

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«Брестский государственный технический университет»

**«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ И
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ»**

Материалы III республиканской научной конференции

молодых ученых и студентов

26-28 ноября 2003 года

Брест 2003

УДК 517+519+004

ББК 22.11/19+32.97

Редакционная коллегия:

В.В. Тур, проректор по научной работе УО «БГТУ», д.т.н., профессор

Р.Х. Садыхов, УО «БГУИР», д.т.н., профессор

В.В. Старовойтов, ОИПИ НАНБ, д.т.н.

В.В. Голенков, ОИПИ НАНБ, д.т.н.

В.А. Головки, УО «БГТУ», д.т.н., профессор

Н.В. Лазакович, УО «БГУ», д.ф.-м.н., профессор

С.А. Мазаник, УО «БГУ», д.ф.-м.н., профессор

Б.А. Железко, УО «БГЭУ», к.т.н., профессор

А.А. Дудкин, ОИПИ НАНБ, к.т.н., с.н.с.

С.С. Дереченник, УО «БГТУ», к.т.н., доцент

В.М. Ракецкий, УО «БГТУ», к.ф.-м.н., доцент

В.С. Рубанов, УО «БГТУ», к.ф.-м.н., доцент

Современные проблемы математики и вычислительной техники:
материалы III республиканской научной конференции молодых ученых и
студентов, 26-28 ноября 2003 г. – Брест: УО «БГТУ». – 2003. – 294 с.

Представлены материалы по современным проблемам математики,
информатики, вычислительной техники и их приложениям.

ISBN 985-6584-65-5

УДК 517+519+004

ББК 22.11/19+32.97

Учреждение образования
© «Брестский государственный технический университет» 2003

РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

ОБУЧЕНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Грязев Е.В., БГТУ, Брест

Рассмотрим многослойную гетерогенную нейронную сеть [1], состоящую из N нейронных блоков (рис.1), каждый из которых имеет структуру, представленную на рис. 2.

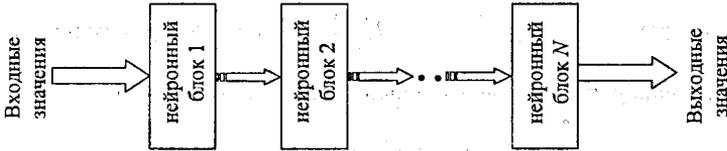


Рис.1. Блочное представление многослойной нейронной сети

Входными значениями для каждого нейронного блока являются выходы предыдущего; для первого – последовательность входных образов $\bar{x}^k = (x_1^k, \dots, x_{m_0}^k)$, ($k = \overline{1, L}$). Выходное значение i_n -го нейрона n -ого блока сети для k -ого образа определяется рекуррентным соотношением:

$$y_{i_n}^{(n),k} = F_n(S_{i_n}^{(n),k}),$$

где

$$S_{i_n}^{(n),k} = \sum_{i_{n-1}=1}^{m_{n-1}} w_{i_{n-1}i_n}^{(n)} y_{i_{n-1}}^{(n-1),k} - T_{i_n}^{(n)}, \quad i_n = \overline{1, m_n}, \quad k = \overline{1, L}$$

При этом формируется вектор $Y^{(n),k} = (y_1^{(n),k} \quad y_2^{(n),k} \quad \dots \quad y_{m_n}^{(n),k} \quad -1)^T$.

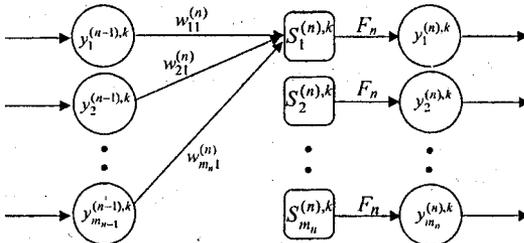


Рис.2. Архитектура n -ого блока многослойной нейронной сети

Задача обучения данной многослойной гетерогенной нейронной сети состоит в нахождении матриц весовых коэффициентов

$$W^{(n)} = \begin{pmatrix} W_{11}^{(n)} & W_{21}^{(n)} & \dots & W_{m_{n-1}1}^{(n)} \\ W_{12}^{(n)} & W_{22}^{(n)} & \dots & W_{m_{n-1}2}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{1m_n}^{(n)} & W_{2m_n}^{(n)} & \dots & W_{m_{n-1}m_n}^{(n)} \end{pmatrix}_{m_n \times m_{n-1}}$$

и столбцов порогов $\overline{T^{(n)}} = (T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \dots, T_{m_n}^{(n)})^T$, $n = \overline{1, N}$, которые минимизируют некоторую ошибку сети E_S , как отклонение выходных значений сети $y_{i_N}^{(N),k}$ от эталонных $t_{i_N}^k$ — i_N -ого нейрона сети для k -ого образа. В качестве ошибки рассматривается усредненное по количеству образов «квадратичное отклонение»

$$E_S = \frac{1}{2L} \sum_{k=1}^L \sum_{i_N=1}^{m_N} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k)^2.$$

Теорема 1. Модификация синаптических связей и порогов многослойной гетерогенной нейронной сети (рис.2) производится в соответствии с формулами:

$$w_{j_n - j_n}^{(n)}(t+1) = w_{j_n - j_n}^{(n)}(t) - \alpha^{(n)} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=1}^L C^{(n)} \cdot M_{j_n j_{n-1}}^{(n)} \cdot Y^{(n-1),k},$$

$$T_{j_n}^{(n)}(t+1) = T_{j_n}^{(n)}(t) - \alpha^{(n)} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=1}^L C^{(n)} \cdot M_{j_n(m_{n-1}+1)}^{(n)} \cdot Y^{(n-1),k},$$

где $C^{(n)}$ вычисляется рекуррентно:

$$C^{(n)} = C^{(n+1)} \cdot W^{(n+1)} \cdot MF_n, \quad C^{(N)} = \varepsilon^k \cdot MF_N,$$

$$\varepsilon^k = \left((y_1^{(2),k} - t_1^k) \quad (y_2^{(2),k} - t_2^k) \quad \dots \quad (y_{m_2}^{(2),k} - t_{m_2}^k) \right),$$

$$MF_n = \begin{pmatrix} F_n'(S_1^{(n),k}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_n'(S_2^{(n),k}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_n'(S_{m_n}^{(n),k}) \end{pmatrix} \text{ — матрица размерности } m_n \times m_n,$$

а матрица $M_{j_n j_{n-1}}^{(n)}$ размерности $m_n \times (m_{n-1} + 1)$ состоит из числа 1 на позиции $j_n j_{n-1}$ и нулей в качестве остальных элементов матрицы.

Изменение синаптических связей и порогов сети производится начиная с последнего N -ого до первого блока сети.

Доказательство: Вычислим градиент ошибки для k -ого образа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s^{(k)}}{\partial w_{j_n-1 j_n}^{(n)}} &= \frac{\partial \left(\sum_{i_N=1}^{m_N} \frac{1}{2} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k)^2 \right)}{\partial w_{j_n-1 j_n}^{(n)}} = \sum_{i_N=1}^{m_N} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k) \cdot \frac{\partial y_{i_N}^{(N),k}}{\partial w_{j_n-1 j_n}^{(n)}} = \\ &= \sum_{i_N=1}^{m_N} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k) \cdot F_N' (S_{i_N}^{(N),k}) \cdot \frac{\partial S_{i_N}^{(N),k}}{\partial w_{j_n-1 j_n}^{(n)}} = \\ &= \sum_{i_N=1}^{m_N} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k) \cdot F_N' (S_{i_N}^{(N),k}) \cdot \sum_{i_{N-1}=1}^{m_{N-1}} w_{i_N-1 i_N}^{(N)} \cdot \frac{\partial y_{i_{N-1}}^{(N-1),k}}{\partial w_{j_n-1 j_n}^{(n)}} = \\ &= \sum_{i_N=1}^{m_N} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k) \cdot F_N' (S_{i_N}^{(N),k}) \cdot \sum_{i_{N-1}=1}^{m_{N-1}} w_{i_N-1 i_N}^{(N)} \cdot F_{N-1}' (S_{i_{N-1}}^{(N-1),k}) \cdot \frac{\partial S_{i_{N-1}}^{(N-1),k}}{\partial w_{j_n-1 j_n}^{(n)}} = \\ &= \dots = \\ &= \sum_{i_N=1}^{m_N} (y_{i_N}^{(N),k} - t_{i_N}^k) \cdot F_N' (S_{i_N}^{(N),k}) \cdot \sum_{i_{N-1}=1}^{m_{N-1}} w_{i_N-1 i_N}^{(N)} \cdot F_{N-1}' (S_{i_{N-1}}^{(N-1),k}) \cdot \dots \cdot \\ &\dots \cdot \sum_{i_n=1}^{m_n} w_{i_n-1 i_n}^{(n+1)} \cdot F_n' (S_{i_n}^{(n),k}) \cdot y_{j_{n-1}}^{(n-1),k} \cdot \delta_{j_n}^{i_n} = \\ &= \varepsilon^k \cdot MF_N \cdot W^{(N)} \cdot MF_{N-1} \cdot \dots \cdot W^{(n+1)} \cdot MF_n \cdot M_{j_n j_{n-1}}^{(n)} \cdot Y^{(n-1),k} = \\ &= C^{(n)} \cdot M_{j_n j_{n-1}}^{(n)} \cdot Y^{(n-1),k}, \end{aligned}$$

где

$$C^{(n)} = C^{(n+1)} \cdot W^{(n+1)} \cdot MF_n, \quad C^{(N)} = \varepsilon^k \cdot MF_N.$$

Т.к. $\frac{\partial E_s}{\partial z} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L E_s^{(k)} \right)}{\partial z} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \frac{\partial E_s^{(k)}}{\partial z}$, то формулы настройки синапти-

ческих связей $w_{j_n-1/j_n}^{(n)}(t+1) = w_{j_n-1/j_n}^{(n)}(t) - \alpha^{(n)} \frac{\partial E_s}{\partial w_{j_n-1/j_n}^{(n)}}$, $j_{n-1} = \overline{1, m_{n-1}}$, $j_n = \overline{1, m_n}$, при-

нимают вид:

$$w_{j_n-1/j_n}^{(n)}(t+1) = w_{j_n-1/j_n}^{(n)}(t) - \alpha^{(n)} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=1}^L C^{(n)} \cdot M_{j_n j_{n-1}}^{(n)} \cdot y^{(n-1),k}$$

Аналогичным образом получаются формулы для настройки порогов нейронной сети.

Теорема доказана.

Данная теорема позволяет привести к алгоритму изменение весов и порогов сети в процессе обучения градиентным методом сведением их модификации к матричным операциям. Предложенный алгоритм обучения был реализован в среде MatLab 6.1.

Литература. 1. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / Пер. с польского Н.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Кокош Н.В., БГУ, г. Минск

1. Введение

Рассмотрим нейронную сеть, состоящую из n нейронных элементов распределительного слоя и m - выходного слоя (рис. 1).

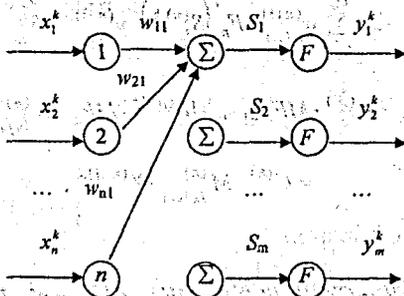


Рис. 1. Схема функционирования нейронной сети

Для данной сети каждый нейрон распределительного слоя имеет синаптические связи w_{ij} , ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) со всеми нейронами обрабатывающего слоя. В качестве нейронов выходного слоя используются элементы с некоторой функцией активации F [1, 2]. На вход сети подаются входные образы – векторы $\overline{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ($k = \overline{1, L}$).

Выходное значение j -ого нейрона сети для k -ого образа определяется выражением:

$$y_j^k = F(S_j^k), \text{ где } S_j^k = \sum_{i=1}^n w_{ij} x_i^k - T_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, L}. \quad (1)$$

Задача обучения нейронной сети с фиксированной функцией активации F состоит в нахождении весовых коэффициентов w_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) и порогов нейронных элементов T_j ($j = \overline{1, m}$), которые минимизируют некоторую ошибку сети E_s , как отклонение выходных значений y_j^k от эталонных значений t_j^k – j -ого нейрона сети для k -ого образа. В качестве ошибки сети можно рассмотреть “квадратичное отклонение” $E_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^m (y_j^k - t_j^k)^2$, которое будем называть квадратичной ошибкой сети.

Столбец $\overline{W} = (w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}, T_1, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}, T_2, \dots, w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{nm}, T_m)^T$ будем называть приближенным решением или просто решением системы (по методу наименьших квадратов): $F\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i^k - T_j\right) = t_j^k$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, L}$, если “квадратичное отклонение” $E_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^m \left(F\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i^k - T_j\right) - t_j^k\right)^2$ достигает своего наименьшего значения. Для нахождения такого решения можно применять различные градиентные методы [1, 2], например, метод сопряженных градиентов и его модификации, которые будут рассмотрены ниже.

2. Выражения для нахождения параметров шага обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов

Выражения для параметров шага обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов:

$$\bar{W}(t+1) = \bar{W}(t) - \alpha(t) \cdot \nabla E_s(t) + \beta(t) \cdot (\bar{W}(t) - \bar{W}(t-1)) \quad (2)$$

после подачи на вход сети нескольких образов $\bar{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ($k = \overline{1, L}$) определяются следующим утверждением.

