УДК 517.968

ОЦЕНКИ НОРМЫ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В. А. Захарчук[1]*, И. С. Котелев*[2]
[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г.Минск*
[2]*Брестский государственный технический университет, г. Брест*
Научный руководитель: В. Т. Дацык

Через $C = C(-\infty;+\infty)$ обозначим пространство всех ограниченных равномерно непрерывных на числовой прямой функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x\in(-\infty;+\infty)} |f(x)|.$$

Для функций указанного класса построим интегральные аналоги нормальных средних Зигмунда

$$Z_\sigma^{(\vartheta)}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma \left(1-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^\vartheta\right) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)dt \quad (1)$$

Лемма. *Если* $f(x)\in C$ *и* $\widetilde{F}(x)\in C$, *то справедливо тождество.*

$$\frac{1}{\sigma^{2\rho+1}}\frac{d^{2\rho+2}}{dx^{2\rho+2}} Z_\sigma^{(2\rho+2)}(\widetilde{F};x) = $$
$$= (-1)^{\rho+1}(Z_\sigma^{(2\rho+2)}(f;x) - Z_\sigma^{(2\rho+2)}(Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x))), \quad (2)$$

где $\widetilde{F}(x)$ *– интеграл Фурье функции* $f(x)$:

$$\widetilde{F}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{u}\int_0^\sigma f(t)\cos u(t-x)dt. \quad (3)$$

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства (2)

$$Z_\sigma^{(2\rho+2)}(f;x) - Z_\sigma^{(2\rho+2)}(Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x)) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma (1-\frac{u^{2\rho+2}}{\sigma^{2\rho+2}})du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)dt -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma (1-\frac{u^{2\rho+2}}{\sigma^{2\rho+2}})(1-\frac{u^{2\rho+1}}{\sigma^{2\rho+1}})du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma (\frac{u^{2\rho+1}}{\sigma^{2\rho+1}} - \frac{u^{4\rho+2}}{\sigma^{4\rho+2}})du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)dt. \quad (4)$$

Согласно (3) и результатам работ [1, 2] будем иметь:

$$Z_\sigma^{(2\rho+2)}(\widetilde{F};x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma \frac{du}{u}(1-\frac{u^{2\rho+2}}{\sigma^{2\rho+2}})\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma (1-\frac{u^{2\rho+2}}{\sigma^{2\rho+2}})du\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F}(t)\cos u(t-x)dt. \quad (5)$$

Из условия леммы следует, что $Z_\sigma^{(2\rho+2)}(\widetilde{F};x)$ является целой функцией экспоненциального типа σ из класса B_σ. Тогда

$$\frac{d^{2\rho+1}}{dx^{2\rho+1}} Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(\tilde{F};x) =$$

$$= \frac{d^{2\rho+2}}{dx^{2\rho+2}} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\sigma} (\frac{1}{u} - \frac{u^{2\rho+1}}{\sigma^{2\rho+2}}) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\sigma} (u^{2\rho+1} - \frac{u^{4\rho+2}}{\sigma^{2\rho+2}}) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(u(t-x) + \pi(\rho+1)) dt =$$

$$= \frac{(-1)^{\rho+1}}{\pi} \int_{0}^{\sigma} (u^{2\rho+1} - \frac{u^{4\rho+2}}{\sigma^{2\rho+2}}) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt \quad . \qquad (6)$$

Из равенств (4) и (6) и результатов [3] следует справедливость леммы.

Теорема. *Если выполняются условия леммы, то*

$$\left\| f(x) - Z_{\sigma}^{(2\rho+1)}(f;x) \right\|_{C} \le G_{2\rho+1}(\omega_{2\rho+2}(f;\frac{1}{\sigma})_{C} + \sigma\omega_{2\rho+1}(\tilde{F};\frac{1}{\sigma})_{C}). \qquad (7)$$

Доказательство. Имеем

$$\left\| f(x) - Z_{\sigma}^{(2\rho+1)}(f;x) \right\|_{C} \le \left\| f(x) - Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f;x) \right\|_{C} + \left\| Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f - Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f);x) \right\|_{C} +$$

$$+ \left\| Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f;x) - Z_{\sigma}^{(2\rho+1)}(Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f);x) \right\|_{C} = u_1 + u_2 + u_3. \qquad (8)$$

Оценим каждое слагаемое (8):

$$u_1 \le c_{2\rho+1}\omega_{2\rho+2}(f;\frac{1}{\sigma})_{C}, \qquad (9)$$

$$u_2 \le \beta_{2\rho+1}\omega_{2\rho+2}(f;\frac{1}{\sigma})_{C}, \qquad (10)$$

$$u_3 = \left\| Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f;x) - Z_{\sigma}^{(2\rho+1)}(Z_{\sigma}^{(2\rho+2)}(f);x) \right\|_{C} \le C_{2\rho+1}\sigma\omega_{2\rho+2}(\tilde{F};\frac{1}{\sigma})_{C} \quad . \qquad (11)$$

Из оценок (9)–(11), на основании [4], следует справедливость заключения теоремы.

Список литературы

1. Дацык, В. Т. Некоторые оценки приближения функций класса С(-∞;+∞) нормальными средними Зигмунда / В. Т. Дацык // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 25–26 апр. 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 49–51.
2. Семенчук, Н. П. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений со старшей производной дробного порядка / Н. П. Семенчук, В. Т. Дацык // Вестник БрГТУ. – Серия: Физика, математика, химия. – 2002. – № 5. – С. 36–44.
3. Дацык, В. Т. Об одном классе методов суммирования / В. Т. Дацык, Т. В. Копайцева // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2020. С. 72–74.
4. Дацык, В. Т. Обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье функций с существенно ограниченно дробной производной / В. Т. Дацык // Вес. Нац. акад. навук Беларуси. Сер. физ-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 35–42.