. устранимой, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c_0$ и в ряду (4.4.2) нет главной части.
2. Полюсом порядка m, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, в ряду (4.4.2) есть конечная главная часть, старшая степень в ней z^m.
3. Существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует, в ряду (4.4.2) главная часть содержит бесконечное число положительных степеней.

Примеры.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

$z=\infty$ - существенно особая. $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \not\exists$.

$$z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \dots + \frac{1}{n!\,z^{n-2}} + \dots,$$

$z=\infty$ - полюс второго порядка. $\lim\limits_{z\to\infty} z^2 e^{1/z} = \infty$.

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots + \frac{1}{n!\,z^n} + \dots,$$

$z=\infty$ - устранимая особая точка. $\lim\limits_{z\to\infty} e^{1/z} = 1$

5. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫЧЕТА И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ.

Пусть дана аналитическая функция $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z=a$. Она представима рядом Лорана.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (5.1.1)$$

Определение. Вычетом функции $f(z)$ при $z=a$ называется коэффициент при $(z-a)^{-1}$.

$$\text{выч}\,[\,f(z),\,a\,] = \underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z) = c_{-1}.$$

Запишем формулу для коэффициента c_{-1} ряда Лорана

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz, \qquad (5.1.2)$$

где $\gamma:\ |z-a|=\rho$, внутри круга нет других особых точек. Из формулы (5.1.2) и определения вычета имеем

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z) \qquad (5.1.3)$$

Установим формулы для вычисления вычета $f(z)$ в точке $z=a$.

1. Пусть $z=a$ – нуль некоторого порядка ф-ии $f(z)$.

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z), \quad \oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} (z-a)^k\varphi(z)\,dz = 0$$

по основной теореме Коши. Значит, в этом случае $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)=0$.

2. $z=a$ – существенно особая точка. Вычет в ней определяется после разложения в ряд Лорана функции $f(z)$. Например, используя разложение примера 2, § 4.2, можно написать

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\, e^{1/z} = 1$$

3. $z = a$ — полюс I порядка

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z-a)^n,$$

$$(z-a)\,f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^{n+1}$$

$$C_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a)\,f(z) \qquad (5.I.4)$$

Если
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi(a) \neq 0, \ \psi(a) = 0, \ \psi'(a) \neq 0,$$
то
$$C_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)\,\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

4. $z = a$ — полюс k-ого порядка

$$f(z) = \frac{C_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{C_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n,$$

$$(z-a)^k f(z) = C_{-k} + C_{-k+1} \cdot (z-a) + \ldots + C_{-1} \cdot (z-a)^{k-1} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^{n+k}.$$

Продифференцируем $(k-1)$ раз и перейдем в $\lim_{z \to a}$.

$$(k-1)!\, C_{-1} = \lim_{z \to a} \left((z-a)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

$$C_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-a)^k f(z) \right) \qquad (5.I.5)$$

Пример.

Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1-z}{(z-i)\cdot(z+1)^3}$

Особые точки: $z=i$ (полюс первого порядка) и $z=-1$ (полюс 3 порядка).

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)\,(1-z)}{(z-i)\,(z+1)^3}=\frac{1-i}{(1+i)^3}=\frac{(1-i)(1-i)^3}{(1+i)^3(1-i)^3}=$$

$$=\frac{(1-i)^4}{2^3}=\frac{(1-2i-1)^2}{8}=\frac{(-2i)^2}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{(z+1)^3\,(1-z)}{(z-i)\,(z+1)^3}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{1-z}{z-i}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{-z+i-1+z}{(z-i)^2}\right)'=\frac{i-1}{2}\lim_{z\to -1}\left((z-i)^{-2}\right)'=$$

$$=\frac{i-1}{2}(-2)\lim_{z\to -1}(z-i)^{-3}=(1-i)\cdot\frac{1}{(-1-i)^3}=-\frac{1-i}{(1+i)^3}=$$

$$=-\frac{(1-i)(1-i)^3}{(1+i)^3(1-i)^3}=-\frac{(1-2i-1)^2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Определение. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в окрестности $z=\infty$ называется коэффициент при $1/z$, взятый с обратным знаком.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-C_{-1} \qquad (5.1.6)$$

По формулам для коэффициентов Лорана получим

$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+} f(z)dz$, C^+: $|z| = R$, где R - достаточно большое число.

C^+: обход контура в направлении против часовой стрелки.

$$\underset{z=\infty}{Res}\, f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^-} f(z)dz \qquad (5.1.7)$$

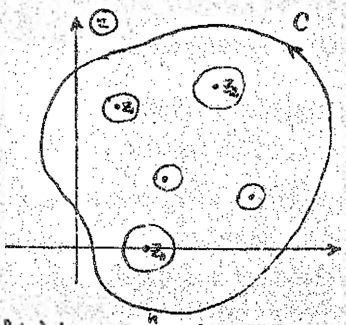
Отметим, что член $\frac{c_{-1}}{z}$ принадлежит правильной части ряда Лорана (4.4.2).

5.2. ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ

Основная теорема о вычетах:

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром C, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z), \qquad (5.2.1)$$



Каждую особую точку z_k охватим окружностью

$\gamma_k: |z - z_k| = \rho_k$,

так, чтобы эти окружности не пересекались. По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz$$, на контурах C и γ_k

одно и то же направление обхода. У формул (5.1.3)

$$\oint\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \quad k=1,2,\dots,n.$$

Значит

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{5.2.1}$$

Следствие (вторая теорема о вычетах):

Если $f(z)$ аналитическая в $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{5.2.2}$$

Пусть контур $C: |z|=R$ такого радиуса, что все особые точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ внутри круга.

По основной теореме о вычетах

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

По определению вычета в бесконечно удаленной точке (5.1.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} f(z)dz = -c_{-1} = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

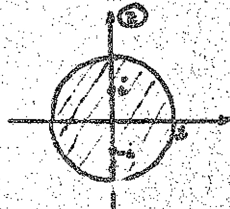
Объединим эти формулы и получим равенство (5.2.2).

Пример.

Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)} = J$

особые точки: $z=-i$, $z=i$, $z=-3$

Внутри круга $|z|<2$ только $z=\pm i$ (полюса I порядка).



$$J = 2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right).$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)(z+3)} = \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z+3)} =$$

$$= \frac{i^2}{2i\cdot(i+3)} = \frac{i}{2(3+i)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z^2(z+i)}{(z^2+1)(z+3)} = \lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z+3)} =$$

$$= \frac{(-i)^2}{(-2i)(3-i)} = \frac{1}{2i(3-i)} = -\frac{i}{2(3-i)}.$$

$$J = 2\pi i\left(\frac{i}{2(3+i)} - \frac{i}{2(3-i)}\right) = \pi i^2\left(\frac{1}{3+i} - \frac{1}{3-i}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{10}(3-i-3-i) = \frac{\pi}{5}i.$$

§ 3. Вычисление определенных собственных и несобственных интегралов с помощью вычетов.

Основная теорема о вычетах позволяет свести вычисление интеграла $\oint_C f(z)\,dz$ к вычислению вычетов подынтегральной функции $f(z)$ относительно ее изолированных особых точек, расположенных внутри данного контура C. Иногда этим методом удается вычислить определенные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, для чего эти интегралы преобразуются в интегралы по замкнутому контуру от $f(z)$.

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt, \tag{5.3.1}$$

где R – рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$.
Сделаем замену

$$z = e^{it}.$$

Тогда $|z| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ и при изменении t от 0 до 2π точка z опишет окружность $|z| = 1$.

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}. \tag{5.3.2}$$

таким образом $\cos t$ и $\sin t$ – рациональные функции от z.

$$dz = ie^{it}dt, \quad dz = iz\,dt, \quad dt = \frac{dz}{iz} \tag{5.3.3}$$

Подставим выражения (5.3.2) и (5.3.3) в интеграл (5.3.1)

$$J = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\cdot\frac{dz}{iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\,dz,$$

где $f(z)$ – рациональная функция от z. Применим теорему о вычетах.