Утверждение. Величины параметров $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ шага обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов в момент времени t определяется соотношениями [3]:

$$\alpha(t) = \frac{\|\nabla E_s(t)\|^2 \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t))}{(\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t))}, \quad (3)$$

$$\beta(t) = \frac{\|\nabla E_s(t)\|^2 \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t))}{(\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t))}, \quad (4)$$

где функция квадратичной ошибки сети

$$E_s(t) = E_s(w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}, T_1, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}, T_2, \dots, w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{nm}, T_m)$$

— дважды непрерывно дифференцируемая функция нескольких переменных,

$$\bar{W}(t) = (w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}, T_1, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}, T_2, \dots, w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{nm}, T_m)^T$$

$$\Delta \bar{W}(t) = \bar{W}(t) - \bar{W}(t-1),$$

$$\nabla E_s(t) = \left(\frac{\partial E_s}{\partial w_{11}}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{21}}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{n1}}, \frac{\partial E_s}{\partial T_1}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{12}}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{22}}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{n2}}, \frac{\partial E_s}{\partial T_2}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{1m}}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{2m}}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{nm}}, \frac{\partial E_s}{\partial T_m} \right)^T$$

— вектор градиента функции $E_s(t)$, $\nabla^2 E_s(t)$ — матрица Гессе вторых производных функции $E_s(t)$ в момент времени t .

Так как

$$\frac{\partial E_s}{\partial w_{ij}(t)} = \sum_p (y_j^p - t_j^p) \cdot F'(S_j^p) x_i^p, \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}), \quad \frac{\partial E_s}{\partial T_i(t)} = - \sum_p (y_j^p - t_j^p) F'(S_j^p), \quad (j = \overline{1, m}),$$

то, подставляя эти соотношения в (2), получим, что модификация синаптических связей с использованием квазиоптимальных параметров шага обучения определяется выражениями:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - \alpha(t) \sum_{k=1}^L (y_j^k(t) - t_j^k) \cdot F'(S_j^k(t)) x_i^k + \beta(t) (w_{ij}(t) - w_{ij}(t-1)), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

$$T_j(t+1) = T_j(t) + \alpha(t) \sum_{k=1}^L (y_j^k(t) - t_j^k) F'(S_j^k(t)) + \beta(t) (T_j(t) - T_j(t-1)), \quad j = \overline{1, m}. \quad (6)$$

3. Алгоритм обучения нейронной сети

Приведем алгоритм обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов; использующий соотношения (3)-(6):

1. Задается минимальная квадратичная ошибка сети ε_m , которой необходимо достичь в процессе обучения.

2. Записывается число $t=0$ в счетчик числа итераций алгоритма.

3. Случайным образом инициализируются весовые коэффициенты сети $w_{ij}(t)$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$), и пороговые значения нейронных элементов $T_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$).

4. Подаются входные образы $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ($k = \overline{1, L}$) на нейронную сеть и вычисляются векторы $y^k(t) = (y_1^k(t), \dots, y_m^k(t))$ ($k = \overline{1, L}$) выходной активности сети, определяемые соотношениями (1).

5. Если $t \neq 0$, то величины квазиоптимальных параметров $\alpha(t)$, $\beta(t)$ шага обучения с использованием метода сопряженных градиентов вычисляются в соответствии с соотношениями (3)-(4), в противном случае параметр $\alpha(t)$ определяется выражением (1) [2], а $\beta(t)$ полагается равным нулю.

6. Производится изменение весовых коэффициентов $w_{ij}(t+1)$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) и порогов нейронной сети $T_j(t+1)$ ($j = \overline{1, m}$) согласно выражениям (5) и (6), соответственно.

7. Полагается $t=t+1$.

8. Алгоритм завершает свою работу, если суммарная квадратичная ошибка сети $E_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^L (y_j^k(t) - t_j^k)^2$ или норма вектора $\overline{\Delta W}(t) = \overline{W}(t) - \overline{W}(t-1)$ не превосходят заданной величины ε_m , т. е. $E_s(t) \leq \varepsilon_m$ или

$$\|\overline{\Delta W}(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (w_{ij}(t) - w_{ij}(t-1))^2 + \sum_{j=1}^m (T_j(t) - T_j(t-1))^2} < \varepsilon_m,$$

в противном случае выполняется п. 4.

- Литература.** 1. Головкин В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. Кн. 4: Учебное пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2001. – 256 с.: ил. (Нейрокомпьютеры и их применение). 2. Гладкий И.И., Головкин В.А., Махнист Л.П. Обучение нейронных сетей с использованием метода наискорейшего спуска // Вестник Брестского государственного технического университета. Физика, математика, химия. – Брест: БГТУ, 2001. – 5(11):– С. 47-55. 3. Кокош Н.В., Махнист Л.П. О решении одной системы разностно-дифференциальных уравнений и ее применении // Тезисы докладов международной математической конференции “Бругинские чтения – VIII”. – Брест: БрГУ, 2002.– С. 88-89.

NEURAL NETWORK SIMULATION OF DETERMINISTIC AND STOCHASTIC PROCESSES

Nazarov P.V, Popteev A.M., Belarusian State University, Minsk

1. Introduction

The methods of computer simulation have been proved as very powerful tools for the exploration of different complex processes [1]. They gain a considerable attention in recent years, when being used for adequate forecasting of the behaviour of explored systems under different external or internal conditions. Classical approximation methods are generally used for the analysis of well-known analytical expressions, which are far too simple to describe the real physical processes. For the correct interpretation of the experimental data computer simulation must be included in the process of data analysis. One of the forms of such application is a simulation-based fitting (SBF) [1]. The idea of SBF is the approximation of experimental data by synthetic data obtained *via* simulation modeling. In comparison to standard analytical data fitting techniques, SBF has the advantage that it fits natural physical parameters of the system itself and gives a direct insight in how they affect the experimental characteristics of the system.

However, in some cases it is not necessary to operate with a simulation model (or a "white box" model), which gives precise results but is far more computationally expensive than analytical approximation. For example, in SBF only parameters of the model are modified, when its structure holds constant. In such a case, it may be useful to perform a "black box" modeling, which still operates with real physical parameters but can be performed much faster. In the current work, it is proposed to use artificial neural networks (ANNs) [2] as "black box" simulators of physical processes.

Two completely distinct cases are considered below: the neural simulation of deterministic physical processes, and ANN simulation of stochastic ones.

2. Approximation of a deterministic process

The global scheme of ANN utilization is shown in fig. 1. Here ANN is applied exactly in the same way as a simulation model: it transforms input parameters (7) into output values (8). The training procedure is rather obvious: the representative training set (2, 3) is generated by a special algorithm (1) and the network can be trained on it by a standard "back-propagation error" method [2].

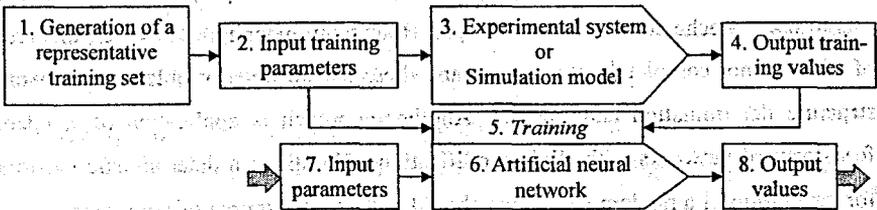


Fig. 1. Standard scheme of ANN approximation of deterministic process.

To generate a representative set of input parameters a kind of grid algorithm can be used. However, in this case the size of a training set should be known well before the training, because grid methods hamper the increase of parameter point (knots) density. Another algorithm was proposed in [3] and presented in fig. 2. The application of the scheme gives a uniform infill of the two-dimensional parameter space. Furthermore, the infill itself remains random and can easily be continued.

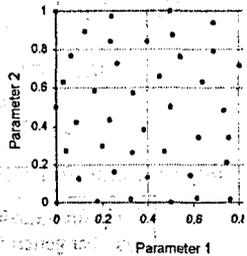
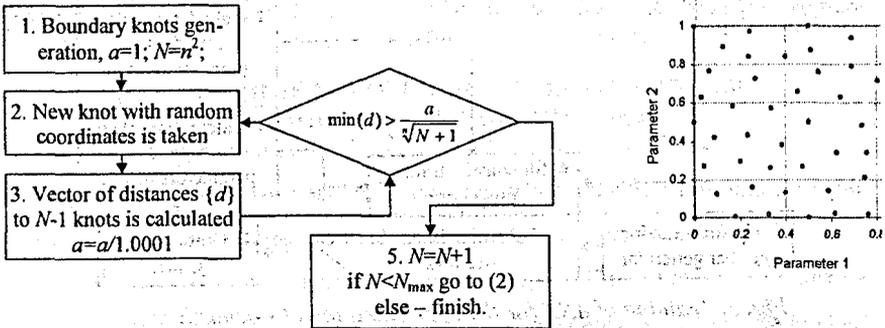


Fig. 2. Proposed algorithm of knot generation (a) and the result for n=2 (b). Where n – dimensionality of the parametric space; N – the number of found knots.

The application of the scheme gives a uniform infill of the two-dimensional parameter space. Furthermore, the infill itself remains random and can easily be continued.

The ANN approximation of a deterministic process was applied to study the resonance energy transfer [4] in complex membrane-protein systems and gave the increase of the SBF speed by the factor of 10^4 [3].

3. Approximation of a stochastic process

To simulate a stochastic processes two approach can be proposed. The first one – is to use a stochastic ANN (for example, Boltzmann machine). However, this area of ANN is not completely studied yet and there are unsolved problems in network structure determination and training. Another approach is application of standard feed-forward networks with slight modifications. To utilize a deterministic network for generation of a random signal one should put into it a source of randomness. Fortunately, it is possible to do without significant structural changes – the random signal can be given into ANN inputs. In fact, such a network operates as an abstract function which transfers the set of uniform random values $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$ to arbitrary distributed $\{y_j\} \subset Y$.

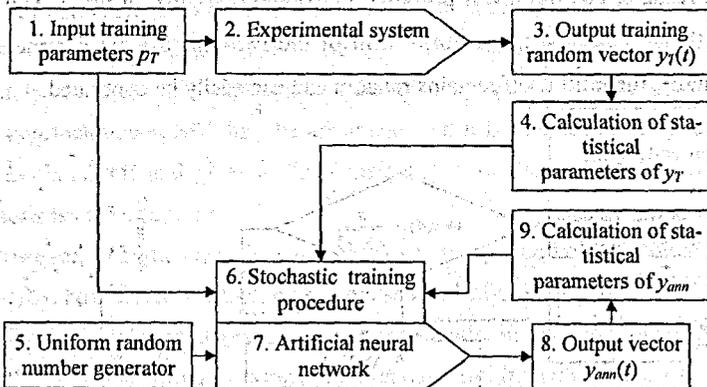


Fig. 3. Training of ANN for the approximation of stochastic signal.

It should be noted, that standard "back-propagation error" methods are not applicable to train ANN in this case. We propose the scheme shown in fig. 3. Each

training pair is presented by a vector of input parameters $p_T(1)$ and a sufficiently long output random signal $y_T(t)$ (3). From $y_T(t)$ several statistical parameters are calculated: mean, standard deviation, estimation of probability density, minimal and maximal values. During training, parameters $p_T(1)$ together with a set of random vectors $x(t) \in R$ (5) are given to ANN which produce a sufficiently long random vector $y_{ann}(t)$. For it the same statistical parameters are calculated (9). The weighted comparison of (4) and (9) gives the error of ANN. The ANN weight coefficients can be modified iteratively using one of standard stochastic training algorithm [2].

To test this methodology the random signal given by eq. 1 was successfully generated by a 3 layer perceptron with 4x4x1 neurons.

where $y(t) = p_1 \cdot n^2(t) + p_2$, (1)
where p_1, p_2 – constant parameters, $n(t)$ – Gaussian stochastic signal with $m=0, \sigma=1$.

Two uniformly distributed random signals were taken as $\{x_i\}$.

The proposed approach is applicable only for δ -correlated stochastic signals. Special transformations (convolution, sum) or ANN with feedback should be used.

References. 1. Yatskou, M.M.; *et al.* Non-isotropic excitation energy transport in organized molecular systems: Monte Carlo simulation-based analysis of time-resolved fluorescence. *J. Phys. Chem. A*, 2001, 105, 9498–9508. 2. Wasserman, P. D. *Neural Computing Theory and Practice*; Van Nostrand Reinhold: New York, 1989. 3. Nazarov, P. V., *et al.* Neural network simulation of energy transfer processes in a membrane protein system. *Advances in Soft Computing: Neural Networks and Soft Computing*, Physica-Verlag, 2003, p. 873-878. 4. Lakowicz, J. R. *Principles of fluorescence spectroscopy*; Kluwer Academic/Plenum Publishers: New York, 1999.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА В МЕДИЦИНСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ

Самодумкин С.А., Проценко Ю.А., БГУИР, г.Минск

Рассмотрим некоторые аспекты представления знаний с помощью теории нечетких множеств на примере диагностики развития заболевания.

В качестве заболевания рассмотрим пример из [3] – хронический пиелонефрит, когда состояние почек не нарушено, в стадии обострения. Основные параметрами, по которым можно судить о развитии данного заболевания, слу-

жат следующие параметры: анемия, болевой синдром и скорость клубочковой фильтрации.

В качестве результата будем сопоставлять развитие заболевания с одной из четырех клинических форм, что позволяет на более качественном уровне выбрать схему лечения хронической почечной недостаточности, производить прогноз развития заболевания.

Известно, что лингвистической называют переменную, если ее значениями являются слова, фразы естественного языка [4]. При этом лингвистическая переменная может быть описана пятеркой вида (X, T, U, G, M) , где X — название переменной; T — терм-множество переменной X , т.е. множество всех названий лингвистических значений переменной X со значениями из универсального множества U с базовой переменной u ; G — синтаксическое правило, порождающее названия X значениям переменной X ; M — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной X смысл $M(X)$. Конкретное название X , порожденное синтаксическим правилом G , называется термом.

