

УДК 539.3

Босаков С.В., Дмитриева К. В.

## КОНСТРУКТИВНО НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЁТ ГОРИЗОНТАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим шпунтовую стенку в грунте, которая находится в условиях плоской деформации (рис. 1). На стенку действует горизонтальная сосредоточенная сила, вызывающая её поворот. Грунтовой массив будем считать линейно упругой средой с постоянными  $E_0, \nu_0$ .

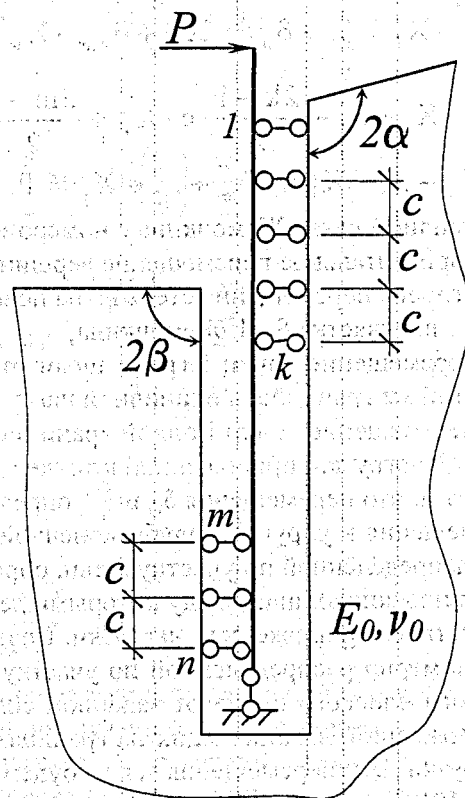
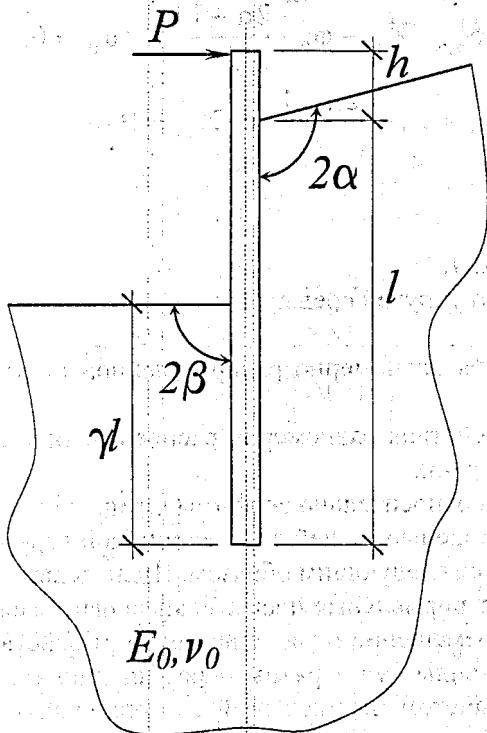


Рисунок 1 – Горизонтально нагруженная стенка в упругой среде

Рисунок 2 – Расчётная схема стенки в упругой среде

При повороте стенки вследствие невозможности возникновения растягивающих напряжений на контакте стенки и грунта, будут возникать разрывы сплошности грунтовой среды, а края щели, возникающей при этом в упругой среде, не будут смыкаться. Расчет стенки будем вести способом Б.Н. Жемочкина [1]. С этой целью разобьём область контакта между стенкой и упругой средой на участки длиной  $c$  и заменим контактом в отдельных точках, введя связи Б.Н. Жемочкина в серединах участков. Следовательно, расчетная схема рассматриваемой задачи будет иметь вид, изображённый на рис. 2.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Система канонических уравнений способа Б. Н. Жемочкина [1] для расчёта стенки со свободной вершиной (см. рис. 2) имеет вид:

$$\begin{cases}
 \delta_{1,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{1,k} \cdot X_k + \delta_{1,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{1,n} \cdot X_n + \varphi_0 \cdot \frac{c}{2} + u_0 = 0, \\
 \dots \\
 \delta_{k,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{k,k} \cdot X_k + \delta_{k,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{k,n} \cdot X_n + \varphi_0 \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot c + u_0 = 0, \\
 \delta_{m,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{m,k} \cdot X_k + \delta_{m,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{m,n} \cdot X_n - \varphi_0 \cdot \frac{2m-1}{2} \cdot c - u_0 = 0, \\
 \dots \\
 \delta_{n,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{n,k} \cdot X_k + \delta_{n,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{n,n} \cdot X_n - \varphi_0 \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot c - u_0 = 0, \\
 -\frac{c}{2} \cdot X_1 - \dots - \frac{2k-1}{2} \cdot c \cdot X_k + \frac{2m-1}{2} \cdot c \cdot X_m + \dots + \frac{2n-1}{2} \cdot c \cdot X_n = P \cdot a, \\
 -X_1 - \dots - X_k + X_m + \dots + X_n = P.
 \end{cases} \quad (1)$$