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \quad \text{где} \quad (z = z_k) \in (|z|<1),$$
$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Примеры. Вычислить интегралы:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}, \qquad J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin t}$$

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\cos x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(5-4\cdot\frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5z-2z^2-2}$$

$$= i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5z+2} = \left| \begin{array}{l} 2z^2-5z+2=0 \\ z_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = \dfrac{5\pm 3}{4}\end{array}\right| =$$

$$= i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})} = \frac{i}{2}\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) =$$

$$= -\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\sin t} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(3+\frac{z^2-1}{2iz}\right)} = 2\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{6iz+z^2-1} =$$

$$= 2\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6iz-1} = 2\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$z^2+6iz-1=0 \qquad z_{1,2} = -3i \pm\sqrt{-9+1} = -3i\pm\sqrt{8}\,i$

$= (-3\pm 2\sqrt{2})\,i.$

$z_1 = -(3-2\sqrt{2})i \,, \qquad z_1 \in (|z|<1)$

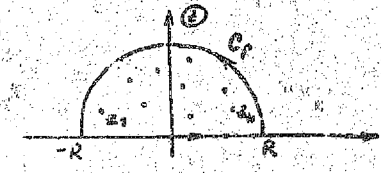
$z_2 = -(3+2\sqrt{2})i \,, \qquad z_2 \notin (|z|<1)$

$$\mathcal{J}_2 = 2\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 4\pi i\cdot\frac{1}{z_1-z_2} = \frac{4\pi i}{4\sqrt{2}\,i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

II. Вычисление несобственных интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая на действительной оси функция, в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ имеет конечное число изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Проведем полуокружность $|z|=R$ достаточно большого радиуса R, чтобы все особые точки попали внутрь полукруга.



$$C_R: |z|=R,\ \operatorname{Im} z \geq 0$$

$$C = C_R \cup [-R; R]$$

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

к которому можно применить основную теорему о вычетах

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(\ ).$$

Затем в равенстве (5.3.4)

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (5.3.4)$$

перейдем к пределу при $R \to \infty$. Если окажется, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0, \qquad (5.3.5)$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \quad z_k \in (\operatorname{Im} z>0),\ k=\overline{1,n}. \qquad (5.3.6)$$

Условие (5.3.5) выполняется, если:

а) для функции $f(z)$ $z=\infty$ является нулем второго и выше порядка.

$$f(z)=\frac{C_{-2}}{z^2}+\frac{C_{-3}}{z^3}+\frac{C_{-4}}{z^4}+\ldots=\frac{1}{z^2}\varphi(z),\quad \lim_{z\to\infty}\varphi(z)=C_{-2},$$

отсюда следует, что в окрестности $z=\infty$ функция $\varphi(z)$ ограничена, $|\varphi(z)|\le M$, $|z|\ge R_1$, $z\in C_R$.

Оценим интеграл

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right|=\left|\int_{C_R}\frac{1}{z^2}\varphi(z)dz\right|\le M\cdot\left|\int_{|z|=R}\frac{1}{z^2}dz\right|=$$

$$=M\cdot\left|\int_0^{\pi}\frac{Ri\,e^{i\varphi}d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}}\right|\le\frac{M}{R}\int_0^{\pi}d\varphi=\frac{M\cdot\pi}{R}\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

1. Особых точек на действительной оси, $z=x$, $-\infty<x<\infty$.

2. В верхней полуплоскости $z=i$ – особая точка (полюс третьего порядка).

3. На бесконечности $f(z)$ имеет полюс 6 порядка. Значит, можно применить формулу (5.3.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\cdot\operatorname{Res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^3}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''=$$

$$=\pi i\cdot\lim_{z\to i}\left(\frac{-3}{(z+i)^4}\right)'=\pi i\,\frac{(-3)(-4)}{(i+i)^5}=\frac{12\pi i}{32 i}=\frac{3}{8}\pi.$$

б) Второй случай, когда выполняется условие (5.3.5).

Лемма Жордана.

Если подынтегральная функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = e^{itz}\mathcal{F}(z)$ $(t>0)$, где $\mathcal{F}(z)$ – аналитическая на действительной оси функция, имеет в верхней полуплоскости конечное число особых точек и $\lim\limits_{z\to\infty}\mathcal{F}(z)=0$, тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$

В этом случае.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathcal{F}(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Примеры. Вычислить интегралы:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-6x+10}, \qquad \mathcal{I}_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-6x+10}$$

$$f(x) = \frac{x e^{ix}}{x^2-6x+10} \qquad t=1>0$$

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2-6z+10} = \frac{z e^{iz}}{(z-3-i)(z-3+i)}$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{z^2-6z+10}$$

1. $\mathcal{F}(z)$ – аналитическая функция при $z=x$, $-\infty<x<\infty$,

2. При $z_1=3+i$ у $\mathcal{F}(z)$ – полюс первого порядка.

3. $\lim\limits_{z\to\infty}\mathcal{F}(z)=0$

$$\operatorname*{Res}_{z=3+i} f(z) = \lim_{z\to 3+i}\frac{z e^{iz}}{z-3+i} = \frac{(3+i)e^{i(3+i)}}{3+i-3+i} = \frac{3+i}{2i}e^{-1+3i} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{2i}(3+i)(\cos 3 + i\sin 3) = \frac{e^{-1}}{2i}\left(3\cos 3 - \sin 3 + i(\cos 3 + 3\sin 3)\right)$$

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-6x+10}\,dx = 2\pi i\,\frac{e^{-1}}{2i}\left(3\cos 3 - \sin 3 + i(\cos 3 + 3\sin 3)\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2-6x+10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-6x+10}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-6x+10}\,dx =$$

$$= y_1 + i\,y_2 = \pi e^{-1}\left(3\cos 3 - \sin 3 + i(\cos 3 + 3\sin 3)\right)$$

Отсюда следует

$$y_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-6x+10}\,dx = \pi e^{-1}(3\cos 3 - \sin 3) \approx -3{,}546.$$

$$y_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-6x+10}\,dx = \pi e^{-1}(\cos 3 + 3\sin 3) \approx -0{,}655.$$

6. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Операционное исчисление в настоящее время называют азбукой автоматики и телемеханики. Основателями его являются русские ученые Ващенко-Захарченко и Летников. Операционное исчисление обратило на себя внимание после того, как английский инженер Хевисайд получил ряд важных результатов.

6.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ.

Определение. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ действительного аргумента называется функция комплексного переменного $\mathcal{F}(p)$, определяемая формулой

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \qquad (6.1.1)$$

Интеграл (6.I.I) несобственный. Выясним условия на функцию $f(t)$, при которых этот интеграл будет сходиться.

При изучении физических процессов переменная t – время, процесс начинается с некоторого момента $t=0$.

1. $f(t)=0$ при $t<0$.
2. При $t>0$ $f(t)$ – непрерывна на всей оси t, $0 \le t < \infty$, за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.
3. При возрастании t $|f(t)|$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции

$|f(t)| \le M e^{\alpha t}$, M и α = const, α – показатель роста функции $f(t)$.

Эти три условия обеспечивают сходимость интеграла (6.I.I).

Функция $f(t)$, удовлетворяющая трем условиям, называется оригиналом, а функция $F(p)$, соответствующая ей по формуле (6.I.I), называется изображением.

Оригиналами являются все ограниченные функции (у $\cos t$ и $\sin t$ $\alpha=0$), степенные функции t^n $(n>0)$, т.к. любая степенная функция растет медленнее показательной.

Функция $f(t)=\frac{1}{t-4}$ не является оригиналом, при $t=4$ у нее разрыв второго рода.

$f(t)=e^{t^2}$ – не является оригиналом, т.к. не удовлетворяет условию 3).

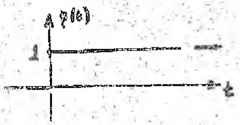
Соответствие между оригиналом и изображением записывают так:

$$F(p) = L(f(t)), \qquad f(t) = L^{-1}(F(p))$$

$$F(p) \risingdotseq f(t), \qquad f(t) \fallingdotseq F(p)$$

Примеры. Найти изображения следующих функций:

I. единичной функции Хевисайда



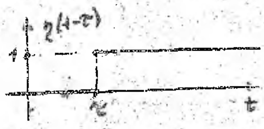
$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

$$L(\eta(t)) = \frac{1}{p}, \quad \eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}, \quad 1 \doteqdot \frac{1}{p}.$$

2.

$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$



$$\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty \eta(t-\tau)\, e^{-pt}\,dt = \int_\tau^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_\tau^\infty =$$

$$= \frac{1}{p} e^{-p\tau}, \quad \eta(t-\tau) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-p\tau}, \tau > 0; \quad L(\eta(t-\tau)) = \frac{1}{p} e^{-p\tau}$$

Если $f(t)$ является оригиналом, то $\mathcal{F}(p)$ сходится абсолютно для всех значений комплексного переменного p, удовлетворяющих неравенству $Re\,p > \alpha$, α – показатель роста $f(t)$. В полуплоскости $Re\,p > \alpha$ $\mathcal{F}(p)$ является функцией аналитической.

3. $f(t) = e^{at}$, $a = a_1 + i a_2$.