Будем считать, что на основе экспертных знаний установлено, что наиболее информативными признаками для диагностики данного заболевания являются параметры: анемия, болевой синдром и анемия. Следующим шагом является определение области изменения каждого параметра. Пусть область изменения параметра анемия определяется интервалом $(0...200)$ г/л, болевой синдром представляет собой качественный параметр на интервале $(0...100)$, скорость клубочковой фильтрации определяется интервалом $(25...55)$. На основании приведенных экспертных данных определим следующие терм-множества:

T (анемия) = <отсутствует, легкая, нарастание, выраженная>;

T (болевой синдром) = <отсутствует, слабовыраж., сохраняющ., стойкий>;

T (скорость клубочк. филт.) = <[40...55],[30...40],[25...35],[25...30]>.

Для каждого термина из терм-множеств, определенных для лингвистических переменных, строится соответствующее нечеткое множество со своим носите-

лем, определяемым на основе изучения экспертных оценок. Результаты данного этапа моделирования представлены в табл. 1. Для каждого из параметров заданы терм-множества, а с помощью идентификатора *preciseNumb* задан носитель нечеткого множества.

Таблица 1. Представление экспертных знаний предметной области

Наименование лингвистической переменной	Термы	Носитель нечеткого множества
Анемия	Отсутствует	120 — 200
	Легкая	90 — 120
	Нарастание	80 — 90
	Выраженная	0 — 80
Болевой синдром	Отсутствует	0 — 20
	Слабовыраженный	20 — 50
	Сохраняющийся	50 — 75
	Стойкий	75 — 100
Скорость клубочковой фильтрации	40 — 55	40 — 55
	30 — 40	30 — 40
	25 — 35	25 — 35
	25 — 30	25 — 30

На следующем этапе строится набор правил, описывающих процесс диагностики. Диагностика заболевания может проводиться в соответствии с обобщенным правилом *modus ponens* [1].

Покажем представление одного из правил

ЕСЛИ Анемия = <легкая> ТО Диагностика = <схема 2>.

Пусть теперь значение «Анемия = сравнительно легкая», что соответствует численному значению функции принадлежности нечеткого множества «легкая» 0,9, тогда полученный результат можно интерпретировать, как рекомендацию проводить лечение в соответствии со схемой 2 с численным значением функции принадлежности нечеткого множества «схема 2» 0,8, что естественным образом можно интерпретировать словом «рекомендовано». Представление данного правила и правила логического вывода на основе импликации Лукасевича в графовой памяти [2] представлено на рис. 1.

Как правило, диагностика заболевания проводится не по одному, а по нескольким признакам. В таком случае, правило ЕСЛИ X есть A, ТО Y есть B будет содержать сложные нечеткие высказывания вида «X₁ есть A₁ и X₂ есть A₂», что естественным образом представляется в виде декартова произведения [1].

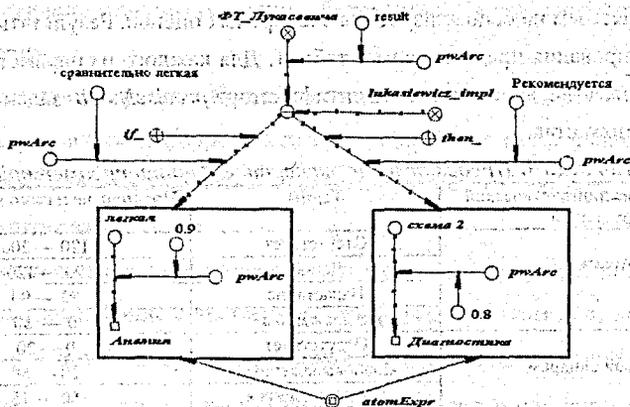


Рис.1. Представление правила и логический вывод с использованием импликации Лукасевича

Исследования проводились при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в соответствии с грантом для молодых ученых Т02М-076 "Исследование принципов интеграции моделей рассуждений и знаний медицинских проблемных областей в системах искусственного интеллекта".

Литература. 1. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей: Приложения к представлению знаний в информатике/Пер. с фр. В.Б.Тарасова; под ред. С.А.Орловского.- М.: Радио и связь, 1990. 2. Представление и обработка знаний в графоинформационных ассоциативных машинах /В.В.Голенков, О.Е.Елисеева, В.П.Ивашенко и др.; Под ред. В.В.Голенкова. – Мн.: БГУИР, 2001. 3. Степанова М.Д., Самодумкин С.А. Прикладные интеллектуальные системы в области медицины: Учебно-методическое пособие. – Мн.: БГУИР, 2000. 4. Справочник по искусственному интеллекту в 3-х т., 1990 // Под ред. Э.В. Попова и Д.А. Поспелова. М.: Радио и связь.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Соломюк К.С., БГТУ, Брест

Введение

Парковка автомобиля в гараж является нетривиальной задачей. Это нелинейная проблема, для которой не существует традиционных методов проектирования систем управления.

Пример системы управления в виде нейронной сети был представлен Nguyen и Widrow в работе [1]; а также Kong и Kosko в работе [2] представили стратегию нечёткого управления для данной проблемы.

Нечёткая логика находит себе применение при аппроксимации функций и управлении нелинейными процессами, которые нельзя представить при помощи простых математических расчётов. Её реализация несколько сходна с процессом мышления человека. Основой нечёткой логики являются нечёткие множества, которые отличаются от обычных множеств тем, что в нечётком множестве принадлежность элемента является не дискретной (0 или 1), а лежит в отрезке $[0,1]$ и может принимать нецелые значения.

Решения в нечеткой логике принимаются на базе правил. Правило – функция или отношение, устанавливающее связь между нечеткими множествами.

В данной задаче совокупность правил задаёт поведение управляемого объекта в зависимости от его координат. Была создана база правил, где по координате и углу расположению автомобиля относительно ворот гаража рассчитывается угол поворота передних колёс автомобиля. В соответствии с приближёнными уравнениями кинематики движения (уравнения (2)) вычислялись входные данные для системы управления.

Нечёткие выводы построены на основе нечёткого контроллера Мамдани-Заде.

Решение задачи было реализовано в виде программы на языке Turbo Pascal.

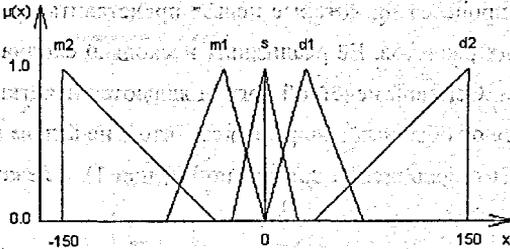
Алгоритм решения задачи.

При вычислении следующего шага (угол поворота передних колёс автомобиля), информация о том, какой должен быть этот угол, выводится из базы правил на основании текущих координат автомобиля. База правил состоит из наборов треугольных функций (нечётких множеств)

Треугольная функция (Т-функция) имеет вид:

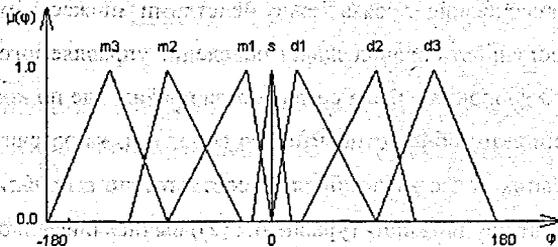
$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases} \quad (1)$$

База правил состоит из трёх наборов треугольных функций:



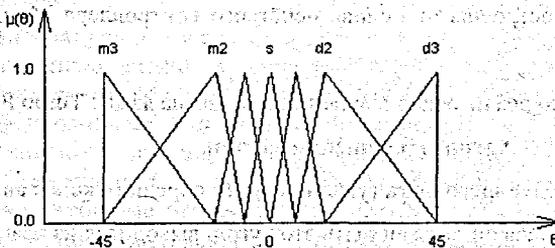
	a	b	c
M2	-150	-150	-45
M1	-90	-30	0
S	-30	0	30
D1	0	30	90
D2	45	150	150

Рис.1. Набор T-функций для X.



	a	b	c
M3	-205	-135	-90
M2	-135	-90	-30
M1	-90	-30	0
S	-15	0	15
D1	0	30	90
D2	30	90	135
D3	90	135	205

Рис.2. Набор T-функций для ϕ .



	a	b	c
M3	-45	-45	-15
M2	-45	-15	-7.5
M1	-15	-7.5	0
S	-7.5	0	7.5
D1	0	7.5	15
D2	7.5	15	45
D3	15	45	45

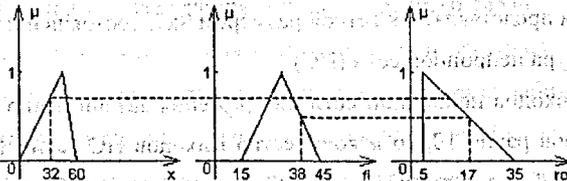
Рис.3. Набор T-функций для θ .

В базе T-функции (Рис.1-3) объединены в группы. Схема их объединения сведена в таблицу:

D3	D1	D3			M3
D2	D1	D3		D1	M3
D1	M3	D1	D2		
S	M3	M3	S	D3	D3
M1			M2	M1	D3
M2	D3	M1		M3	M1
M3	D3	D3		M3	M1
	M2	M1	S	D1	D2

X

На каждом шаге координаты автомобиля сравниваются с наборами Т-функций в базе правил. Если x и φ попадают в тройку Т-функций в базе, то на основе Т-функции $\theta = f(x, \varphi)$ принимается решение о новом угле поворота колёс автомобиля

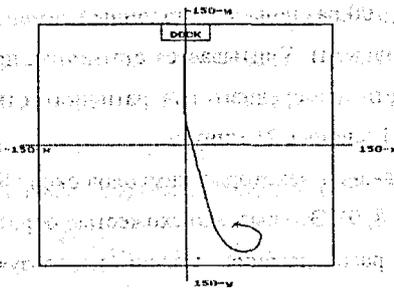


Приведение к четкости для вычисления угла поворота колёс производилась центроидным методом.

На каждом новом шаге вычисляются новые координаты x, y, φ по формулам:

$$\begin{aligned}
 x &:= x + \sin(\theta + \varphi) - \sin \theta \cdot \cos \varphi \\
 y &:= y - \cos(\theta + \varphi) - \sin \theta \cdot \sin \varphi \\
 \varphi &:= \varphi - \arcsin\left(\frac{2 \sin \theta}{20}\right)
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

Цикл вычисления в программе проводится до тех пор, пока автомобиль не попадёт в гараж.



Литература. 1. Nguyen D., Widrow B. The truck backer-upper; An example of self-learning in Neural Network. – IEEE Contr. Syst. Mag., Vol. 10, 1990, PP. 18-23. 2. Kong S.G., Kosko B. Comparison of Fuzzy & Neural Truck Backer-Upper Control systems. – Proc. IJCNN, vol. 3, June 1990 – PP. 349-358.

РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ**РАСПОЗНАВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ПРИ ПОМОЩИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ***Грязев Е. В., БГТУ, Брест*

В работе рассматривается задача классификации чисел от 0 до 9. Изображение числа представляется сеткой размером 9×7 , состоящей из 0 и 1.

Структура нейронной сети (НС).

Число входов нейронной сети для решения задачи равно $9 \times 7 = 63$. Так как число образов равно 10, то и количество выходов НС равно 10. Если на вход подается i -тый образ, то на i -том выходном нейроне требуется 1, а на всех остальных – 0. Перед тем, как подать образ на вход НС, необходимо преобразовать матрицу – изображение (размерность 9 на 7) в вектор размерностью 63.

Задав эталонные образы, можно приступать к обучению НС. Был использован метод наискорейшего спуска с постоянной величиной шага обучения.

После окончания обучения НС можно производить распознавание образов.

В среде MatLab 6.1 были написаны следующие программы:

1. Визуальный редактор графических образов;
2. Программа обучения НС методом наискорейшего спуска;
3. Программа распознавания графического образа с визуальным вводом.

В процессе разработки находится программа для тестирования качества обучения НС. На вход 100 раз подается эталонный символ, искаженный шумом (пятью случайными точками). Учитывается статистика правильных срабатываний сети. Обучение сети для среднего квадратичного отклонения равного 10^{-3} при шаге обучения 0.01 длилось 21 минуту.

Качество распознавания некоторых символов около 95% (0, 1, 3, 4, 7), других менее 50% (2, 5, 6, 8, 9). Это вызвано схожестью образов последней группы. Улучшить качество распознавания можно используя 2-х слойную НС типа $63 - 6 - 10$.

Литература. 1. Роберт Каллан. Основные концепции нейронных сетей.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.

АНАЛИЗ И РАСПОЗНАВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВ РУКОПИСНЫХ АРАБСКИХ ЦИФР

Калохович Д. О., БГТУ, Брест

Современный мир не мыслим без компьютеров: они проникли во все сферы человеческой деятельности. Компьютер может использоваться как обыкновенный калькулятор, центр развлечения и досуга, средство связи, так и в качестве мощного инструмента управления и автоматизации процесса производства, математической и физической лаборатории, средства для обработки данных. А так как около 80 процентов информации человек получает благодаря зрению, то становится ясна важность задачи моделирования человеческого зрения.

Постановка задачи. Пусть дан цифровой образ арабской цифры, представленный в виде матрицы A размерности $n \times m$, в которой каждый элемент соответствует некоторой точке на экране. Значения элементов матрицы A являются либо 0 (для обозначения точек фона), или 1 (для обозначения точек образа арабской цифры). Требуется распознать данный образ, то есть сопоставить ему некоторый элемент из множества арабских цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ [1].

Можно выделить два метода.

Метод 1. Пусть для каждой арабской цифры имеется ее «идеальный» образ, хранимый в матрице B_i , где $i = \overline{1, 10}$, с некоторой размерностью $k \times l$. Выполним масштабирование «идеального» образа арабской цифры с целью приведения его размеров с $k \times l$ точек к $n \times m$ точкам. Полагаем, что «ориентация» анализируемого образа совпадает с обычной (слева - направо, сверху - вниз). Сохраним новый образ цифры в матрице B'_i .