где  $X_i$  — усилие в связи Жемочкина с номером  $i$ ;

$u_0$  — горизонтальное перемещение вершины стержня;

$\varphi_0$  — угловое перемещение стержня на поверхности упругой среды;

$c$  — длина участка Б. Н. Жемочкина;

$\delta_{ij}$  — перемещение точки  $i$  грани щели от действия равномерно распределенной по участку  $j$  этой же грани щели единичной нагрузки;

$\delta'_{ij}$  — перемещение точки  $i$  одной грани щели от действия равномерно распределенной единичной нагрузки, приложенной к точке  $j$  другой грани.

Отметим, что перемещения  $\delta_{ij}$  и  $\delta'_{ij}$  определяются относительно вершины щели.

Перемещения в упругой полубесконечной среде с щелью от действия единичной горизонтальной силы, распределенной по участку щели, определяются следующим образом. Щель делит упругую среду на два плоских клина, между которыми действуют нормальные и касательные напряжения, вызванные действием приложенной нагрузки. Поэтому перемещение  $i$ -той точки щели от действия единичной равномерно распределенной по участку  $j$  щели силы будут равны перемещению этой точки щели упругого плоского клина от заданной силы за вычетом перемещений от нормальных и касательных напряжений, возникающих на границах между упругими клиньями вследствие действия заданной нагрузки. Эти перемещения также будем определять способом Б.Н. Жемочкина [1].

Ранее [2] были получены уточненные формулы Грина для определения перемещения грани упругого плоского клина со свободными гранями от действия вертикальной и горизонтальной сосредоточенных сил. Интегрированием этих решений по области приложения нагрузки можно получить перемещения от действия вертикальной и горизонтальной равномерно распределенных нагрузок, соответственно.

Например, окружное перемещение точки  $r$  грани  $\Theta = \alpha$  плоского клина от нормальной распределенной на участке  $[a, d]$  нагрузки  $p=P/c$  будет определяться в зависимости от расположения точки  $r$  по следующим формулам

$$V_{\Theta=\alpha} = \frac{2p(1-\nu_0^2)d}{\pi E_0} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{\pi}{2}A(\alpha)k} - \frac{a}{d}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2}A(\alpha)k}}{k\left(1-\frac{\pi}{2}A(\alpha)k\right)} + \frac{2\pi}{8\alpha} a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)} - \frac{a}{d}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)}}{1-\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)} + \dots \right)$$

2)  $a < r < d$

$$V_{\Theta=\alpha} = \frac{2p(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left( -\left(\frac{\pi}{2} A(\alpha) a \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{\pi}{2} A(\alpha)(a-r)\right) + r \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)k+1}}{k \left(1 + \frac{\pi}{2} A(\alpha)k\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)k-1} - 1}{k \left(1 - \frac{\pi}{2} A(\alpha)k\right)} \right] + \frac{2\pi}{8\alpha} a_1 r \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)+1}}{1 + \frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)-1} - 1}{1 - \frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)} \right] + \dots \right) \quad (2)$$

3)  $r > d$

$$V_{\Theta=\alpha} = \frac{2p(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left( -\left(\frac{\pi}{2} A(\alpha) a \ln\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{\pi}{2} A(\alpha) d \ln\left(\frac{r}{d}\right) - \frac{\pi}{2} A(\alpha)(a-d)\right) + d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)k} - \frac{a}{d} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)k}}{k \left(1 + \frac{\pi}{2} A(\alpha)k\right)} + \frac{2\pi}{8\alpha} a_1 d \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)} - \frac{a}{d} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)}}{1 + \frac{\pi}{8\alpha}(1+2k)} + \dots \right)$$

где

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha},$$

$$a_1 = \frac{32\alpha^3}{3(4\alpha^2 - \sin^2 4\alpha^2)} \cdot \frac{4(4\alpha^2 - \sin^2 4\alpha^2)}{3(4\alpha + \sin 4\alpha)} \cdot \frac{16\alpha^4(4\alpha + \sin 4\alpha)}{3(4\alpha^2 - \sin^2 4\alpha^2)^2}.$$

В формулах (2) опущены слагаемые, не влияющие на точность дальнейших расчётов.

Для определения нормальных и касательных напряжений, возникающих между плоскими клиньями от действия равномерно распределенной нагрузки, нормальной к границе щели, заменяем сплошной контакт между плоскими клиновидными основаниями контактом в отдельных точках, введя связи Б. Н. Жемочкина. Расчетная схема для такой задачи изображена на рис. 3.