Чтобы эта функция была оригиналом, ее надо понимать так

$$f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} e^{at}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}\,dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a}$$

$$L(e^{at}) = \frac{1}{p-a}; \quad e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a}, \quad Re\,p > Re\,a$$

4. $f(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N},\quad f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} t^n, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt}\,dt = \frac{n!}{p^{n+1}},\quad \operatorname{Re} p > 0.$$

$$L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}};\qquad t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}},\quad \operatorname{Re} p > 0.$$

6.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Принято оригиналы обозначать малыми буквами $f(t)$, $g(t)$, а их изображения заглавными буквами $\mathcal{F}(p)$, $G(p)$.

I. Теорема линейности. Для любых постоянных A и B (действительных или комплексных) справедливо равенство

$$L(A f(t) + B g(t)) = A\cdot\mathcal{F}(p) + B\,G(p).$$

Справедливость теоремы следует из справедливости свойства линейности для несобственного интеграла.

Найдем изображения для $\cos t$, $\sin t$, $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$.

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right) = \frac{p+i-p+i}{2i(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1}.$$

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},\qquad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$$

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}$$

$$\operatorname{ch} t \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}\qquad \operatorname{sh} t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}$$

2. Теорема подобия.

Для любой положительной константы λ

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt = \left| \begin{matrix} \lambda t = u \\ t = \frac{u}{\lambda} \\ \lambda > 0 \end{matrix} \right| = \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{\lambda}u}\frac{du}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{\lambda}u}du = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Отсюда следуют формулы

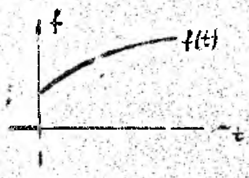
$$\sin\omega t \doteq \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{\omega^2}+1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}; \quad \cos\omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$\operatorname{sh}\omega t \doteq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}; \qquad \operatorname{ch}\omega t \doteq \frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

3. Теорема запаздывания.

Если $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{F}(p)$ и τ – положительное число, то $f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}\mathcal{F}(p)$ или $\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}\mathcal{F}(p)$

(включение оригинала с запаздыванием на τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$)



$f(t) = 0, \ t < 0$

$f(t-\tau) = 0, \ t < \tau$

$$f(t-\eta) = f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t<0 \\ t, & \text{если } 0 \le t < 1, \\ 2, & \text{если } 1 < t \le 2, \\ 4-t, & \text{если } 2 < t \le 4 \\ 0, & \text{если } t > 4 \end{cases}$$

{ В момент времени $t=0$ "включается" функция $f(t)=t$, которая при $t=1$ снимается и включается $f(t)=2$, которая снимается при $t=2$ и включается $f(t)=4-t$, ее снимают при $t=4$).

Запишем это с помощью функции сдвига $\eta(t-\tau)$.

$$f(t) = t\cdot\eta(t) - t\cdot\eta(t-1) + 2\eta(t-1) - 2\cdot\eta(t-2) + (-t+4)\eta(t-2) - (4-t)\eta(t-4) = \varphi_1(t)\cdot\eta(t) + \varphi_2(t-1)\cdot\eta(t-1) + \varphi_3(t-2)\eta(t-2) + \varphi_4(t-4)\cdot\eta(t-4) = t\cdot\eta(t) + (-t+1+1)\cdot\eta(t-1) + (-2-t+4)\cdot\eta(t-2) + (t-4)\eta(t-4) = t\cdot\eta(t) - (t-1-1)\eta(t-1) - (t-2)\eta(t-2) + (t-4)\eta(t-4).$$

$$\varphi_1(t) = t,\quad \varphi_2(t) = -(t-1),\quad \varphi_3(t) = -t,\quad \varphi_4(t) = t$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p}.$$

4. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Применим теорему запаздывания к построению изображения единичного импульса $\varphi(t)$, действующего в течение промежутка времени τ.

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(u)\, e^{-p(u+\tau)}\,du = e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u)\, e^{-pu}\,du = e^{-p\tau}\cdot F(p).$$

На этой теореме основано изображение импульсных функций.

Пример 1. Найти изображение функции

$$f(t) = (t-2)^3\, \eta(t-2)$$

Функция t^3 включается с запаздыванием на $\tau=2$.

$$L(f(t)) = e^{-2p}L(t^3) = e^{-2p}\cdot\frac{3!}{p^4} = \frac{6e^{-2p}}{p^4}$$

Пример 2. Построить график $f(t)=(t^2-6t+9)\cdot\eta(t-3)$ и найти ее изображение.

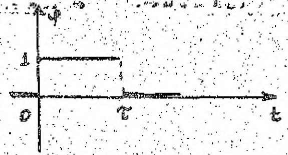
Эта функция описывает процесс, включенный с запаздыванием на $\tau=3$.

Запишем $f(t)=\varphi(t-3)\cdot\eta(t-3)$, $\varphi(t-3)=(t-3)^2$,

$\varphi(t)=t^2$ включена с запаздыванием на $\tau=3$.

$$L(f(t)) = L(\varphi(t))\cdot e^{-3p} = L(t^2)\, e^{-3p} = \frac{2}{p^3}e^{-3p} = \frac{2e^{-3p}}{p^3}.$$

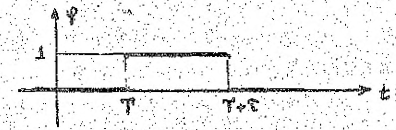
Пример 3. Записать одним аналитическим выражением и найти изображение



$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0<t<\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$

$$\varphi(t)=1\cdot\eta(t)-1\cdot\eta(t-\tau)\ ,\quad \Phi(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p\tau}=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right).$$

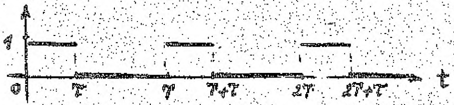
Пусть единичный импульс действует в течение времени τ, начиная с $t=T$.



Предыдущий рисунок смещен вправо на T, по теореме запаздывания получим

$$\Phi_1(p)=\Phi(p)\cdot e^{-pT}=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)e^{-pT}.$$

Пусть имеется периодическая система импульсов



Применим свойство линейности и теорему запаздывания; получим

$$F(p)=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)+\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)e^{-pT}+\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-2pT}+\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)e^{-3pT}+\dots=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)\left(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+e^{-3pT}+\dots\right)=$$

$$= \frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}}\,,\qquad \left|e^{-pT}\right|<1$$

Если $T=2\tau$, то $\mathcal{F}(p)=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-2p\tau}}=$

$$=\frac{1}{p}\,\frac{1}{1+e^{-p\tau}}=\frac{e^{\frac{p\tau}{2}}}{p\left(e^{\frac{p\tau}{2}}+e^{-\frac{p\tau}{2}}\right)}=\frac{1}{2p}\cdot\frac{e^{\frac{p\tau}{2}}}{ch\,\frac{p\tau}{2}}.$$

Можно доказать 4 теорему:

Если $f(t)$ – оригинал периода T, то $\mathcal{F}(p)=\dfrac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}$.

5. Теорема смещения в изображении.

Если $f(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$ и λ – любая константа, то

$$e^{\lambda t}f(t)\risingdotseq\mathcal{F}(p-\lambda)$$

$$L\left(e^{\lambda t}f(t)\right)=\int_0^\infty e^{\lambda t}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t}dt=$$

$$=\mathcal{F}(p-\lambda)$$

Отсюда следует формулы:

$$e^{\lambda t}\cos\omega t\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}\,;\quad e^{\lambda t}\sin\omega t\risingdotseq\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}\,;$$

$$e^{\lambda t}ch\,\omega t\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}\,;\quad e^{\lambda t}sh\,\omega t\risingdotseq\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}\,;$$

$$e^{\lambda t}t^n\risingdotseq\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}.$$

6. Теорема о дифференцировании оригинала.

Пусть функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на $(0,+\infty)$ и $f^{(n)}(t)$ является оригиналом. Тогда:

а) функции $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ так же являются оригиналами;

б) существ. уг $f(+0)=\lim\limits_{t\to+0} f(t)$, $f'(+0)=\lim\limits_{t\to+0} f'(t), \ldots,$

$$f^{(n-1)}(+0)=\lim_{t\to+0} f^{(n-1)}(t);$$

в) если $\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{F}(p)$, то

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))=p^n\mathcal{F}(p)-f(+0)p^{n-1}-f'(+0)p^{n-2}-\ldots\cdot f^{(n-1)}(+0)$$

В частности при $n=1$ получим

$$\mathcal{L}(f'(t))=p\,\mathcal{F}(p)-f(+0),$$

при $n=2$ $\quad \mathcal{L}(f''(t))=p^2\mathcal{F}(p)-pf(+0)-f'(0).$

Если функция $f(t)$ и ее производные любых порядков непрерывны в 0, то $f(+0)=f(-0)=0$,

$f'(+0)=f''(+0)=\ldots=f^{(n-1)}(+0)=0$, то тогда

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))=p^n\mathcal{F}(p) \quad \text{или} \quad f^{(n)}(t) \doteqdot p^n\mathcal{F}(p).$$

Операция дифференцирования оригинала заменяется операцией умножения изображения на p.