В дальнейшем находим последовательность чисел:

$$a_i = \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m (B'_i[r, q] - A[r, q]), \text{ где } i = \overline{1, 10}. \quad (1)$$

Если известно, что образ повернут на некоторый угол φ по часовой стрелке, то для его распознавания будем поворачивать «идеальные» образы. Возьмем некоторое натуральное число p и образуем угол $\alpha = \left[\frac{2\pi}{p} \right]$. Матрицу, в которой

хранится «идеальный» образ, повернутый на угол ψ , будем обозначать B_i^* . При повороте будем масштабировать «идеальный» образ с целью приведения его размеров к $n \times m$ точкам.

Масштабирование будем производить линейное, то есть если необходимо изменить размер изображения образа с $k \times l$ точек на $n \times m$, то новые координаты будут вычисляться по следующему формуле (начало координат помещаем в нижний левый угол):

$$\begin{cases} x' = \lfloor n/k * x \rfloor, & \{n/k * x\} < 0.5, \\ x' = \lfloor n/k * x \rfloor + 1, & \{n/k * x\} \geq 0.5, \\ y' = \lfloor m/l * y \rfloor, & \{m/l * y\} < 0.5, \\ y' = \lfloor m/l * y \rfloor + 1, & \{m/l * y\} \geq 0.5. \end{cases} \quad (2)$$

где (x, y) - координаты точки в старой системе координат, (x', y') - координаты точки в новой системе координат.

Поворот изображения будем осуществлять также линейно (угол поворота $0 < \alpha < \pi/2$):

$$\begin{cases} x' = \lfloor x * \cos \alpha + y * \sin \alpha \rfloor, & \{x * \cos \alpha + y * \sin \alpha\} < 0.5, \\ x' = \lfloor x * \cos \alpha + y * \sin \alpha \rfloor + 1, & \{x * \cos \alpha + y * \sin \alpha\} \geq 0.5, \\ y' = \lfloor -x * \sin \alpha + y * \cos \alpha \rfloor, & \{-x * \sin \alpha + y * \cos \alpha\} < 0.5, \\ y' = \lfloor -x * \sin \alpha + y * \cos \alpha \rfloor + 1, & \{-x * \sin \alpha + y * \cos \alpha\} \geq 0.5. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем находим последовательность чисел:

$$a_i = \min \left(\sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m (B_i^{(0)}[r, q] - A[r, q]), \dots, \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m (B_i^{(\alpha^* p)}[r, q] - A[r, q]) \right),$$

где $i = \overline{1, 10}$.

Аналогично можно распознавать образы, если они повернуты на некоторый угол φ против часовой стрелки. Если известно, что образ может быть повернут как по часовой, так и против часовой стрелки, следует поворачивать

«идеальный» образ в двух направлениях - «подводным» камнем данного подхода является тот факт, что невозможно «отличить» цифру «6» от «9».

Выбираем такую a_r , чтобы выполнялось неравенство $|a_r| < |a_i|$ для $i = \overline{1, 10}$. Образу, хранимому в матрице A , будет соответствовать число, чей «идеальный» образ хранится в матрице B_r . Если существует два и более r_1, r_2 таких, что $|a_{r_1}| = |a_{r_2}|$, то считаем образ не поддающимся распознаванию данным методом.

Очевидно, что, имея для каждой цифры несколько «идеальных» образов, можно увеличить «качество» распознавания.

Метод 2. Суть метода распознавания заключается в векторизации образа (замене его частей графическими примитивами: отрезками, дугами, окружностями), и в дальнейшем анализе составных частей образа. Можно выделить следующие этапы распознавания:

- 1) «утонышение» образа;
- 2) нахождение «конечных» точек;
- 3) нахождение «узловых» точек;
- 4) векторизация образа;
- 5) распознавание образа.

Для «утонышения» образа с целью выделения его средних линий осуществим итеративное удаление его внешних контуров методом «жука»[2].

Будем считать, что точка «конечная», если она смежная только с одной другой точкой образа.

Возьмем некоторую точку образа. Заклучим эту точку в центр квадрата со стороной a (точка будет лежать на пересечении диагоналей квадрата). Данная точка будет являться «узловой», если на «внутренней» стороне квадрата найдутся такие две точки, что острый угол между двумя прямыми, образованными данной точкой и двумя другими точками, лежит в интервале значений $(0; \pi/2)$.

После выделения «конечных» и «узловых» точек выполняем векторизацию образа методом Хафа [3]. Для этого обрабатываем участки образа между «ближайшими» выделенными точками. Можно составить следующую таблицу:

Таблица. Признаки образов (через запятую указаны возможные значения).

Цифра	Количество конечных точек	Количество узловых точек	Количество дуг	Количество окружностей	Количество отрезков
1	2, 3	1, 2	0	0	1, 2, 3
2	2	1	1	0	1
3	2	1, 2	2	0	2
4	1, 3	2, 3	0	0	3
5	2	2	1	0	2
6	1	1	1	1	0, 1
7	2, 4	1, 2	0	0	2, 3
8	0	1	0	2	0
9	1	1	1	1	0, 1
0	0	0	0	1	0

Для более качественного распознавания образа можно также в качестве его признаков использовать некоторые геометрические свойства составляющих данный образ примитивов, их взаимное расположение.

После выполнения всех этапов образу можно сопоставить некоторую арабскую цифру.

Литература. 1. <http://www/recognition.mccme.ru/pub/RecognitionLab.html>.

2. Абламейко С.В., Лагуновский Д.М. Обработка изображений: технология, методы, применение – Мн.: Амалфея, 2000 – 303 с. **3.** <http://cgm.graphicon.ru:8080/issue1/hough/index.html>.

РАСПОЗНАВАНИЕ РЕГИСТРАЦИОННЫХ НОМЕРНЫХ ЗНАКОВ АВТОМОБИЛЕЙ

Кириш А.Н., БГТУ, Брест

Введение

Распознавание образов (а часто говорят - объектов, сигналов, ситуаций, явлений или процессов) - самая распространенная задача, которую человеку приходится решать практически каждую секунду от первого до последнего дня своего существования.

Распознавание речи и текста значительно упрощает взаимодействие человека с компьютером. Растущий геометрической прогрессией поток транспорта требует постоянного контроля, что даже нескольким людям на оживленных участках не под силу. Здесь на помощь могут придти компьютеры.

1. Технология распознавания

Технология распознавания автомобильных номеров предназначена для быстрой и точной идентификации номерного знака движущихся или стоящих автомобилей.

Процесс распознавания автомобильных номеров состоит из этапов:

1. Исходное изображение (рис. 1) приводится к виду, который не зависит от таких условий регистрации изображения, как степень освещённости, неравномерное распределение яркости от источников света, расфокусировка, зашумлённость, цветовая неравномерность символов (неравномерная окраска, грязь, пыль, блики), наличие рисунков или иной графики на подложке номера.



Рис. 1. Исходное изображение.

2. На полученном изображении выделяются области, которые могут содержать номер, в этих областях проводится подробный анализ на основе формального представления масштабных характеристик номерного знака. В результате определяется и выделяется область, содержащая номерной знак (рис.2).



Рис. 2. Область изображения с номерным знаком.

3. Приведение к стандартному размеру графического изображения номера, выделение символов (рис 3.).



Рис. 3. Секционирование номерного знака.

4. Очистка изображения с помощью фильтрации и приведение его к стандартному размеру (рис.4). В качестве фильтров используются пороговый и медианный, с адаптированными параметрами. В результате получаются изображения, очищенные от помех и готовые к распознаванию. На практике выяснилось, что применение фильтров очистки изображения может очень значительно увеличить правильность распознавания.



Рис.4. Последовательность очистки изображения.

5. Алгоритм распознавания анализирует символы по ключевым характеристикам независимым от масштаба, используемого шрифта, геометрических искажений оптикой, налипании грязи и разрывов.

2. Нейросетевое распознавание

Нейросетевые методы обеспечивают быстрое и надёжное распознавание изображений. Для распознавания образов используется нейронная сеть векторного квантования (рис.5), которая осуществляет топологическое упорядочивание входного пространства паттернов. Она представляет собой двухслойную сеть с прямым распространением сигналов. В процессе поступления эталонных векторов на сеть она обучается так, что образуются кластеры различных эталонов, каждому из которых соответствует свой нейрон.

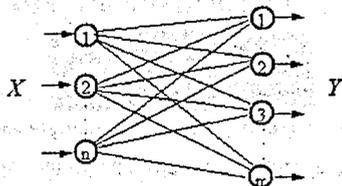


Рис.5. Нейронная сеть векторного квантования.

Для обучения векторного квантователя используется конкурентный метод. В соответствии с ним определяется нейрон победитель с номером k , который соответствует минимальному евклидовому расстоянию между входным и весовым вектором:

$$D_k = \min_j |X - W_j|, \quad (2.1)$$

где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - входной образ, $W_j = \{w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj}\}$ - вектор столбец весовых коэффициентов j -го выходного нейрона, n -размерность входного образа.

Тогда настройка весового вектора k -го нейрона-победителя происходит следующим образом:

$$w_{ik}(t+1) = w_{ik}(t) + \gamma(x_i - w_{ik}(t)), \quad (2.2)$$

где $i=1, n$. А для остальных нейронов весовые коэффициенты не изменяются.

3. Тестирование системы распознавания

Распознавание осуществляется в соответствии с этапами, описанными в первом пункте. Следует уделить особое внимание процессу нейросетевого распознавания. После секционирования номерного знака на отдельные составляющие происходит их распознавание нейронной сетью. Причём используются две сети, одна настроенная для распознавания цифр, другая—для букв. После распознавания результаты объединяются в единый номерной знак. Тестирование проводилось на выборке образов. Отдельно определялось качество распознавания цифр и букв латинского алфавита. На первом этапе оценку качества распознавания букв латинского алфавита. Распознавание 223 графических образов, содержащих 5-18 изображений букв, дало результат 98.52% (рис.6).

Recognition accuracy:

I:	18 entries	96.40 %
F:	16 entries	97.50 %
M:	8 entries	97.75 %
A:	12 entries	96.00 %
P:	16 entries	99.04 %
O:	17 entries	98.18 %
B:	18 entries	97.22 %
C:	15 entries	95.21 %
D:	13 entries	97.23 %
E:	9 entries	95.25 %
G:	7 entries	99.00 %
Z:	7 entries	97.14 %
N:	9 entries	98.56 %
S:	7 entries	97.86 %
Y:	5 entries	99.60 %
T:	8 entries	96.50 %
R:	7 entries	99.43 %
L:	7 entries	97.86 %
U:	8 entries	96.46 %
X:	6 entries	97.18 %
V:	10 entries	98.25 %

Total accuracy: 223 entries 98.52 %

Рис.6. Статистика распознавания букв.

На втором этапе производилось распознавание цифр (от 0 до 9). Пример образов для распознавания представлен на рис.7. Цифры представлены 178 образами, от 11 до 21 образа на каждую цифру. Результат распознавания 97.89% (рис. 8).



Рис. 7. Образы цифр для распознавания

Recognition accuracy:

0:	26	entries	99.77	%
1:	21	entries	98.59	%
2:	11	entries	99.03	%
3:	26	entries	96.93	%
4:	12	entries	98.03	%
5:	24	entries	96.09	%
6:	10	entries	98.23	%
7:	22	entries	96.01	%
8:	11	entries	97.11	%
9:	17	entries	99.32	%

Total accuracy: 178 entries 97.89 %

Рис. 8. Статистика распознавания цифр.

По результатам тестирования можно сделать вывод о корректности алгоритма, что позволяет его рекомендовать к использованию в качестве составной части в автоматизированной системе распознавания автомобильный регистрационных знаков.

Литература. 1. Teuvo Kohonen, Jussi Hynninen. The Learning Vector Quantization Program Package. — http://cochlea.hut.fi/research/lvq_pak/, 1995. 2. В.А. Головки. Нейрокомпьютеры и их применение: книга 4. Нейронные сети: обучение, организация и применение / Под редакцией А.И. Галушкина.- М.: ИПРЖР, 2001. 3. В.С.Ануров. Системы распознавания образов (идентификации).— <http://www.codenet.ru/>, 2001. 4. Д.В.Брилюк. Нейросетевые методы распознавания изображений. — <http://rusnauka.narod.ru/>, 2002.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕЗАВИСИМЫХ КОМПОНЕНТ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ

Кирьянов Д.П., БГТУ, Брест

1. Введение

Компьютерные ЭЭГ-комплексы достаточно широко используются уже более 15 лет, но даже сегодня нельзя сказать, что они позволили решить большинство проблем, возникающих при исследовании электрической активности мозга. Энцефалограф, как физический прибор, регистрирует не только сигналы, исходящие от коры головного мозга, но и электрические сигналы внемозгового происхождения. Эти сигналы, а также искажения основного сигнала называются артефактами. Проявление артефактов в сигнале ЭЭГ часто очень похоже на

некоторые феномены, не являющиеся артефактами, а вызванные функциональными нарушениями мозга. Поэтому обеспечение ввода безартефактной ЭЭГ является основным требованием при подготовке исходного электроэнцефалографического сигнала, сводимого в память ЭВМ для дальнейшего анализа.

В данной работе исследована возможность применения метода независимых компонент для решения задачи разложения исходного ЭЭГ сигнала на составляющие отдельных, независимых источников электрической активности мозга и активности источников артефактов, с возможностью дальнейшего подавления артефактных составляющих.