Затем составляются канонические уравнения метода сил, где основными неизвестными являются усилия в разрезанных связях Жемочкина, соединяющих два плоских клина, а свободными членами  $\Delta_{i,p}$  — перемещения концов разрезанной связи Б.Н. Жемочкина с номером  $i$  от действия внешней нагрузки, приложенной к области щели в основной системе. Система канонических уравнений метода сил для определения усилий в связях Б.Н. Жемочкина для расчётной схемы, изображённой на рис. 3, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \delta_{1,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{1,m-1} \cdot X_{m-1} + \delta_{1,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{1,2m} \cdot X_{2m} + \Delta_{1,p} = 0, \\ \dots \\ \delta_{m-1,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{m-1,m-1} \cdot X_{m-1} + \delta_{m-1,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{m-1,2m} \cdot X_{2m} + \Delta_{m-1,p} = 0, \\ \delta_{m,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{m,m-1} \cdot X_{m-1} + \delta_{m,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{m,2m} \cdot X_{2m} - \Delta_{m,p} = 0, \\ \dots \\ \delta_{2m,1} \cdot X_1 + \dots + \delta_{2m,m-1} \cdot X_{m-1} + \delta_{2m,m} \cdot X_m + \dots + \delta_{n,2m} \cdot X_{2m} - \Delta_{2m,p} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $X_i$  — усилия в связях Жемочкина с номером  $i$ ;

$\delta_{ij}$  — взаимное перемещение точки  $i$  границ упругих плоских клиньев от действия единичной равномерно распределенной нагрузки, приложенной к участку  $j$  двух граней клина;

$\Delta_{i,p}$  — перемещение точки  $i$  границы упругого плоского клина от действия единичной равномерно распределенной внешней нагрузки, приложенной к области щели в основной системе;  
 $m$  — количество участков Б.Н. Жемочкина на контакте между плоскими клиньями.

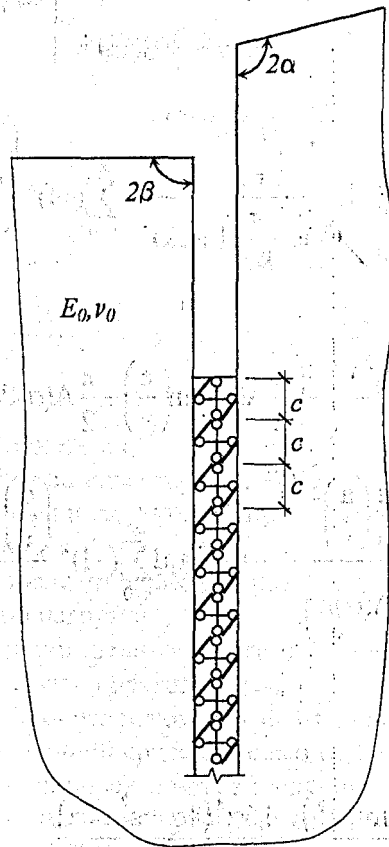


Рисунок 3 — Расчётная схема щели в упругом основании

Таким образом были определены напряжения на контакте между клиньями, а затем коэффициенты при неизвестных системы (1).

Решение системы (1) находится итерационным путём. Задаётся начальное положение точек раздела граничных условий  $k$  и  $m$ , или точек нулевых напряжений (рис. 2), т.е. номера участков, на которых усилия в связях Б.Н. Жемочкина получаются равными нулю. Затем составляется матрица коэффициентов при неизвестных для решения системы канонических уравнений: Далее решается система канонических уравнений и анализируется полученное решение. Если усилия во всех связях Б.Н. Жемочкина получаются отрицательными и не происходит перекрытия граней щели, то данное решение является искомым. В противном случае задаётся новое положение точек раздела  $k$  и  $m$ , и расчёт повторяется.

### РЕЗУЛЬТАТЫ

Для расчета стенки по длине была разбита на 20 участков Б.Н. Жемочкина, а сплошной контакт между двумя плоскими клиньями, начиная от вершины щели, был заменен контактом в отдельных точках для 50 участков той же длины. На рис. 4. показано изменение контактных напряжений по длине стенки для нескольких последовательных итераций и величины перемещений вершины стенки, а также значение максимального изгибающего момента в ней.