Пример. Найти изображение дифференциального выражения

$$x''-2x'+5x \quad \text{при} \quad x(+0)=x(0)=2,\ x'(+0)=x'(0)=-\ldots$$

Пусть $\mathcal{L}(x(t))=\bar{x}$, тогда

$$\mathcal{L}(x''-2x'+5x)=\mathcal{L}(x'')-2\mathcal{L}(x')+5\mathcal{L}(x)=p^2\bar{x}-2p+$$

$$+3-2(p\bar{x}-2)+5\bar{x}=(p^2-2p+5)\bar{x}-2p+7.$$

7. Теорема о дифференцировании изображения

Если $L(f(t))=\mathcal{F}(p)$, то $L(-tf(t))=\mathcal{F}'(p)$, т.е. умножению оригинала на $-t$ соответствует производная от изображения.

Известно, что $\mathcal{F}(p)$ в области существования функция аналитическая

$$\mathcal{F}(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

$$\mathcal{F}'(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot(-t)e^{-pt}dt = L(-tf(t))$$

$$(-t)f(t)\doteqdot\mathcal{F}'(p) \text{, или } L(-tf(t))=\mathcal{F}'(p),$$

$$(-t)^n f(t)\doteqdot\mathcal{F}^{(n)}(p) \text{, или } L((-t)^n f(t))=\mathcal{F}^{(n)}(p)$$

Пример. Найти изображение для $f(t)=t\cos 3t$.

Известно, что

$$\cos 3t\doteqdot\frac{p}{p^2+9},$$

тогда

$$(-t)\cos 3t\doteqdot\left(\frac{p}{p^2+9}\right)'=\frac{p^2+9-2p^2}{(p^2+9)^2}=\frac{9-p^2}{(p^2+9)^2},$$

$$t\cos 3t\doteqdot\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$$

8. Теорема об интегрировании оригинала.

Если $L(f(t))=\mathcal{F}(p)$, то $L\left(\int_0^t f(u)du\right)=\frac{\mathcal{F}(p)}{p}$,

т.е. интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p.

9. Теорема об умножении изображений (теорема Бореля).

Сверткой двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot\varphi(t-u)\,du = f*\varphi.$$

Так как $f(t)$ и $\varphi(t) \in$ множеству оригиналов и равны 0 при $t<0$, то их сверткой называется интеграл вида

$$\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)\,du = f*\varphi.$$

Свертка оригиналов обладает свойствами

1. $f*\varphi = \varphi * f$ (переместительность).
2. $(f*g)*\varphi = f*(g*\varphi)$ (ассоциативность).
3. $(\alpha f+\beta g)*\psi = \alpha(f*\varphi)+\beta(g*\varphi)$ (линейность).

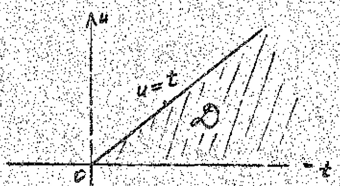
Теорема Бореля

Если $f(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то $f(t)*\varphi(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)\cdot\Phi(p)$, т. е. свертке оригиналов соответствует произведение изображений.

$$\mathcal{L}(f*\varphi) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(u)\varphi(t-u)\,du\right)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt}\,dt \int_0^t f(u)\varphi(t-u)\,du.$$

Изменяем порядок интегрирования в этом двойном интеграле по бесконечной области $\mathcal{D}$.



$$\mathcal{L}(f*\varphi) = \int_0^{\infty} f(u)\,du \int_u^{\infty}\varphi(t-u)e^{-pt}\,dt = \left|\begin{matrix} t-u=z \\ dt=dz \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^\infty f(u)\,du \int_0^\infty \varphi(z)\, e^{-pz-pu}\, dz = \int_0^\infty f(u)\, e^{-pu}\, du \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \varphi(z) e^{-pz}\, dz = \mathcal{F}(p)\cdot \Phi(p).$$

Пример. Найти оригинал для изображения

$$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}.$$

Известно, что

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = t, \quad L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) = e^t$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}\right) = t * e^t = e^t * t = \int_0^t e^u (t-u)\, du =$$

$$= t\int_0^t e^u\, du - \int_0^t u e^u\, du = t e^u \Big|_0^t - (u e^u - e^u)\Big|_0^t =$$

$$= te^t - t - te^t + e^t - 1 = e^t - t - 1.$$

$$f(t) = e^t - t - 1.$$

7. Нахождение оригинала по изображению

В простых случаях оригинал по заданному изображению $\mathcal{F}(p)$ находят по таблице соответствия между оригиналами и изображениями.

Примеры. Найти $f(t)$ по заданной функции $\mathcal{F}(p)$.

$$\mathcal{F}_1(p) = \frac{1}{p^5}, \quad f_1(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p^5}\right) = \frac{1}{4!}t^4 = \frac{1}{24}t^4.$$

$$\mathcal{F}_2(p) = \frac{3}{p^2+9}, \quad f_2(t) = L^{-1}\left(\frac{3}{p^2+9}\right) = \sin 3t.$$

$$\mathcal{F}_3(p) = \frac{4}{(p-3)^2-4} = 2\cdot\frac{2}{(p-3)^2-2^2}; \quad f_3(t) = 2e^{3t}\,\mathrm{sh}\,2t.$$

Рассмотрим общие способы нахождения оригинала.

7.1. Теорема разложения.

Если $\mathcal{F}(p)$ – аналитическая функция в окрестности $z=\infty$ и $\lim\limits_{\operatorname{Re}p\to\infty} \mathcal{F}(p)=0$, имеет разложение в ряд

$$\mathcal{F}(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}, \text{ то } f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1},$$

причем этот ряд сходится при всех t.

Пример. Дана $\mathcal{F}(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$, $\lim\limits_{p\to\infty}\mathcal{F}(p)=0$.

$$\mathcal{F}(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{p^n}+\ldots$$

Тогда

$$f(t)=1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3\cdot 2!}t^2-\frac{1}{4\cdot 3!}t^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)!}t^{n-1}+\ldots=$$

$$=1-\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}-\frac{t^3}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n!}+\ldots$$

$$f(t)\cdot(-t)+1=e^{-t}, \quad f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

7.2. Обратное преобразование Лапласа. Применение вычетов.

Прямое преобразование Лапласа обозначается

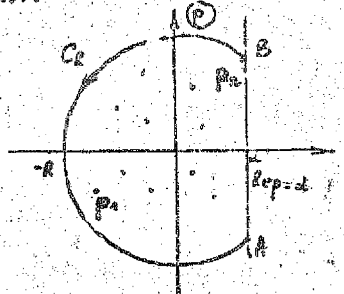
$$\mathcal{F}(p)=L(f(t))=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}\,dt \qquad (7.2.1)$$

Функция $\mathcal{F}(p)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\alpha$.
Обратное преобразование Лапласа обозначается так:

$f(t)=L^{-1}(\mathcal{F}(p))$. – Доказано, что

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}\,dp. \qquad (7.2.2.$$

Формулу (7.2.2.) называют формулой Меллина. Т.К. $\mathcal{F}(p)$ аналитическая, если $\mathrm{Re}\,p>\alpha$, то все ее особые точки находятся левее прямой $\mathrm{Re}\,p=\alpha$. Используем для вычисления несобственного интеграла (7.2.2) теорию вычетов (см. раздел 5.3 (П)).



Проводим окружность $C_R: |z|=R$ достаточно большого радиуса, охватывающую все особые точки функции $\mathcal{F}(p)$.