2. Метод независимых компонент

Задачей метода независимых компонент (Independent Component Analysis - ICA) является разложение наблюдаемых случайных переменных x_i в линейную комбинацию независимых величин s_k , то есть нахождение линейного преобразования W , удовлетворяющего соотношению (2.1).

$$s = Wx \tag{2.1}$$

где s — n -мерный вектор независимых компонент; x — m -мерная случайная величина. Для обработки сигналов используется приложение метода ICA - слепое разделение сигналов (Blind Source Separation - BSS). В BSS наблюдаемые значения вектора x соответствуют реализации m -мерного дискретного сигнала $x(t)$, $t=1,2,\dots$. Независимые компоненты $s_i(t)$ называют сигналами-источниками. Данные источники обычно являются либо оригинальными неискажёнными сигналами, либо зашумленными источниками. Иллюстрация BSS применительно к аудиосигналам приведена на рис. 2.1, в данном случае необходимо получить исходные сигналы источников звука, используя записи с микрофонов.

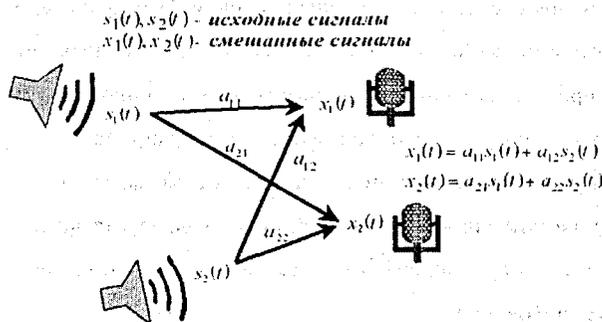


Рис. 2.1. Иллюстрация слепого разделения аудиосигналов.

Основными предположениями, используемыми в ИСА, являются независимость и негауссовость компонент s_i . Алгоритм вычисления независимых компонент опирается на центральную предельную теорему, утверждающую, что при определенных условиях сумма независимо распределенных случайных величин стремится к нормальному распределению по мере увеличения количества слагаемых. Используя это утверждение, поиск независимых компонент, как линейных комбинаций наблюдаемых переменных, ведется так, чтобы получить независимые величины, распределение которых максимально далеко от нормального. Основная форма алгоритма ИСА имеет следующий вид:

1) Случайным образом выбираем начальный вектор w .

2) Вычисляем $w^+ = E\{xg(w^T x)\} - E\{g'(w^T x)\}w$ или в обычной (невекторной) форме: $w_i^+ = E\{x_i g(w_1 x_1 + \dots + w_n x_n)\} - E\{g'(w_1 x_1 + \dots + w_n x_n)\}w_i$, $i = \overline{1, n}$, где $E\{\cdot\}$ – взятие математического ожидания, g – производная некоторой неквадратичной функции, используемой при вычислении негэнтропии (меры негауссовости).

3) Нормируем полученный вектор: $w = w^+ / \|w^+\|$, в обычной форме:

$$w_i = w_i^+ / \|w^+\| = \frac{w_i^+}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i^+)^2}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

4) Если процесс не сходится, возвращаемся к шагу 2.

3. Обработка электроэнцефалограмм

Корректное использование ИСА технологии для разделения ЭЭГ сигналов требует выполнения следующих основных условий: ЭЭГ-данные, регистрируемые поверхностными скальповыми электродами, есть линейная смесь сигналов независимых, пространственно фиксированных, источников, количество которых не превосходит количества используемых отведений; временные задержки, возникающие при распространении сигналов в объеме мозга, малы. То, что источники электрических сигналов, снимаемых со скальпа, статистически независимы, является лишь предположением, так как природа этих сигналов до сих пор точно не установлена.

Эксперименты по выделению независимых составляющих из ЭЭГ проводились в среде MATLAB с использованием программной реализации метода независимых компонент fastICA. В результате проведенных исследований можно сделать вывод, что технология ICA успешно решает задачу разделения ЭЭГ-сигналов, что позволяет выявить артефактные составляющие (см. рис 3.1) с их дальнейшим подавлением, которое осуществляется путём смешивания полученных компонент без учёта артефактной компоненты.

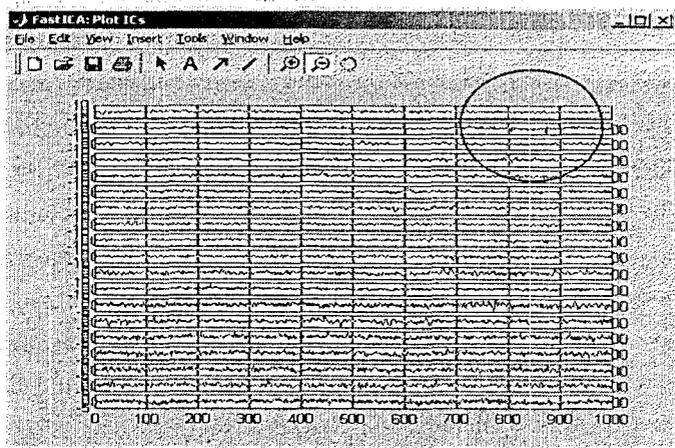


Рис. 3.1. Независимые компоненты ЭЭГ. Артефакт движения глаз (2-я компонента)

Отсюда можно сделать вывод, что ICA технология позволяет решить задачу разложения ЭЭГ сигналов на составляющие электрической активности мозга, активности источников физиологических артефактов, источников электродных артефактов, открывая тем самым широкие возможности дальнейшей работы с ними, связанные с их выделением, подавлением, топографическим картированием и пространственной локализацией.

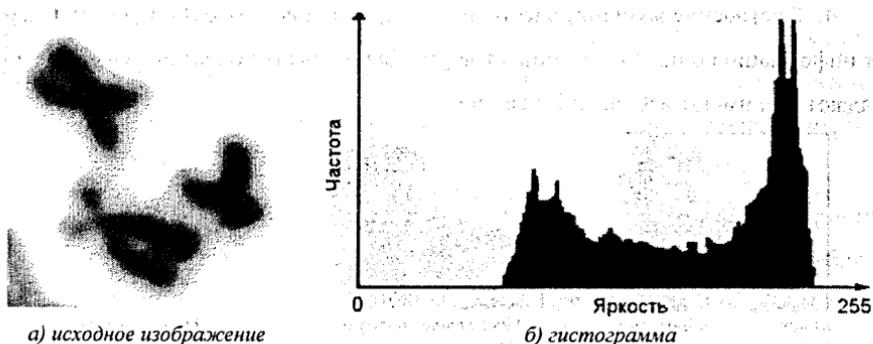
Литература. 1. Hyvarinen A., Oja E. Independent component analysis: algorithms and applications, Neural Networks 13 (2000, 411-430). 2. Karhunen J., Hyvarinen A. Applications of neural blind separation to signal and image processing, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland. 3. Электроэнцефалография в клинической практике / Момот Т.Г. / -http://www.dx-telemedicine.com/rus/publications/eeg_in_practic.htm. - 06.05.2003. 4. Electroencephalogram (EEG) Data / Krishna Nayak / -<http://www.scri.fsu.edu/~nayak/chaos/data.html>. - 06.05.2003.

АВТОМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ХРОМОСОМ

Макарова Е. В., Назаров П. В., БГУ, Минск

Проблема распознавания изображений в наше время остается актуальной и человек предпринимает все более успешные попытки заменить себя компьютером и автоматизировать этот процесс, строя различные системы распознавания. Программные системы анализа позволяют освободить человека-оператора от рутинной работы с изображениями на производстве и в научных лабораториях. Особенно это существенно при исследовании микрообъектов, поскольку, во-первых, фотография зачастую является единственно возможным способом получить информацию об объекте, не разрушая его; во-вторых, такие фотографии могут содержать большое число микрообъектов одновременно, делая чрезвычайно трудоёмким процесс их анализа. Данная работа посвящена анализу и распознаванию изображений хромосом. Хромосомы различаются по внешним размерам, длине. Задача исследователя – определить пары одинаковых хромосом (кариотипирование) и отследить случаи отрывания плеч хромосом (абберации) в определенной паре. Эта информация может быть использована в дальнейших исследованиях, например, при выявлении мутагенной активности пестицидов на хромосомный набор лягушек. В настоящее время определение параметров хромосом производится визуально и является трудоёмким процессом. Для облегчения работы исследователя было предложено использовать компьютерную обработку изображений.

Примеры получаемых изображений представлены на рис. 1 а. При распознавании изображений можно выделить два этапа. Первый заключается в предварительной обработке данных, а второй – в непосредственном анализе и распознавании объектов. В нашем случае предобработка включала в себя применение алгоритмов повышения контрастности изображения, фильтрацию и сглаживания границ объектов [1, 2, 3].



а) исходное изображение

б) гистограмма

Рис. 1. Исходное изображение хромосом с гистограммой яркости

Для разделения исходных данных на объекты и фон проводилась сегментация изображения. На рис. 1б видны два четких пика, один из которых соответствует фону изображения, а другой – объектам. Выбирая подходящий порог (его значение определяется из гистограммы), изображение переводилось в монохромный режим, где 0 – это цвет фона (яркость исходного пикселя ниже выбранного порога), а 1 – цвет объекта (в противоположном случае).



а) исходное изображение

б) перевод в монохромный режим (без фильтра)

в) перевод в монохромный режим (с фильтром)

Рис. 2. Перевод изображения в монохромный режим

Для анализа хромосомы использовались следующие алгоритмы.

1. Выделение контура изображения (его длина) дает первичную информацию о распознаваемой хромосоме (размер) [1, 2].
2. Построение скелета изображения (объект достаточно узкий и выделение скелета дает полезную информацию) и фильтрация шумов. Их появление связано с неровностью выделения краев, т.к. предложенный алгоритм [1] чувствителен к изменениям края.
3. Определение крайних точек и точек пересечения (центра хромосомы) [2] позволяет отследить количество и длину плеч у хромосомы.

4. Построение функции расстояния от центра масс объекта до контура дает информацию о похожести объектов [4]. Для похожих объектов функции совпадают или имеют небольшие различия.



Рис. 3. Анализ изображения

Для идентификации пар хромосом было предложено использовать искусственную нейронную сеть (НС), т.к. она обладает рядом преимуществ: НС является универсальным классификатором; её отличает устойчивость к шумам и простота применения [5].

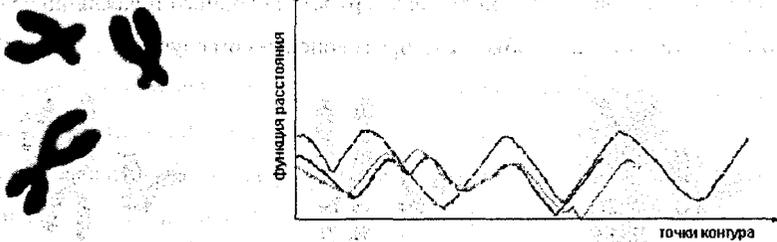


Рис. 4. Вид функций расстояний для трех хромосом

Непосредственно использовать значения построенной функции для распознавания с помощью нейронной сети достаточно сложно, так как от объекта к объекту меняется длина вектора значений функции и, следовательно, требуется различное число входов нейронной сети. Поэтому строилась таблица частот встречаемости каждого уровня. Число уровней определяло число входов НС. В этом случае нет необходимости совмещать точки отсчета функций, что уменьшает погрешность.

Для решения задачи распознавания использовался трехслойный перцептрон с 67 входами и 15 выходов. Внутренние слои содержали по 15 нейронов.

На входы нейронной сети подавались длина контура (1 вход), длина плеч хромосом (4 входа), данные гистограммы (62 входа). Предварительно обученная нейронная сеть относила хромосому к одной из 13 пар или к случаю с пересечением или аберрацией.

Применение предложенного метода позволяет ускорить процесс кариотипирования и облегчить работу исследователя, избавив его от рутинной работы. Предложенные алгоритмы применяются на кафедре генетики и биотехнологии Биологического факультета Белгосуниверситета для анализа влияния пестицидов триазинового ряда на генетический аппарат травяной и остромордой лягушек (*Rana temporaria* и *Rana arvalis*).

Литература. 1. Павлидис Т. Цифровая обработка изображений. М.: "Мир", 1981. 2. Абламейко С. В., Лагуновский Д. М., Обработка изображений. Мн.: "Алмафея", 2000. 3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К., Робототехника. М.: "Мир", 1989. 4. Алькоффаиш М. С., и др., Алгоритм идентификации двухмерных объектов в динамических сценах. PRIR'2002, т. 2, с. 188-200. 5. Bishop M. Neural Networks for Pattern Recognition. Oxford: Clarendon Press, 1997.

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Селезнев П. В., БГТУ, Брест

Введение

Под проблемой распознавания графической информации понимают способность машины, то есть компьютера, "понимать", что представлено ему на рассмотрение. Любая задача распознавания сводится к самостоятельной классификации машиной изображения, без помощи человека.

При построении адаптивных систем распознавания перспективным является использование нейронных сетей (НС), которые обладают такими свойствами как обучаемость и способность аппроксимировать любые вычислимые функции. Это позволяет использовать их для построения математических моделей сложных процессов и объектов даже в тех случаях, когда другими способами это сделать затруднительно.

Такой моделью НС, перспективной для распознавания является многослойная нейронная сеть. Для изучения возможностей многослойной нейронной сети предлагалось применить следующий подход.

Предлагалось использовать многослойную нейронную сеть с прямым распространением сигналов, данные для этого подхода были предварительно обработаны с помощью быстрого преобразования Фурье.

Многослойная нейронная сеть способна осуществлять любое отображение входных векторов в выходные. Для обучения нейронной сети использовался алгоритм обратного распространения ошибки (backpropagation algorithm), который является эффективным средством обучения многослойных нейронных сетей [1].

1. Нейронная сеть для распознавания образов

Архитектура многослойной нейронной сети состоит из множества слоев нейронных элементов (рисунок 1).

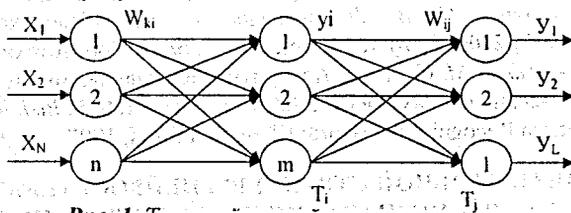


Рис. 1. Трехслойная нейронная сеть.

