ний в $\mathbf{R}^n$ с минимальным порядком дифференцирования, не меньшим 2 [3]. Гомотопическая классификация эллиптических по Дуглису-Ниренбергу систем $p > 2$ уравнений проведена в совместной работе В. И. Шевченко и его ученика Ле Хыу Зиена [4].

В настоящей работе проводится гомотопическая классификация систем вида (1) с положительным характеристическим определителем $\det L(\xi) > 0$. Множество всех таких систем обозначим через $\mathfrak{I}$; $\mathfrak{I}_+$ – подмножество $\mathfrak{I}$ эллиптических систем вида (1) для которых выполняется неравенство $a_0 > 0$; $\mathfrak{I}_-$ – подмножество $\mathfrak{I}$ эллиптических систем вида (1) для которых выполняется неравенство $a_0 < 0$.

Теорема. *Множество* $\mathfrak{I}$ *эллиптических по Дуглису-Ниренбергу систем* (1) *с положительным характеристическим определителем имеет две компоненты гомотопической связности* $\mathfrak{I}_+$ *и* $\mathfrak{I}_-$. *Произвольная система из* $\mathfrak{I}_+$ *гомотопна системе*

$$\begin{cases} u = 0, \\ \Delta v = 0, \end{cases}$$

а из $\mathfrak{I}_-$ *– системе*

$$\begin{cases} -u = 0, \\ -\Delta v = 0, \end{cases}$$

где Δ *– оператор Лапласа в* $\mathbf{R}^n$.

Список литературы

1. Волевич, Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. / Л. Р. Волевич. // Матем. сб. – 1965. – Т. 68(110), № 3. – С. 373–416.
2. Гельфанд, И. М. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными / И. М. Гельфанд, И. Г. Петровский, Г. Е. Шилов // Труды III Всесоюзного математического съезда. – М. : Изд-во АН СССР. – 1958. – Т. 3. – С. 65–72.
3. Шевченко, В. И. О гомотопической классификация систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу / В. И. Шевченко // Докл. Акад. наук СССР. – 1975. – Т. 225, № 6. – С. 1275–1277.
4. Ле Хыу Зиен. Гомотопическая классификация систем на плоскости, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу / Ле Хыу Зиен, В. И. Шевченко // Докл. Акад. наук СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 824–827.

УДК 519.6+517.983

ПРАВИЛО ОСТАНОВА В ПРОЦЕССЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Будик А.А.,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, Брест
Научный руководитель: Матысик О.В.,
кандидат физико-математических наук, доцент

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением, но $0 \in Sp\, A$ (поэтому рассматриваемая задача некорректна). Используется явный итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y,\ x_0 = 0. \tag{1}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения $Ax = y$ при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части $y_\delta,\ \|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. В случае, когда неизвестна истокопредставимость точного решения, т.е. что $x = A^s z,\ s > 0,$ метод (2) можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке [1-3]: зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного метода определим условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,\ (n < m),\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon,\ \ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \tag{3}$$

Покажем возможность применения правила (3) к методу (2). Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall w \in H$ *выполняется* $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Тогда* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \left\|A^s (E - Ag_n(A))v\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 \le s < \infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Если для некоторого* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0.$

Имеют место

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2) *выбирается по правилу* (3). Тогда $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z, s > 0$, *тогда справедливы оценки*

$$m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$$

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \tag{4}$$

Замечание. *Порядок оценки* (4) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{(s+1)}}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* [1].

Используемое в формулировке теоремы 2 *предположение, что порядок истокопредставимости точного решения равен* $s > 0$, *не требуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближённого решения. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (3) *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

Список цитированных источников

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.
2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О.В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
3. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – no. 300. – P. 290–299.

УДК 004.4

ВЗАИМОСВЯЗЬ ИНВАРИАНТОВ ЧАСТИЧНО-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Д.В. Грицук

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_m = G \tag{1}$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1}. Фактор-группы G_i/G_{i-1} называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, то число m называется длиной ряда. Производная длина группы G определяется как длина самого короткого субнормального ряда (1) с абелевыми факторами и обозначается через $d(G)$.

Группа G называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо π-группами, либо π'-группами. Наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов (1) группы G называется π-длиной π-разрешимой группы и обозначается через $l_\pi(G)$.

Каждая π-разрешимая группа обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наимень-