$\Gamma: C_R \cup [AB]$

(Γ - гамма) -

Γ - замкнутый контур.

$$\oint\limits_{\Gamma}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}\,dp=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\mathcal{F}(p)e^{p} \qquad (7.2.3)$$

С другой стороны

$$\oint\limits_{\Gamma}\mathcal{F}(p)e^{pt}dp=\int\limits_{AB}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}dp+\int\limits_{C_R}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}dp$$

Переходим в этом равенстве к $\lim\limits_{R\to\infty}$. По лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}dp=0$$

$$\lim_{R\to 0}\int\limits_{AB}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}dp=\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\mathcal{F}(p)\,e^{pt}dp$$

Итак получим, объединяя все результаты, что

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)\,e^{pt}. \qquad (7.2.4)$$

Если $F(p)$ - рациональная функция, т.е. $F(p)=\frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$

и $p=p_k$ - простые полюсы, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Phi(p_k)}{\Psi'(p_k)}e^{p_k t} \qquad (7.2.5)$$

Пример. Найти $f(t)$, если $F(p)=\frac{p^2+3}{p^3-2p^2-5p+6}$

Находим корни знаменателя

$$p^3-2p^2-5p+6=0, \quad \Psi(p)=0.$$

Известно, что целые корни такого многочлена являются делителями свободного члена

$$p_1=1, \quad p_2=-2, \quad p_3=3$$

$$\Phi(p)=p^2+3, \quad \Psi(p)=p^3-2p^2-5p+6, \quad \Psi'(p)=3p^2-4p-5.$$

$$f(t)=\frac{1+3}{3-4-5}e^{t}+\frac{4+3}{12+8-5}e^{-2t}+\frac{9+3}{27-12-5}e^{3t}=$$

$$=-\frac{2}{3}e^{t}+\frac{7}{15}e^{-2t}+\frac{6}{5}e^{3t}.$$

7.3. Преобразование Фурье

Преобразование Лапласа, когда каждому оригиналу $f(t)$ ставится в соответствие изображение

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt \qquad (7.3.1)$$

и каждому изображению $F(p)$ - оригинал $f(t)$ по формуле обращения

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\mathcal{F}(p)e^{pt}dp \qquad (7.3.2)$$

является частным случаем интегральных преобразований

$\mathcal{F}(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathcal{K}(t,p)dt$, где $\mathcal{K}(t,p)$ - ядро интегральных преобразований.

Преобразование Фурье определяется так:

прямое $$\Phi(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\omega t}dt=F(\varphi(t)) \qquad (7.3.3)$$

обратное $$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega t}d\omega=F^{-1}(\Phi(\omega)) \qquad (7.3.4)$$

Если $p=a+i\omega$, то в формуле (7.3.I) имеем

$$\mathcal{F}(p)=\mathcal{F}(a+i\omega)=\int\limits_0^{\infty}f(t)e^{-at}\cdot e^{-i\omega t}dt=\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)e^{-i\omega t}dt$$

$\mathcal{F}(p)=L(f(t))=F(f(t)e^{-at})$, если $f(t)=0$ при $t<0$.

Область применения преобразования Фурье значительно уже области применения преобразования Лапласа.

Это связано с тем, что для сходимости интеграла (7.3.3) функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt<M$$

Наличие в интеграле (7.3.I) дополнительного множителя e^{-at} , гасящего значения $f(t)$ на бесконечности расширяет класс оригиналов до функций, растущих на бесконечности не быстрее некоторой показательной функции, а это условие практически вовсе не является стеснительным.

Однако с точки зрения физики преобразование Фурье более естественно, чем преобразование Лапласа. Это объясняется тем, что формулы (7.3.3) и (7.3.4) связаны с разложением $\varphi(t)$ в ряд Фурье

$$\varphi(t)=\sum c_n e^{in\omega t}, \quad c_n=\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)e^{-in\omega t}dt.$$

Формулу (7.3.4) можно рассматривать как разложение $\varphi(t)$ в непрерывный спектр простых гармонических колебаний $\Phi(\omega)e^{i\omega t}$, частоты которых меняются не скачками, как в ряду Фурье, а непрерывно. Функцию $\Phi(\omega)$ - (7.3.3) - можно рассматривать как аналог коэффициентов Фурье, т.е. комплексную амплитуду колебания с частотой ω.

Величина $|\Phi(\omega)|$ показывает, какова роль этого колебания в спектре колебания $\varphi(t)$, поэтому $\Phi(\omega)$ называют спектральной функцией.

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ОПЕРАЦИОННЫМ СПОСОБОМ.

8.1. Решение ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Дано линейное дифференциальное уравнение n порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_ny=f(t), \tag{8.1.1}$$

где $y=y(t)$, $t\geq 0$.

Требуется найти решение уравнения (8.1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}. \tag{8.1.2}$$

Будем считать, что правая часть $f(t)$ – оригинал, тогда и решение $y = y(t)$ будет оригиналом.
Применим к (8.I.I) преобразование Лапласа

$$
\begin{aligned}
& y(t) \doteqdot Y(p), \\
& y'(t) \doteqdot p\,Y(p) - y_0, \\
& y''(t) \doteqdot p^2 Y(p) - p y_0 - y_0', \qquad (8.I.3) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& y^{(n)}(t) \doteqdot p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - \ldots - y_0^{(n-1)} \\
& f(t) \doteqdot F(p)
\end{aligned}
$$

Получим операторное уравнение

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)\, Y(p) - P_{n-1}(p) = F(p), \qquad (8.I.4)$$

где $P_{n-1}(p)$ – многочлен степени не выше $(n-1)$ с известными коэффициентами.
Решаем алгебраическое уравнение (8.I.4) относительно $Y(p)$.
Затем переходим к оригиналу $y(t)$. Таким образом, решение задачи Коши для ЛДУ осуществляется по следующей схеме:

ЛДУ + начальные условия		решение задачи Коши
$\downarrow$		$\uparrow$
L – преобразование		L^{-1} – преобразование
$\downarrow$		$\uparrow$
операторное уравнение	$\longrightarrow$	решение операторного уравнения

Пример. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$x'' + 4x = \sin 2t$, удовлетворяющее начальным условиям

$x(0) = 1, \quad x'(0) = -2$

Переходим к преобразованию Лапласа:

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 2$$

$$\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}$$

Операторное уравнение имеет вид:

$$p^2 X(p) - p + 2 + 4X(p) = \frac{2}{p^2+4}$$

$$(p^2+4)X(p) = p - 2 + \frac{2}{p^2+4}$$

$$X(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}$$

Операторное решение задачи Коши.

$$x(t) = L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\right) =$$

$$= \cos 2t - \sin 2t + L^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4}\right).$$

$f(t) = L^{-1}\left(\frac{2}{(p^2+4)^2}\right)$ – найдем эту функцию двумя способами:

а) с помощью вычетов, б) по теореме Бореля.

а) $F(p) = \frac{2}{(p^2+4)^2} = \frac{2}{(p+2i)^2(p-2i)^2}$; $f(t) = \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}$.

$p = \pm 2i$ – полюсы второго порядка.

$$\operatorname{Res}_{p=-2i} F(p)e^{pt} = \lim_{p\to -2i}\left(\frac{2e^{pt}}{(p-2i)^2}\right)'_p = 2\lim_{p\to -2i}\frac{te^{pt}(p-2i) - 2e^{pt}}{(p-2i)^3} =$$

$$= 2e^{-2it}\,\frac{t\cdot(-4i)-2}{(-4i)^3} = 2e^{-2it}\,\frac{-2-4it}{64i^3} = \frac{-2t+i}{16}\,e^{-2it}.$$

$$\operatorname*{res}_{p=2i} F(p)e^{pt} = \lim_{p\to 2i}\left(\frac{2e^{pt}}{(p+2i)^2}\right)'_p = 2\lim_{p\to 2i}\frac{te^{pt}(p+2i)-2e^{pt}}{(p+2i)^3} =$$

$$= 2e^{2it}\,\frac{t\cdot 4i-2}{(4i)^3} = 2e^{2it}\,\frac{4it-2}{-64i} = 2\cdot\frac{-2t-i}{32}\,e^{2it} =$$

$$= -2\,\frac{2t+i}{32}\,e^{2it} = -\frac{2t+i}{16}\,e^{2it}.$$

$$f(t) = \frac{-2t+i}{16}\,e^{-2it} - \frac{2t+i}{16}\,e^{2it} =$$

$$= -\frac{t}{8}\left(e^{-2it}+e^{2it}\right) + \frac{i}{16}\left(e^{-2it}-e^{2it}\right) =$$

$$= -\frac{t}{8}\cdot 2\cos 2t - \frac{i}{16}\cdot 2i\sin 2t = -\frac{t}{4}\cos 2t +$$

$$+\frac{1}{8}\sin 2t.$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{(p^2+4)^2}\right) = -\frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t.$$

б) $F(p) = \dfrac{2}{(p^2+4)^2} \quad \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{p^2+4} \cdot \dfrac{2}{p^2+4}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin 2t * \sin 2t = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2u\cdot\sin 2(t-u)\,du =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \cos(4u-2t)\,du - \frac{1}{4}\int_0^t \cos 2t\cdot du = \frac{1}{16}\sin(4u-2t)\Big|_0^t -$$

$$-\frac{1}{4}t\cos 2t = \frac{1}{16}\sin 2t - \frac{1}{16}\sin(-2t) - \frac{1}{4}t\cos 2t =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t .$$

Запишем решение задачи Коши

$$x(t) = \cos 2t - \sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t$$

$$x(t) = \left(1-\frac{t}{4}\right)\cos 2t - \frac{7}{8}\sin 2t .$$

8.2. Решение систем ЛДУ.