Входной слой (input layer) нейронных элементов выполняет распределительные функции. Выходной слой (output layer) нейронов служит для обработки информации от предыдущих слоев и выдачи результатов.

Слой нейронных элементов, расположенный между входным и выходным слоем, называется промежуточным или скрытым (hidden layer). Как и выходной слой, скрытый слой является обрабатывающим. Выход каждого нейронного элемента предыдущего слоя нейронной сети соединен синаптическими связями со всеми входами нейронных элементов следующего слоя. Таким образом, топология многослойной нейронной сети является однородной и регулярной.

В качестве функции активации нейронных элементов использовалась сигмоидная функция.

Рассмотрим нейронную сеть, состоящую из трех слоев (рисунок 1).

Обозначим слои нейронных элементов от входа к выходу соответственно через n, m, l . Тогда выходное значение l -го нейрона последнего слоя равняется:

$$y_j = F(S_j),$$

$$S_j = \sum_{i=1}^m W_{ij} * Y_i + T_j,$$

где S_j — взвешенная сумма j -го нейрона выходного слоя; Y_i — выходное значение i -го нейрона предпоследнего слоя; W_{ij} — соответственно весовой коэффициент; T_j — порог j -го нейрона выходного слоя.

Аналогичным образом выходное значение m -го нейрона скрытого слоя определяется, как:

$$Y_i = F(S_i),$$

$$S_m = \sum_{k=1}^n W_{ki} * X_k + T_i,$$

Алгоритм обратного распространения ошибки минимизирует среднеквадратичную ошибку нейронной сети. Для этого с целью настройки синаптических связей используется метод градиентного спуска в пространстве весовых коэффициентов и порогов нейронной сети.

Согласно методу градиентного спуска изменение весовых коэффициентов и порогов нейронной сети происходит по следующему правилу:

$$\omega_{nm}(t+1) = \omega_{nm}(t) - \alpha \frac{\partial E}{\partial \omega_{nm}(t)},$$

$$T_j(t+1) = T_j(t) - \alpha \frac{\partial E}{\partial T_j(t)},$$

где E — среднеквадратичная ошибка нейронной сети для одного образа.

Она определяется, как

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (y_j - b_j)^2,$$

где b_j — эталонное выходное значение j -го нейрона.

Опишем технологию подготовки исходных данных. Данные о фото или видео изображении приняты из некоего внешнего устройства (датчика, цифровой камеры) и преобразованы в файл формата BMP рисунок 2.

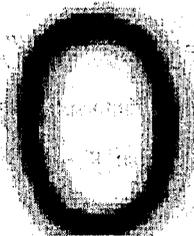


Рис. 2. Исходное изображение

Далее эти данные проходят дополнительную обработку по которой они преобразуются в текстовый файл. Опишем формат этого файла. Данные о каждой цифре записываются в строку через пробел в числовом формате по 58 элементов в строке. Каждая цифра состоит из 44 строк. Каждое число обозначает интенсивность одного пиксела от 0 до 255. Число 0 соответствует абсолютно белому, а 255 абсолютно черному. Этот промежуточный файл преобразуется в один файл, в котором содержатся данные о всех цифрах преобразованных по определенному правилу, в основе которого положено быстрое преобразование Фурье [3]. Смысл его заключается в представлении изображения в виде матрицы, обозначим её X размерности 57×44 :

$$\begin{array}{cccccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{157} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{257} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{441} & X_{442} & X_{443} & \dots & X_{4457} \end{array}$$

Далее матрица трансформируется в вектор V размерностью $K = 44 \times 57$:

$$V = (X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{157}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{157}, X_{441}, X_{442}, X_{443}, \dots, X_{4457}).$$

Для вектора вычисляется быстрое преобразование Фурье:

$$Y = \text{FFT}(V).$$

При этом мы получаем ряд в котором u_0 постоянная составляющая сигнала, а $u_1 \dots u_{12542}$ элементы ряда Фурье в комплексном виде.

Образ для распознавания формируем следующим образом:

- а) из вектора Y извлекаем первые 50 комплексных элементов ряда,
- б) элементы формируются в вектор D из действительных и мнимых чисел:

$$D = (\text{Re}(y_1), \text{Im}(y_1), \text{Re}(y_2), \text{Im}(y_2), \dots, \text{Re}(y_{50}), \text{Im}(y_{50})),$$

- в) элементы вектора нормируются по формуле:

$$D^* = (1/y_0) * D.$$

Получившийся вектор из 100 элементов готов к использованию (рис. 3).

-0.0180093 0.03727 0.0421236 0.0153725 0.0200956 -0.0151795 -0.00208822
 -0.00890089 -0.009860730.00360261
 -0.0104648 0.016358 0.00330166 0.00478061 -0.00380786 -0.00259795 -0.0031879
 -0.00239827

Рис.3. Пример части вектора из 100 элементов

2. Тестирование системы и результаты исследования

После того как, были проведены исследования, выяснилось, что применение к исходному изображению быстрого преобразования Фурье дало отличные результаты. При проведении тестирования выяснилось, что максимальный процент распознавание достигается сетью с количеством нейронных элементов от 36 до 42, все зависит от начальной инициализации сети и скорости её обучения.

Это демонстрирует рисунок 4.

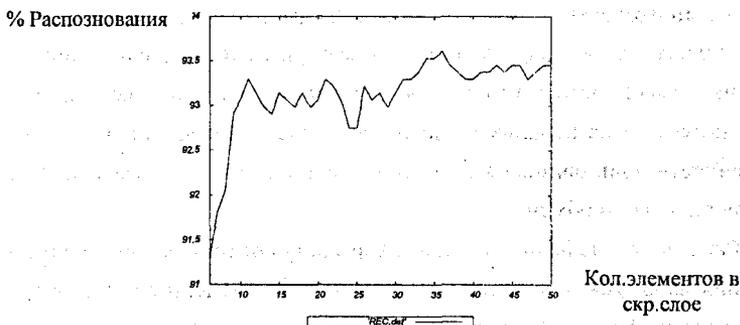


Рис. 4. График процента распознавания входной информации.

С помощью, данной архитектуры возможно распознавать графические изображения, в частном случае это были цифры с точностью 92-94%, что подтверждается практикой.

Литература. 1. В.А. Головкин Нейрокомпьютеры и их применение: книга 4 /; Под редакцией А.И. Галушкина «Нейронные сети: обучение, организация и применение», М.: ИПРЖР 2001. 2. Warren S. Sarle, SAS Institute Inc., Cary, NC, USA Июль 17, 1999. Описание деталей обучения, модифицированных 1 Мая, 2001. Авторское право 1999, 2001 by Warren S. Sarle, Cary, NC, USA. URL: <ftp://ftp.sas.com/pub/neural/dojo/dojo.html>. 3. А.Б.Сергеев «Цифровая обработка сигналов»; СПб.: Питер, 2003.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕРФЕЙСОВ ОБМЕНА ЧЕЛОВЕК-КОМПЬЮТЕР

Семченко Д.Е., ПГУ, г. Новополюцк

Для обмена информацией между компьютером и человеком существуют визуальные, акустические и осязательные каналы передачи. Текстовые данные могут быть введены с помощью клавиатуры, произнесены в микрофон или быть оцифрованы из рукописной формы с помощью камеры, сканера или графического планшета. Для представления текстовой, равно как и графической, информации стандартными являются визуальные средства, однако возможности акустического обмена на сегодняшний день используются не в полной мере. Можно сказать, что практически решена задача передачи данных от компьютера человеку: визуальных через монитор, акустических через динамик. Обратная же задача является гораздо более сложной.

Любая оценка преимуществ и недостатков вышеперечисленных каналов передачи во многом зависит от конкретной предметной области, где они используются. Однако, можно сформировать некоторые универсальные критерии оценки – например, достижимые *надежность* и *скорость* передачи, которые связаны с затратами на используемые технические средства, либо степенью подготовленности пользователя к сеансам обмена и степенью загруженности пользователя процессом обмена.

Распознавание речи – это трансформация представленного речевого высказывания из формы изменяющегося с течением времени сигнала в правильную письменную форму. Можно выделить три основных фактора, оказывающих существенное влияние на используемые технологии распознавания речи – форма представления, объем словарного запаса и степень зависимости от диктора.

Под обработкой произносимой речи понимается манипуляции с цифровым представлением сигнальных форм речевого высказывания, в особенности их

анализ и синтез. В центре интересов стоит, прежде всего, внутреннее содержание сообщения. Проблема анализа состоит в том, чтобы сопоставить представленное речевое высказывание и его адекватное внутримашинное представление. В зависимости от используемого приложения необходимо либо корректно реконструировать текстовое представление произнесенного (автоматическое распознавание речи); либо создать подходящее внутримашинное описание намерений пользователя (автоматическое понимание речи); либо в зависимости от речевого высказывания произвести какие либо действия (командные и диалоговые системы).

Автоматическое распознавание речи является, как и прежде, не полностью решенной проблемой, т.е. результат процесса распознавания в определенной степени обременен ошибками. Частота появления ошибок растет с расширением словарного запаса системы и падает с растущей ригидностью (скованностью) грамматической речевой модели. При работе в многопользовательском режиме она также выше, чем для случаев, когда система рассчитана на одного диктора.

Человек осознает понимание произнесенной фразы как совершенно обычный и само собой разумеющийся навык. По нашим субъективным впечатлениям речевое высказывание состоит из последовательности слов, каждое из которых в свою очередь состоит из последовательности звуков; все же вместе представляется как временно ориентированный поток дискретных единиц, сцепленных между собой подобно отдельным звеньям одной цепи. Каждый звуковой сегмент при этом представляется снабженным инвариантным звуковым свойством, совершенно независимым от данного (текущего) контекста. Однако это впечатление обманчиво; оно следует исключительно из высокосложной нейрофизиологической внутренней обработки речевого сигнала.

Сложности, которые следует преодолеть при машинном распознавании речи, можно разделить на четыре группы. Сюда входят непрерывность, изменчивость, сложность и неопределенность произносимой речи.

Непрерывность. В противоположность вышеописанному впечатлению в речевом сигнале в общем случае не существует никакой видимой дискретности, которая однозначно обозначала бы границы между словами, слогами и звуками. В особенных случаях даже точное обнаружение границы слов гаран-

тировано только тогда, когда определенные границы фразы помечаются диктором интонационно с помощью коротких интервалов «молчания».

Изменчивость. Одни и те же речевые единицы могут быть реализованы акустически многочисленными способами. При этом необыкновенно сложно найти подходящие акустические прототипы для слов и звуков, которые бы (прототипы) представляли различия корректно, несмотря даже на изменчивые сопутствующие факторы. Такой прототип должен выбираться так, чтобы, с одной стороны, охватывать все возможные вариации, с другой стороны, четко разграничивать конкурирующие единицы (прототипы).

Сложность: Автоматическое распознавание речи требует высокой производительности компьютера и больших объемов памяти. Причиной этому являются: скорость передачи данных при вводе речевого сигнала (обычно от 8000 до 20000 квантованных значений сигнала в секунду), обширный инвентарь единиц распознавания и огромная комбинаторика при построении предложения (из X различных слов можно построить Y^X различных последовательностей слов длиной Y).

Неопределенность: Между единицами речи и их реализацией, в общем случае, не имеется взаимнооднозначного соответствия. Например, различные слова или предложения могут быть, при определенных обстоятельствах, произнесены очень похожим образом или вообще одинаково. Такая многозначность встречается на речевых уровнях: как гомофоны («род-рот»), на границе слов, в синтаксической и семантической области.

Несмотря на описанные сложности с внедрением речевого взаимодействия, по совокупности показателей интерфейс взаимодействия человека и компьютера «голос-видео» представляется мне более удобным, чем используемый в настоящее время интерфейс «клавиатура-мышь-видео». Будущее речевого интерфейса зависит от умения разработчиков не только создать технологическую основу речевого ввода, но и от умения предложить варианты практического применения, где интерфейс «голос-видео» будет иметь явные преимущества перед стандартным сегодня интерфейсом «клавиатура-мышь-видео».

Литература: 1. Schukat-Talamazzini E.G. Automatische Spracherkennung.- Vieweg Verlag, 1995. 2. Hunt M. Speech Technology.- 1992. 3. Sagerer G. Automatisches Verstehen gesprochener Sprache.- Bd. 74 von Reihe Informatik, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1990.

**ПРИМЕНЕНИЕ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ СЕТЕЙ
К РАСПОЗНАВАНИЮ ОБРАЗОВ**

Смачек С.Н., БГТУ, Брест

Обозначим через D множество объектов, подлежащих распознаванию. Примем, что на этом множестве определено отношение подобия $K \subset D \times D$. Отношение K описывает разбижку множества D на классы подобия $\{D^i\}$, соответствующие образам. Отношение K называется классификацией. Пусть L — количество классов подобия, а $I = 1 \dots L$ — множество индексов. Тогда

$$D = \bigcup_{i \in I} D^i, \forall_{\mu, \nu \in I} [D^\mu \cap D^\nu = \emptyset], \quad (1)$$

$$\forall_{d^\mu, d^\nu \in D} [\langle d^\mu, d^\nu \rangle \in K \Rightarrow \exists_{i \in I} (d^\mu \in D^i) \wedge (d^\nu \in D^i)]. \quad (2)$$

Из описания отношения K следует существование отображения $A: D \rightarrow I$ такого, что $\forall_{d \in D} [A(d) = i \Leftrightarrow d \in D^i]$. Отображение A полностью описывает отношение K , а отношение K определяет отображение A с точностью до перестановки элементов множества индексов I .