На рис. 5. приведены эпюры поперечных сил и изгибающих моментов при  $\alpha = \beta = \pi/4$ ,  $\gamma = 0.5$ ,

$h=0$

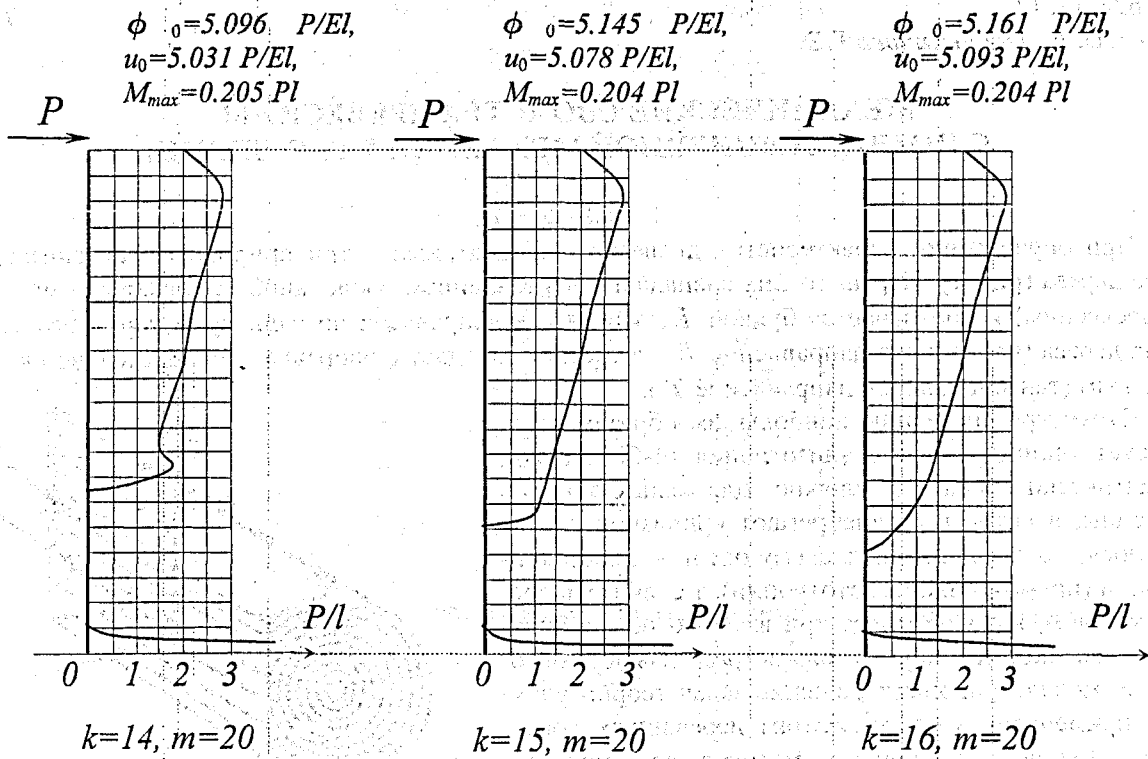


Рисунок 4 – Изменение контактных напряжений по длине стенки на разных итерациях.

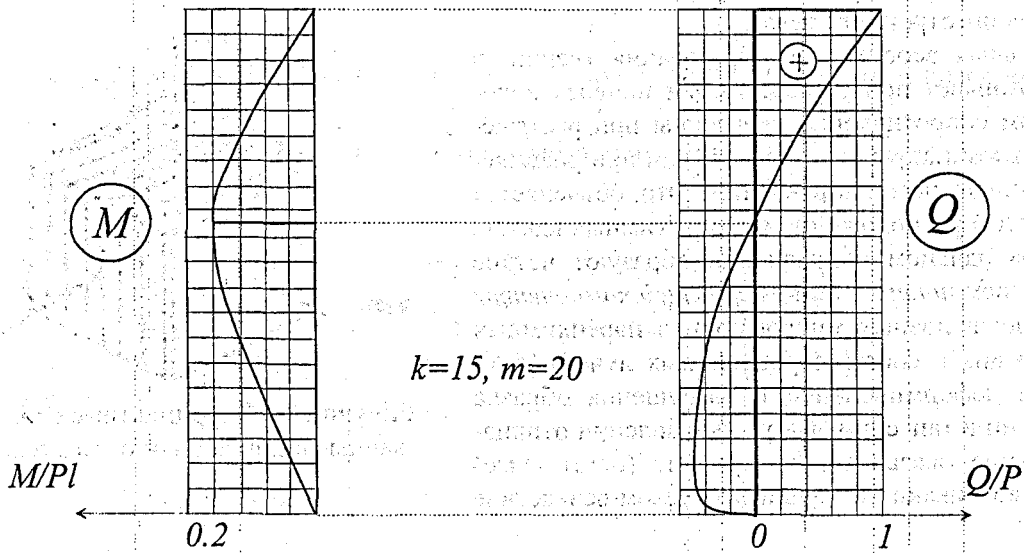


Рисунок 5 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Жемочкин Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. — М.: Госстройиздат, 1962. — 240 с.
2. Босаков С.В., Дмитриева К. В. Функции Грина для клиновидных моделей упругого основания. — г. Гомель, 17-19 сентября — 2003 (в печати).