Решение систем ЛДУ проводится по схеме, данной в § 8.1. Каждое из уравнений системы преобразуем по Лапласу. Получится алгебраическая система относительно изображений. Записываем сначала операторное решение системы, затем переходим к оригиналам.

Пример. Решить задачу Коши для системы ЛДУ

$$\begin{cases} x' + y = 0, & x(0) = 1 \\ x + y' = 0, & y(0) = -1 . \end{cases}$$

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad x'(t) \doteqdot pX(p) - 1 .$$

$$L(y(t)) = Y(p), \quad L(y'(t)) = pY(p) + 1$$

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) - 1 = 0 \\ X(p) + pY(p) + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1 \\ X(p) + pY(p) = -1 . \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1, \quad \Delta_x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p+1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -p-1$$

$$\left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1}, \quad \mathcal{L}^{-1}(X(p)) = x(t) = e^t \\ Y(p) &= -\frac{(p+1)}{p^2-1} = \frac{-1}{p-1}; \quad \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = y(t) = e^{t} \end{aligned}\right\}$$

Пример. Решить уравнение

$$x'' + x = f(t), \text{ где } f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t > \pi \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Запишем правую часть единым аналитическим выражением, используя функцию $\rho(t-\tau)$.

$$f(t) = \cos t \cdot \rho(t) - \cos t \cdot \rho(t-\pi) = \cos t \cdot \rho(t) -$$

$$- \cos(t-\pi) \cdot \rho(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(p), \quad \mathcal{L}(x'(t)) = pX(p), \quad \mathcal{L}(x''(t)) = p^2 X(p)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} e^{-\pi p}.$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} e^{-\pi p}$$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{(p^2+1)^2} e^{-\pi p}.$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p)) = \varphi(t) \cdot \rho(t) + \varphi(t-\pi) \cdot \rho(t-\pi).$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \cos t * \sin t = \sin t * \cos t =$$

$$= \int_0^t \sin u \cdot \cos(t-u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sin t + \sin(2u-t)\right)du =$$

$$= \frac{1}{2}\,t\sin t - \frac{1}{4}\cos(2u-t)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\,t\sin t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos(-t) =$$

$$= \frac{1}{2}\,t\sin t\,.$$

Итак, решение задачи Коши для данного ДУ имеет вид

$$x(t) = \frac{t\sin t}{2}\cdot\eta(t) + \frac{(t-\pi)\sin(t-\pi)}{2}\cdot\eta(t-\pi)\,.$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t<0; \\ \frac{1}{2}t\sin t, & \text{если } 0 \le t \le \pi; \\ \frac{1}{2}t\sin t - \frac{t-\pi}{2}\sin t = \frac{\pi}{2}\sin t, & \text{если } t>\pi \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

I. Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа:

I. $(4-3i)^i$	6. $\operatorname{ch}(3+\frac{\pi}{4}i)$	II. $\sin(\frac{\pi}{4}+i)$
2. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$	7. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$	I2. $\operatorname{Arctg}\frac{3+4i}{5}$
3. $\operatorname{Ln}(-1-i)$	8. $\cos(\frac{\pi}{6}-i)$	I3. $\operatorname{sh}(1-\frac{\pi}{2}i)$
4. $\operatorname{Arccos} i$	9. $(-1-i)^{4i}$	I4. $\operatorname{Arth}\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}$
5. $\sin\pi i$	I0. $\operatorname{Arch} 3i$	I5. $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)$

2. Построить область, заданную неравенствами:

1. $|z-1| \le 1,\ |z+1| > 2$;
2. $|z-1-i| \le 1,\ \operatorname{Im} z > 1,\ \operatorname{Re} z \ge 1$
3. $z\cdot\bar z \le 2,\ \operatorname{Re} z > -1,\ \operatorname{Im} z > -1$;
4. $|z-i| \le 1,\ -\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}$;
5. $|z-1-i| \ge 1,\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 3,$ $0 < \operatorname{Im} z \le 3,$
6. $1 < z\bar z < 2,\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z < 1$
7. $|z+i| > 1,\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z < 0$;
8. $|z| < 2,\ -\frac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{4}$;
9. $|z-2| + |z+2| \le 5$;
10. $|z-2| - |z+2| > 3$;
11. $|2z| > |1+z^2|$;
12. $|z| - 3\operatorname{Im} z \le 6$;
13. $3|z| - \operatorname{Re} z > 12$;
14. $\operatorname{Re}(1+z) \le |z|$
15. $|z-i| < 1,\ \arg z \ge \frac{\pi}{4}$
16. $\arg(z+1-i) \le \frac{\pi}{4}$.

3. Определить вид кривой

1. $z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}$,
2. $z = t^2+4t+20 - i(t^2+4t+4)$;
3. $\operatorname{Im}\overline{(z^2-\bar z)} = 2 - \operatorname{Im} z$;
4. $|z-2| = |1-2\bar z|$
5. $z = 2\operatorname{ch} 3t - 3i\operatorname{sh} 3t$;
6. $z = \sec t + i\cdot 2\operatorname{tg} t$;
7. $z = \frac{1+i}{1-t} + \frac{t(2-4i)}{-t}$
8. $z = \frac{1+t}{1-t} + i\,\frac{2+t}{2-t}$
9. $z = -2e^{it} + \frac{1}{e^{it}}$,
10. $\operatorname{Re}(z^2 - \bar z) = 0$;
11. $z^2 + \bar z^2 = 1$;
12. $z = t-2 + i(t^2-4t+5)$;
13. $z = -4\operatorname{sh} 5t - 5i\operatorname{ch} 5t$;
14. $z = 4\operatorname{cosec} t - i\,2\operatorname{ctg} t$;
15. $z = \frac{2+t}{2-t} + i\,\frac{1+t}{1-t}$.

4. Найти образ области D при отображении $w = f(z)$

1. $D: (|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0),\quad w = \frac{1-z}{1+z}$.
2. $D: (1 < |z| < 2),\quad w = \frac{z}{z-1}$.

3. $\mathcal{D}: (0 \le \operatorname{Re} z \le 1,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1)$, $\quad w = z^2$.

4. $\mathcal{D}: (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0)$, $\quad w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

5. $\mathcal{D}$ – треугольник с вершинами $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = i$,
$w = (1+i)(1-z)$

6. $\mathcal{D}$ – треугольник с вершинами $z_1 = -i,\ z_2 = 2+i,\ z_3 = -3$.
$w = 2z - zi + 3i + 0$.

7. $\mathcal{D}: (0 < \operatorname{Re} z < 1)$, $\quad w = z^{-1}$.

8. $\mathcal{D}: (0 < \arg z < \frac{\pi}{4})$, $\quad w = \dfrac{1}{z}$.

9. $\mathcal{D}$ – треугольник с вершинами $z_1 = -1-i,\ z_2 = 1,\ z_3 = i$,
$w = (-i+1)z + 3i - 5$.

10. $\mathcal{D}: (0 < \operatorname{Re} z < 1)$, $\quad w = \dfrac{z-1}{z-2}$.

11. $\mathcal{D}: (|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0)$, $\quad w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

12. $\mathcal{D}: (1 \le \operatorname{Re} z \le 2,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 8)$, $\quad w = e^z$.

13. $\mathcal{D}: (1 \le |z| \le 2,\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4})$, $\quad w = z^2$.

14. $\mathcal{D}$ – треугольник с вершинами $z_1 = 0,\ z_2 = 2+2i,\ z_3 = -1+3i$,
$w = 1+2i - (3-i)z$.

15. $\mathcal{D}: (-1 \le \operatorname{Re} z \le 1,\ -1 \le \operatorname{Im} z \le 2)$, $\quad w = (-1-i)z + i + 4$.

5. Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие – нет:

1. $w = z^2 \bar{z}$,	6. $w = z e^{z}$,	11. $w = 3e^{z^2}$,
2. $w = \lvert z \rvert \cdot \operatorname{Re} \bar{z}$,	7. $w = \sin 3z + i$	12. $w = \lvert z \rvert \cdot \bar{z}$,
3. $w = (2-3i)z^2 - iz + i$,	8. $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$,	13. $w = \operatorname{ch}(2z)$,

4. $w = z\cos z$ 9. $w = z|z|$ 14. $w = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$,

5. $w = \frac{z-i}{z+i}$, 10. $w = i\cos z$, 15. $w = iz^2 - 2z + 4$.

6. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

1. $u = 3x^2y - y^3$, $v = 3xy^2 - x^3$, $z_0 = -1+i$.
2. $u = e^{1+y}\cos x$, $v = -e^{1+y}\sin x$, $z_0 = \frac{\pi}{4} + i$.
3. $u = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$, $v = 3x^2y - y^3 + 2xy$, $z_0 = \frac{2}{3}i$.
4. $u = 2xy - 2x$, $v = y^2 - 2y - x^2 + 1$, $z_0 = 1$.
5. $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v = e^x(x\sin y + y\cos y)$, $z_0 = -1 + i\pi$.
6. $u = x^2 + 2x - y^2$, $v = 2xy + 2y$, $z_0 = i$.
7. $u = e^{-1-y}\cos x$, $v = e^{-1-y}\sin x$, $z_0 = \pi - i$.
8. $u = e^{-x}\cos y$, $v = -e^{-x}\sin y$, $z_0 = i$.
9. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
10. $u = 2xy$, $v = y^2 - x^2$, $z_0 = -i$.
11. $u = 2x^2 - 2y^2 + y$, $v = 4xy - x$, $z_0 = -1+i$.
12. $u = e^{y^2-x^2}\cos 2xy$, $v = -e^{y^2-x^2}\sin 2xy$, $z_0 = i$.
13. $u = x^3 - 3xy^2 + 3x$, $v = 3x^2y - y^3 + 3y - 1$, $z_0 = 1+i$.
14. $u = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$, $v = 3x^2y - y^3 + 2xy$, $z_0 = 1-i$.
15. $u = e^{1+2y}\cos 2x$, $v = -e^{1+2y}\sin 2x$, $z_0 = \frac{\pi}{6}$.

7. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, если

1. $u = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$. 9. $v = e^{-y}\sin x + y$, $f(0) = 1$.

2. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$.

3. $v=1-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$.

4. $u=x^3-3xy+1$, $f(0)=1$.

5. $v=3x^2y-y^3-y$, $f(0)=0$.

6. $u=1-e^x\sin y$, $f(0)=1+i$

7. $u=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$, $f(0)=1$

8. $v=3x^2y-y^3$, $f(0)=1$.

10. $u=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$.

11. $v=x^2-y^2-x$, $f(0)=0$.

12. $u=e^{-y}\cos x+x$, $f(0)=1$.

13. $v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=2$.

14. $v=x^2-y^2+2x+1$, $f(0)=i$

15. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x$, $f(1)=2$

8. Вычислить следующие интегралы

1. $\int\limits_{\ell}\bar{z}^2\,dz$, ℓ – отрезок прямой между точками $z_1=0$, $z_2=1+i$.

2. $\int\limits_{\ell} z^3e^{z^4}dz$, ℓ – ломаная ABC с вершинами $z_A=i$, $z_B=1$, $z_C=0$.

3. $\int\limits_{\ell}\dfrac{\bar{z}}{z}dz$, ℓ – граница области $(1<|z|<2,\ Re\,z>0)$.

4. $\int_{\ell} z\cdot\bar{z}\,dz$, $\ell:(|z|=1,\ Im\,z=0)$

5. $\int_{\ell}(\sin iz+z)\,dz$, $\ell:(|z|=1,\ Re\,z\geq 0)$

6. $\int\limits_{\ell} z\,Im\,z^2\,dz$, $\ell=AB$ – отрезок прямой между точками $z_A=0$, $z_B=1+i$.

7. $\int\limits_{\ell}(3z^2+2z)\,dz$, ℓ – дуга параболы $y=x^2$ между точками $z=0$ и $z=1+i$.

8. $\int\limits_{\ell} e^{|z|^2}\,Im\,z\,dz$, ℓ – отрезок прямой между точками $z=1+i$ и $z=0$.

9. $\int_{\ell} (z^3+\sin z)\,dz$, $\ell: (|z|=1,\ \mathrm{Re}\,z \geq 0)$.

10. $\int_{\ell} z\,\mathrm{Im}\,z^2\,dz$, $\ell: (|z|=1,\ -\pi \leq \arg z \leq 0)$.

11. $\int_0^i z\cos z\,dz$, 12. $\int_{1+i}^{2i} (z^3-z)\,e^{\frac{z^2}{2}}\,dz$,

13. $\oint_{\ell} z\,\mathrm{Re}\,z\,dz$, $\ell: |z|=1$.

14. $\int_{\ell} \mathrm{Re}\,\frac{\bar{z}}{z}\,dz$, $\ell = \overline{ABC}$, $AB: (|z|=1, \mathrm{Im}\,z \geq 0)$,

BC – отрезок с концами в точках $z_1=1$, $z_2=2$.

15. $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,dz$ по дуге окружности $|z|=1$, $\mathrm{Im}\,z \geq 0$, $\mathrm{Re}\,z \geq 0$.

9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в кольце K:

1. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $K: 2 < |z| < 3$.

2. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+2z-8}$, $K: 1 < |z+2| < 4$.

3. $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $K: 1 < |z| < 2$.

4. $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$, $K: 1 < |z+2| < 3$.

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $K: 2 < |z-1| < \infty$.

6. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $K: 0 < |z-i| < 2$.

7. $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $K: 0 < |z-2| < 1$.

8. $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $K: 1 < |z| < 3$.

9. $f(z) = (z^2+z)^{-2}$, $K: 0 < |z| < 1$.

10. $f(z)=\dfrac{4z-8}{(z+1)(z-3)}$, $K:\ 3<|z|<\infty$.

11. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $K:\ 0<|z|<1$.

12. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $K:\ 3<|z|<+\infty$.

13. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-4)}$, $K:\ 1<|z|<4$

14. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $K:\ 0<|z-2|<1$

15. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$, $K:\ 0<|z-1|<1$.

10. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0

1. $f(z)=\sin\dfrac{z}{1-z}$, $z_0=1$.

2. $f(z)=e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$

3. $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$

4. $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$, $z_0=0$

5. $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0=i$

6. $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=\infty$

7. $f(z)=\dfrac{ze^{2z}}{z-1}$, $z_0=1$

8. $f(z)=i\sin^2 z+\cos\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$

9. $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=\infty$.

10. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$, $z_0=1$

11. $f(z)=ze^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.

12. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$, $z_0=2$

13. $f(z)=\dfrac{4z-3z^2}{(z-1)^2}$, $z_0=1$

14. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=0$.

15. $f(z)=z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$.

11. Исследовать характер особой точки z_0 функции $f(z)$

1. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z}$, $z_0=0$.

9. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$, $z_0=0$.

2. $f(z)=\frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=0$

3. $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$

4. $f(z)=\cos\frac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$

5. $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$

6. $f(z)=\frac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$

7. $f(z)=\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$, $z_0=0$

8. $f(z)=\frac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}$, $z_0=0$

I0. $f(z)=\frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=-1$.

II. $f(z)=\frac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$

I2. $f(z)=\frac{e^{z+i}}{z+i}$, $z_0=-i$

I3. $f(z)=\frac{z-\pi}{\sin^2 z}$, $z_0=0$

I4. $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$, $z_0=0$

I5. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$, $z_0=0$

I2. Вычислить

I. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$,

2. $\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z(z-\pi)}dz$,

3. $\oint\limits_{\ell}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$, $\ell: |z-1-i|=\frac{5}{4}$,

4. $\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{(z^3+z)^2}{i\sin z}dz$,

5. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$,

6. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}dz$

7. $\oint\limits_{\ell}\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$, $\ell: |z-\frac{3}{2}|=1$,

9. $\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1}\frac{iz(z-i)}{\sin\pi z}dz$,

I0. $\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$,

II. $\oint\limits_{|z+0,5|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$,

I2. $\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz$,

I3. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{iz}-1}{z^3}dz$,

I4. $\oint\limits_{|z|=1/3}\frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz$,

I5. $\oint\limits_{\ell}\frac{dz}{z(z^2+4)}$, $\ell: |z-i|=\frac{3}{2}$.

8. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z + 2}{4z^2+\pi z}\, dz.$

13. Вычислить

1. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2 - z}\, dz,$

2. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2 (z-3)}\, dz,$

3. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\, dz}{(z-2)^3 (z+4)},$

4. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1}\, dz,$

5. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-\sin z}{z^2}\, dz,$

6. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{(z^2-1)^2}\, dz,$

7. $\oint\limits_{\ell} \frac{z-1}{(z^2-2z+3)^2}\, dz, \quad \ell: |z-1-i| = \frac{3}{2},$

8. $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{i\, dz}{(z^2+1)^2},$

9. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)},$

10. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\, dz,$

11. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2}\, dz,$

12. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\, dz,$

13. $\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\, dz,$

14. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z}{z^2-2z+3}\, dz,$

15. $\oint\limits_{|z-2|=3/2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}\, dz.$

14. Используя теорию вычетов, найти интегралы

1. $\oint\limits_{\ell} \frac{z\, dz}{(z-1)^2 (z+2)}, \quad \ell: \ x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}.$

2. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z\, dz}{z^2 (z+1)},$

3. $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3 - iz^2}\, dz,$

4. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z\, dz}{z^4+2z^2+1},$

5. $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z}\, dz,$

6. $\oint\limits_{\ell} \frac{\cos z/2}{z^2-4}\, dz, \quad \ell: \ z = 3\cos t + 2i \sin t, \ t \in [0, 2\pi].$

7. $\oint\limits_{\ell} \frac{e^{2z}}{z^2-1}dz$, $\ell: x^2+y^2+2x=0.$

8. $\oint\limits_{C} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$, $\ell: x^2+y^2=16.$

9. $\oint\limits_{|z-1|=4} \frac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$,

10. $\oint\limits_{\ell} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$, $\ell: \frac{x^2}{4}+y^2=1.$

11. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$,

12. $\oint\limits_{\ell} \frac{dz}{z^4+1}$, $\ell: x^2+y^2=2x$,

13. $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$,

14. $\oint\limits_{|z-3|=4} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$,

15. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z\,dz}{z^2(z^2-4)}$.

15. Вычислить интегралы

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$,

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx$,

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$,

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$,

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$,

7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$,

8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$,

9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$,

10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$,

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$,

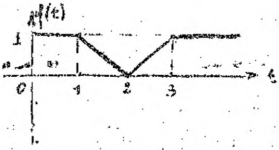
13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$,

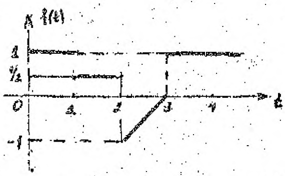
15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$

16. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение

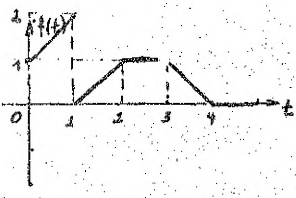
1.



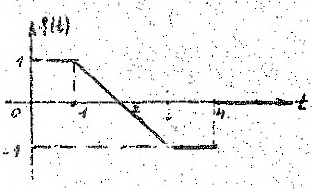
2.



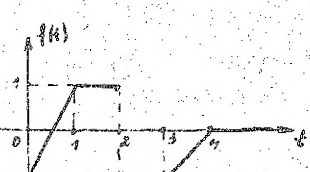
3.



4.

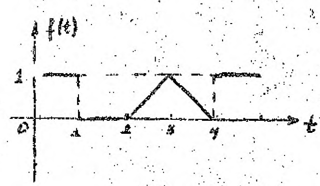


5.

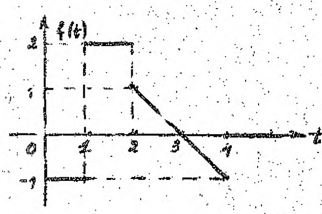


9.

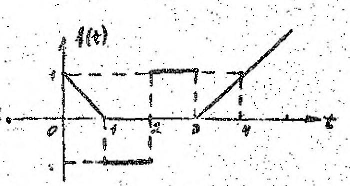
10.



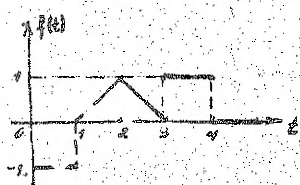
11.



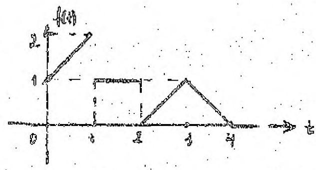
12.



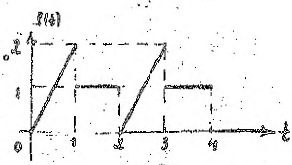
13.



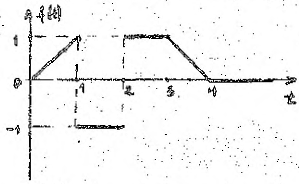
6.



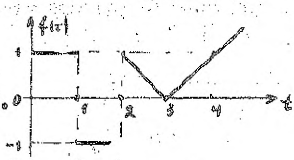
14.



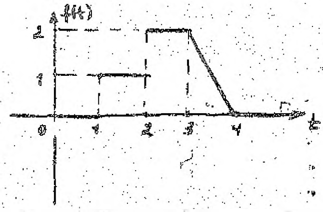
7.



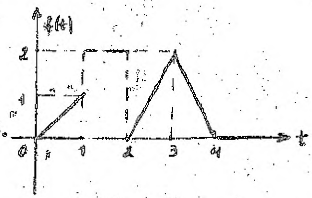
15.



8.



16.



17. Вычислить процесс $\varphi(t)$ с запаздыванием τ. Построить график и найти изображения функции $\varphi(t)\cdot\eta(t-\tau)$

1. $\varphi(t) = t^2 - t + 2$, $\tau = 1$;
2. $\varphi(t) = t^2 + 2t + 5$, $\tau = 3$,
3. $\varphi(t) = t^2 - 3t + 1$, $\tau = 1$;
4. $\varphi(t) = t^2 - 4t + 3$, $\tau = 2$;
5. $\varphi(t) = t^2 + t + 2$, $\tau = 2$,
6. $\varphi(t) = 2t^2 + 4t$, $\tau = 1$;
9. $\varphi(t) = t^2 - 2t - 3$, $\tau = 2$,
10. $\varphi(t) = t^2 - 2t + 3$, $\tau = 4$;
11. $\varphi(t) = t^2 + 3t + 2$, $\tau = 2$;
12. $\varphi(t) = t^2 - 4t + 5$, $\tau = 2$;
13. $\varphi(t) = t^2 + t + 3$, $\tau = 1$;
14. $\varphi(t) = 2t^2 - 6t$, $\tau = 3$;

7. $\varphi(t) = t^2 - 7t + 6, \quad \tau = 2;$

8. $\varphi(t) = t^2 + 2, \quad \tau = 2;$

15. $\varphi(t) = t^2 - 4t + 2, \quad \tau = 4;$

16. $\varphi(t) = t^2 + 1, \quad \tau = 1.$

18. Найти оригинал по данному изображению

1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$
2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$
3. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$
4. $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$
5. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$
6. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$
7. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$
8. $\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$
9. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$
10. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$
11. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2-2p+3)}$
12. $\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$
13. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$
14. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$
15. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$
16. $\dfrac{p}{p^4-3p^2+2}$

19. Операционным методом решить задачу Коши

1. $y'' + y' + y = 7e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$
2. $y'' + y' - 2y = -2(t+1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
3. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
4. $2y'' + 5y' = 29\cos t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$

5. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.

6. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

7. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}\cos\frac{t}{2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' + y' + y = t^2 + t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

9. $y'' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10. $y'' - {}'y = \sin t - \cos t$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

11. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

12. $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$

13. $y'' - 2y' = e^{t}(t^2 + t - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

14. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$

15. $y'' + y = \operatorname{sh} t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

20. Решить систему ДУ

1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2 \\ \dot{y} = 4y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 3 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1 \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) - 1$

11. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + 1 \end{cases}$
$x(0)=0, \quad y(0)=2$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = 2x - y + 9 \end{cases}$
$x(0)=1, \quad y(0)=0$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$
$x(0)=1, \quad y(0)=2$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2 \\ \dot{y} = 3x + y + 1 \end{cases}$
$x(0)=0, \quad y(0)=2$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x + y + 1 \end{cases}$
$x(0)=1, \quad y(0)=0$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2 \end{cases}$
$x(0)=2, \quad y(0)=0$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \end{cases}$
$x(0)=1, \quad y(0)=1$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$
$x(0)=0, \quad y(0)=2$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$
$x(0)=-1, \quad y(0)=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление.-Мн.:Выш.шк.,1976.- 256с.
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика, ч.IV.-Мн.: Выш.шк., 1987.- 240с.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.- М.:Наука,1982.-488с.
4. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.-Изд-во Киевского ун-та, 1968.-198с.
5. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления.- Мн.:Выш.шк., 1975.-400с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа.-М.:Наука, 1981.-368с.
7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплекс-

ного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.- М.:Наука,1981.-302с.

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.- М.: Наука, 1989.-464с.

9. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций.-М.:Просвещение,1977.-319с.

10. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.-М.:Наука, 1970.-319с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители: Сидоревич Михаил Павлович
Тузик Татьяна Александровна

Методические указания
по разделу "Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления" курса "Высшая математика" для студентов специальности Т.03.01.

Ответственный за выпуск Сидоревич М.П.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 20.02.96 г. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 5,1. Уч.изд.л. 5,5. Заказ № 77.
Тираж 150 экз. Бесплатно.
Отпечатано на ротапринте Брестского политехнического института. 224017, Брест, ул.Московская, 267.