Задача распознавания образов [1] основана на построении алгоритма, реализующего отображение

$$\hat{A}: D \rightarrow I \cup \{i_0\} \quad (3)$$

такого, что некоторая мера $Q(A, \hat{A})$, называемая оценкой качества алгоритма распознавания \hat{A} , была минимальна. Одноэлементное множество $\{i_0\}$ символизирует отсутствие ответа (решение типа «не знаю»). Введение в отображение \hat{A} элемента i_0 делает задачу распознавания более реалистической: на практике часто не возможно принять правильное решение с полной уверенностью. И поэтому будет значительно лучше, если алгоритм примет решение, что не может распознать некий объект и означает это специальным сигналом, чем когда алгоритм даст неправильный ответ о распознаваемом объекте.

Отображение \hat{A} реализуется как суперпозиция трех отображений $A = F \circ C \circ B$. При этом первое из них имеет вид $B: D \rightarrow X$; второе $C: X \rightarrow R^L$

означает вычисление так называемых функций принадлежности; и последнее, записываемое $F: R^t \rightarrow I \cup \{i_0\}$, означает процесс принятия решения.

Начальным элементом алгоритма распознавания является измерение черт присущих всем объектам. Этот процесс приводит к замене объектов $d \in D$ на точки в пространстве черт X . Структура данного отображения во многом субъективна и определяется главным образом измерительными возможностями. В следствии его действия, каждый j -ый объект будет являться n -мерной точкой $\bar{x}^j = (x_1^j \ x_2^j \ \dots \ x_n^j) \in X$. Задачей второго отображения C является кластеризация точек пространства X . В ходе его вычисляется степень принадлежности каждой точки, описывающей объект, к каждому из L кластеров. По средствам третьего отображения F на основе чисел, характеризующих степень принадлежности, делается вывод о принадлежности объекта к i -ому классу подобия, или в случае несильного различия результирующих степеней – вывод о невозможности распознать объект.

Для решения задачи кластеризации предлагается использовать самоорганизующуюся сеть (SOM – self-organization map) с конкурирующим алгоритмом обучения без учителя [2]. Данная сеть представляет собой простую однослойную сеть прямого распространения с n нейронными элементами во входном слое и с L нейронами в результирующем. На вход сети последовательно подаются координаты образов в пространстве черт $\bar{x}^j = (x_1^j \ x_2^j \ \dots \ x_n^j) \in X$, а на выходе требуется отнести его к соответствующему классу. Веса синаптических связей $\bar{w}_i = (w_{1i} \ w_{2i} \ \dots \ w_{ni})$, $i = \overline{1, L}$ инициализируются произвольным образом. При обучении ищется такой нейрон выходного слоя, у которого смежные ему веса \bar{w}_i , рассматриваемые как координаты, наименее отличаются от координат поданной на вход сети точки \bar{x}^j . Т.е. «побеждает» тот нейрон, для которого $d(\bar{x}^j, \bar{w}_i) = \min_{1 \leq k \leq L} d(\bar{x}^j, \bar{w}_k)$, где $d(\bar{x}^j, \bar{w}_k)$ обозначает расстояние между ко-

ординатами точки $\overline{x^J}$ и весами $\overline{w_k}$ в соответствии с принятой метрикой. Вокруг нейрона победителя принимается топологическое соседство $S_{w_l}^-(t)$ с определенной степенью малости, уменьшающейся со временем. Нейрон победитель и все нейроны, лежащие в области соседства подлежат модификации, изменяя свои векторы весов в направлении вектора $\overline{x^J}$ в соответствии с правилом Кохонена [3]:

$$\overline{w_l}(t+1) = \overline{w_l}(t) + \eta_l(t) \cdot (\overline{x^J} - \overline{w_l}(t)), \quad (4)$$

для $l \in S_{w_l}^-(t)$, где $\eta_l(t)$ - шаг обучения l -ого нейрона из соседства $S_{w_l}^-(t)$ в момент времени t . Значение $\eta_l(t)$ уменьшается в соответствии с удалением нейрона от победителя. Веса нейронов вне соседства $S_{w_l}^-(t)$ не подлежат изменениям. Процесс обучения заканчивается после подачи всех элементов обучающего множества по несколько раз. После окончания процесса обучения веса, смежные результирующим нейронам, будут являться центрами соответствующих кластеров. Опытным путем устанавливаются соответствующие кластерам образы.

В процессе распознавания образов для каждого поданного на вход сети вектора черт на выходе будут формироваться значения функций принадлежности к каждому кластеру (расстояния до центров). То значение, которое наиболее мало, характеризует кластер, к которому принадлежит опознаваемый объект. В случае, если имеется более двух относительно малых значений расстояний до центров кластеров, ответ о принадлежности к какому-то определенному не может быть дан.

Литература. 1. Ryszard Tadeusiewicz, Mariusz Flasiński. Rozpoznawanie obrazów. – Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1991. – 217 s. 2. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / Пер. с польского Н.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с. 3. Kohonen T. Self-organization and associative memory. – Berlin: Springer, 1984. – 255 p.

РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ВЛАГОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА ПО КИНЕТИКЕ ОДНОМЕРНОГО ВОДОПОГЛОЩЕНИЯ

Афонин А.В., БГТУ, Брест

При проведении теплотехнических расчетов, позволяющих определять нестационарные температурно-влажностные поля, возникающие в капиллярно-пористых строительных материалах, требуется иметь данные о коэффициентах переноса тепла и влаги, характеризующих данный материал и входящих в уравнения тепломассопереноса. Одним из таких коэффициентов является коэффициент влагопроводности (коэффициент диффузии жидкой влаги).

В работе [1] была предложена методика оценки коэффициента влагопроводности материала по данным о кинетике одномерного водопоглощения. Экспериментальная часть методики состоит в измерении изменяющейся со временем массы образца материала в виде прямоугольного параллелепипеда, покрытого со всех граней, кроме нижней, гидроизоляцией, и приведенного в момент времени $t = 0$ нижней гранью в соприкосновение с водой.

Уравнения, описывающие перенос влаги и изменение массы образца со временем, имеют вид [1]:

$$\rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где ρ_0 – объемная масса материала; $\omega(x, t)$ – весовая влажность (отношение массы влаги, содержащейся в участке материала, к массе этого участка в сухом состоянии), зависящая от координаты x и времени t ; $\beta(\omega)$ – коэффициент влагопроводности материала.

Начальное условие предполагает, что образец в начальный момент времени (при $t = 0$) был сухим:

$$\omega(x, 0) = 0, \quad 0 < x \leq L, \quad (2)$$

где L – длина образца.

Граничные условия означают, что на погруженной в воду нижней грани образца влажность максимальна

$$\omega(0, t) = \omega_{\max}, t \geq 0, \quad (3)$$

где ω_{\max} — максимальная весовая влажность материала, а плотность потока влаги через гидроизолированную верхнюю грань равна нулю:

$$-\beta(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, x = L, t \geq 0. \quad (4)$$

Изменение массы образца со временем описывается уравнением:

$$m(t) = m(0) + \rho_0 S \int_0^L \omega(x, t) dx, \quad (5)$$

где S — площадь поперечного сечения образца.

Величины ρ_0 и ω_{\max} можно вычислить по формулам:

$$\rho_0 = \frac{m(0)}{SL}, \quad \omega_{\max} = \frac{m(T) - m(0)}{m(0)}. \quad (6)$$

где T — некоторый момент времени, при достижении которого можно считать, что образец полностью насытился влагой, то есть $m(t) = m(T)$ при $t \geq T$.

Задача состоит в определении по заданной функции $m(t)$ и размерам образца S и L коэффициента влагопроводности как функции влажности $\beta(\omega)$.

Для решения этой задачи предположим, что величина β зависит от координат и времени не посредством величины ω , а произвольным образом. Уравнение (1) при этом запишется как:

$$\rho_0 \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta(x, t) \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Необходимым и достаточным (при монотонности функции ω по переменным x и t , которая выполняется в данной задаче) условием того, что величина β представляет собой функцию от ω , то есть $\beta(x, t) = \beta(\omega(x, t))$, является уравнение:

$$\frac{\partial \beta(x, t) \partial \omega(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial \beta(x, t) \partial \omega(x, t)}{\partial t \partial x}. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными β и ω , зависящими от координат и времени. При этом должны выполняться условия (2)-(5).

Проинтегрируем уравнение (7) по переменной x :

$$-\beta(x, t) \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} = \rho_0 \left(\int_x^L \frac{\partial \omega(\xi, t)}{\partial t} d\xi + C(t) \right), \quad (9)$$

где $C(t)$ – некоторая функция от времени. Заметим, что при $x = L$ интеграл в правой части (9) равен нулю, поэтому для того, чтобы выполнялось граничное условие (4), необходимо и достаточно, чтобы было $C(t) = 0$.

Выразим величину β из формулы (9):

$$\beta(x, t) = -\rho_0 \int_x^L \frac{\partial \omega(\xi, t)}{\partial t} d\xi / \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), будем иметь одно нелинейное интегродифференциальное уравнение для одной неизвестной величины ω :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \right) \int_x^L \frac{\partial \omega(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \\ & + \left(\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \right)^2 \int_x^L \frac{\partial^2 \omega(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + \left(\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

В качестве граничных условий к этому уравнению следует взять соотношения (2), (3), (5), а также учесть, что в момент времени T образец полностью насытится влагой:

$$\omega(x, t) = 0 \quad \text{при } t = 0, 0 < x \leq L, \quad (12)$$

$$\omega(x, t) = \omega_{\max} \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, x = 0, \quad (13)$$

$$\int_0^L \omega(\xi, t) d\xi = \frac{m(t) - m(0)}{\rho_0 S} \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

$$\omega(x, t) = \omega_{\max} \quad \text{при } t = T, 0 \leq x \leq L. \quad (15)$$

Уравнение (11) с условиями (12)-(15) описывает изменение влажности образца во времени и пространстве при заданном изменении массы образца $m(t)$

таким образом, чтобы выполнялось уравнение диффузии (1), в котором коэффициент теплопроводности является функцией влажности.

Это уравнение может быть линеаризовано относительно малой поправки $\delta\omega(x,t)$ к функции $\omega(x,t)$ с помощью итерационного метода Ньютона. Полученное линейное уравнение можно решать численно на прямоугольной сетке с координатами (x,t) . Матрица системы линейных алгебраических уравнений на этой сетке является блочно-трехдиагональной, поэтому следует применять метод прогонки.

В качестве начального приближения к методу Ньютона может быть принято полученное в работе [1] численное решение уравнения (1) с граничными условиями (2)-(4) и коэффициентом $\beta(\omega)$, подобранным вручную таким образом, чтобы как можно более точно выполнялось соотношение (5).

Полученное таким путем решение уравнения (11) с условиями (12)-(15) следует подставить в соотношение (10) и вычислить искомый коэффициент теплопроводности $\beta(\omega)$.

Литература. 1. Афонин А.В., Никитин В.И., Шабанов Д.Н. Оценка параметров теплопроводности строительных материалов для теплотехнических расчетов // Вестник Брестского государственного технического университета. №2(20), 2003. Серия "Водохозяйственное строительство, теплоэнергетика, экология". – Брест, 2003. – 104 с. – С. 98-100.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗРЕДУКТОРНЫХ И РЕДУКТОРНЫХ ПРИВОДОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Бескровный А.В., Туренкова А.В., ГГТУ, г. Гомель

В работе [1] была получена наиболее полная математическая модель анализа электропотребления безредукторных электромеханических преобразователей периодического движения, в том числе и с пружинной нагрузкой на валу. Для полного анализа целесообразности применения безредукторных колебательных приводов необходимо провести их сравнение с редукторными приводами. Для этого необходимо создать математическое и программное обеспечение для анализа всех типов приводов, желательно на одной программной базе.

Поэтому было принято решение доработать математическую модель и программное обеспечение для анализа и синтеза редукторных приводов периодического движения при испытании трех типовых режимов работы пружины в реальных условиях: сжатие – растяжение пружины; сжатие пружины; растяжение пружины. Покажем, как это делается, на примере привода с кривошипно – шатунным механизмом для испытания пружин в режиме сжатия – растяжения.

При наличии кривошипно – шатунного механизма на валу двигателя в уравнении движения появляется еще одна составляющая: $\frac{w^2}{2} \cdot \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}$, которая связана с тем, что момент инерции на валу двигателя меняется в зависимости от его угла поворота [2]. Общий вид уравнения движения будет иметь при этом следующий вид

$$M - M_{np}(\varphi) = J_{\Sigma}(\varphi) \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{w^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\Sigma}(\varphi)}{d\varphi}, \quad (1)$$

где M – момент двигателя; M_{np} – момент нагрузки, приведенный к валу двигателя; J_{Σ} – суммарный момент инерции, приведенный к валу двигателя; w , φ – скорость и угол поворота вала двигателя.

В случае «сжатие – растяжение» перемещение пружины равно

$$x = R_K \cdot \cos(\varphi), \quad (2)$$

где x – линейная координата пружины; R_K – радиус кривошипа.

Линейная скорость рабочего органа

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (3)$$

Угловая скорость вала двигателя

$$w = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4)$$

Приведенный момент инерции

$$J_{np} = m \cdot \frac{v^2}{w^2}, \quad (5)$$

где m – масса нагрузки.

Подставляя в формулу (5) формулы (2-4), получим

$$J_{np} = m \cdot R_K^2 \cdot \sin^2(\varphi) . \quad (6)$$

Суммарный момент инерции

$$J_{\Sigma} = J_{д} + J_{np} , \quad (7)$$

где $J_{д}$ – момент инерции двигателя.

Приведенный момент к валу двигателя

$$M_{пр} = F \cdot \frac{v}{w} , \quad (8)$$

где F – усилие, создаваемое нагрузкой и равное

$$F = (F_{тр} + c \cdot x) , \quad (9)$$

где $F_{тр}$ – сила трения; c – коэффициент жесткости пружины.

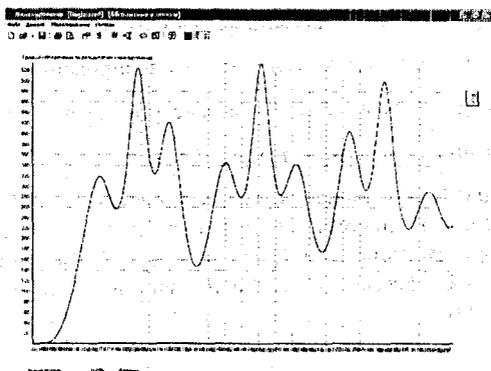
Подставляя в формулу (8) формулы (2-4,9), получим

$$M_{пр} = -R_K \cdot \sin(\varphi) \cdot (F_{тр} + c \cdot x) . \quad (10)$$

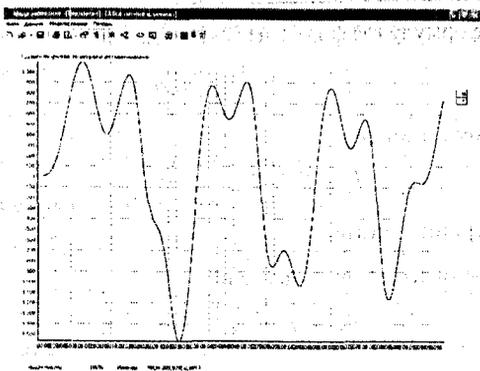
После подстановки в (1) формулы (6,7,10) и преобразований получим

$$\frac{dw}{dt} = \frac{M + R_K \cdot \sin(\varphi) \cdot (F_{тр} + c \cdot x) + \frac{w^2}{2} \cdot (m \cdot R_K^2 \cdot (2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)))}{(J_{д} + m \cdot R_K^2 \cdot \sin^2(\varphi))} . \quad (11)$$

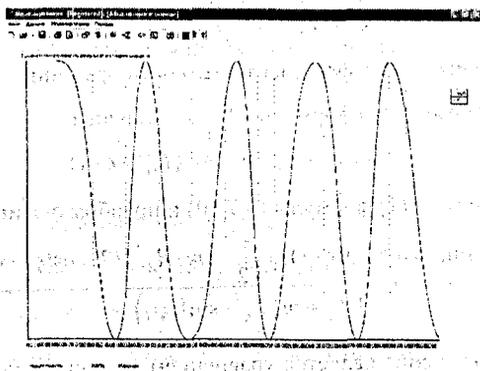
Полученное выражение является уравнением движения для случая сжатия – растяжения пружины. Для остальных двух случаев вывод уравнений движения аналогичен.



a)



б)



в)

Рис.1 Временные зависимости координаты положения ползуна (а), угловой скорости (б) и электромагнитного момента (в) электропривода.

На рис.1 представлены временные зависимости, полученные по уравнению (11) при следующих условиях моделирования: двигатель типа 4Ф90LВ8У3, радиус кривошипа 0.2 м, масса нагрузки 1 кг, коэффициент жесткости пружины 0.001, сила трения 0.01.

Литература. 1. Луковников В.И., Бескровный А.В., Спорик А.Е. Математическая модель анализа электропотребления электромеханических преобразователей. – Вестник ГГТУ, 3/2000 с 3-9. **2.** Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. – М.: Энергия, 1979.- 616с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ ТЕСТОВ КОИНТЕГРИРОВАННОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ.

Босько А.А., БГУ, Минск

Структурные изменения моделей являются характерной особенностью временных рядов макроэкономических показателей. При наличии структурных изменений в моделях временных рядов должны использоваться специальные тесты коинтегрированности, потому что структурные изменения могут оказывать влияние на свойство коинтегрированности.

Векторная модель коррекции ошибок при наличии структурных изменений в детерминированной части исследовалась Йохансеном, Москони и Нильсеном в их совместной работе 2000 г. [3]. Там же были описаны типы структурных изменений, а также получено выражение для статистики теста, основанного на функции отношения правдоподобия (теста Йохансена) при заданных типах структурных изменений. При этом предполагалось, что априорно известны моменты структурных изменений и количество периодов q ($q \geq 1$) в течение которых могут иметь место структурные изменения. Длины этих периодов равны $T_j - T_{j-1}$ для $j = 1, 2, \dots, q$, где $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_q = T$.

При введении фиктивных переменных $D_{j,t-i}$ и $E_t = (E_{1,t}, \dots, E_{q,t})'$ модель коррекции ошибок при наличии структурных изменений в детерминированной части принимает вид [3] (рассматривается векторная авторегрессионная модель порядка k):

$$\Delta X_t = \alpha \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ tE_t \end{pmatrix} + \mu E_t + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^q k_{j,i} D_{j,t-i} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где β – матрица коинтегрирующих векторов, α – матрица регулирования, Γ_i – матрицы размерности $(p \times p)$, и ε_t предполагаются независимыми, нормально распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Ω размерности $(p \times p)$, $k_{j,i}$ – p -векторы и X_1, \dots, X_k – фиксированные начальные наблюдения, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$, $\gamma = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_q)'$ – параметры сноса для различных периодов размерности $(q \times 1), (p \times q), (q \times r)$, соответственно.

Проблема тестирования порядка коинтегрированности при наличии структурных изменений в детерминированном тренде состоит в том [3], что распределение статистики отношения правдоподобия зависит как от вида детерминированной части, так и от типа структурных изменений, а также самих «моментов разладки». При структурных изменениях в матрице коинтегрирующих векторов β , α и ковариационной матрице Ω , как показано в [1], возможно обобщение теста Йохансена.

Целью данной работы является исследование свойств теста Йохансена в случае, когда не учитываются присутствующие структурные изменения. В частности, изучение зависимости ошибок первого и второго рода теста Йохансена от степени выраженности и типа структурного изменения. Рассматриваются две модели со структурными изменениями в середине исследуемого периода ($T_1 = T/2$).

Первая модель предполагает наличие линейных трендов в исследуемых временных рядах и в коинтеграционном соотношении и имеет вид:

$$\Delta X_t = \alpha \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ tE_t \end{pmatrix} + \mu + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^q k_{j,i} D_{j,t-i} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma')$ – вектор линейной составляющей в коинтеграционном соотношении. Для исследования зависимости результатов теста от степени выраженности разладки положим $\gamma_2 = \delta_1 \cdot \gamma$, где $\delta_1 = 1, \dots, 10$.

Вторая модель предполагает наличие линейного тренда в исходных временных рядах. Коинтеграционное соотношение содержит только свободный член. Модель описывается соотношением:

$$\Delta X_t = \alpha \beta' (X_{t-1}) + \mu E_t + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^q k_{j,i} D_{j,t-i} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ – матрица размерности (3×2) линейных составляющих в исходных данных.

На основании Теоремы о представлении [3] было получено представление для двух моделей в виде процессов скользящего среднего, которые использовались для исследования теста коинтегрированности. Для каждого δ_1 и δ_2 с по-

мощью статистического моделирования было получено по $N = 10000$ реализаций. Для исследования результатов теста от длины временного промежутка моделировались ряды длиной 50, 100, 200.

Рассматривались две гипотезы: H_0 : отсутствие коинтегрированности против альтернативы H_1 : порядок коинтегрированности равен или больше единицы. Использовался обычный тест Йохансена без предположения о присутствии структурного изменения. Использовалось 5%-ное критическое значение [2]. Таким образом, предполагалось, что исследователь не обнаружил структурного изменения. Вероятность ошибки первого рода имеет смысл вероятности ошибиться в пользу гипотезы о коинтегрированности. Мощность теста имеет смысл вероятности правильного принятия гипотезы о наличии коинтегрированности.

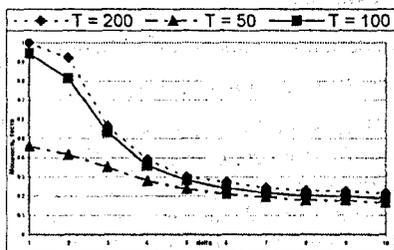


Рис. 1. Мощность теста

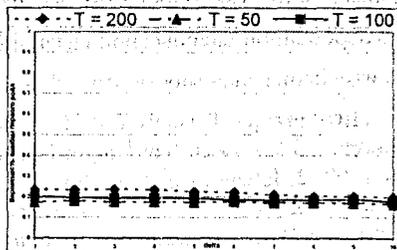


Рис. 2. Вероятность ошибки первого рода

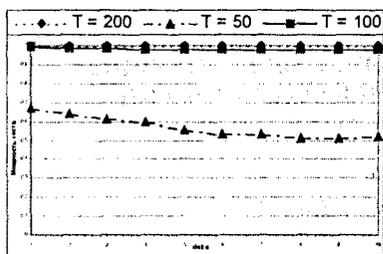


Рис. 3. Мощность теста

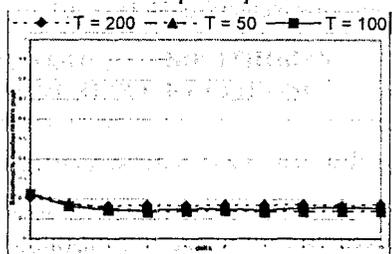


Рис. 4. Вероятность ошибки первого рода

Для первой модели результаты приведены на рис. 1 и 2, для второй на рис.3 и 4. Для первой модели увеличение степени выраженности «разладки» приводит к резкому уменьшению мощности теста, что говорит о большой вероятности отклонения верной гипотезы о наличии коинтегрированности. Ошибка

первого рода незначительно уменьшается при увеличении эффекта структурного изменения. Таким образом, не принятие во внимание структурного изменения в коинтеграционном соотношении может привести к неверному выводу об отсутствии коинтегрированности.

Для второй модели наблюдается незначительное уменьшение мощности и ошибки первого рода. Это говорит о том, что структурные изменения в детерминированных составляющих, не вовлеченных в долговременную равновесную связь, не могут повлиять на правильное определение коинтегрированности временных рядов.

Для не коинтегрированных рядов наличие в них структурных изменений в один момент времени не увеличивает вероятность ошибиться в пользу коинтегрированности. Таким образом, важнейшим вопросом является присутствие в долговременной равновесной связи фактора времени и определения возможности изменения значимости этого фактора в определенный момент времени.

Литература. 1. Hansen P. R. *Structural Breaks in the Cointegrated Vector Autoregressive Model*. San Diego: Department of Economics, University of California, 1999. 2. Johansen S. *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. N.Y.: Oxford university press Inc, 1995. 3. Johansen S., Mosconi R., Nielsen B. *Cointegration analysis in the presence of structural breaks in the deterministic trend* // *Econometrics Journal*. № 3. 2000. P.216–249. 4. Engel R. F., Granger C. W. J. *Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing* // *Econometrica*. №.55. 1987. P.251–276.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СВЕРХЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Калюта В.В., БрГУ, Брест

Для решения нелинейных систем

$$F(x)=0; f(D \subset R^n \rightarrow R^n), f \in C_d^{(2)}$$

применяем следующие итерационные методы:

Итерационные процессы, локально сходящиеся с квадратичной скоростью:

Шаг 1: Решается линейная система:

$$(\alpha E + \bar{f}'(x_n) f'(x_n)) \Delta x_n = -\bar{f}'(x_n) f(x_n); \alpha \ll 1; \alpha \in (10^{-8}, 10^{-5});$$

Шаг 2: Очередное приближение находится по формулам:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n; \beta_0 \in (10^{-3}, 10^{-1});$$

Шаг 3: Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где $\varepsilon \in (10^{-15}, 10^{-16})$, то конец просчётов, иначе пересчёт β_{n+1} по формулам: а)–е) и переход на шаг 1).

Итерационные процессы, локально сходящиеся с кубической скоростью:

Шаг 1: Решается линейная система для нахождения Δy_n :

$$f'(x_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad \text{где } y_n = x_n + \beta_n \Delta y_n;$$

Шаг 2: Решается вторая линейная система для нахождения Δx_n :

$$f'(x_n)\Delta x_n = -(f(x_n) + \beta_n f(y_n)); \quad \beta_0 \in (10^{-3}, 10^{-1});$$

Шаг 3: Очередное приближение находится по формулам:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n; \quad \beta_0 \in (10^{-3}, 10^{-1});$$

Шаг 4: Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где $\varepsilon \in (10^{-15}, 10^{-16})$, то конец просчётов, иначе пересчёт β_{n+1} по формулам: а)–е) и переход на шаг 1).

Формулы пересчёта β_{n+1} :

$$\begin{aligned} \text{а) } \beta_{n+1} &= \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right); & \text{б) } \beta_{n+1} &= \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|\beta_n}{\|f(x_{n+1})\|}\right) \\ \text{в) } \beta_{n+1} &= \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), \end{aligned}$$

где $W_0 = \gamma\|f(x_0)\|$, $\gamma \ll 1$;

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1})\|; \quad \gamma \in (10^{-10}, 10^{-8}), \quad 1 < \alpha \leq 2;$$

$$\text{д) } \beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|}{\left(\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|\right)\beta_n}\right);$$

$$\text{е) } \beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{(W_n + \alpha\|f(x_{n+1})\|)\beta_n}\right);$$

Эффективность методов была опробована на расширенной функции Розенброка и расширенной обобщённой функции Пауэлла [1].

На основании расчётов, при рассмотрении данных задач, можно сделать вывод о том, что метод III-го порядка по количеству итераций на 1-2 порядка эффективнее метода II-го порядка.

Для решения уравнения $f(x)=0$ с нелинейным гладким оператором f может быть предложен метод Ньютона с другой регуляровкой шага, где шаговая длина определялась одним из следующих способов:

$$1) \beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|(\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|)\beta_n}\right); \quad \gamma_0 \leq \beta_0^2$$

$$\gamma_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|}\right),$$

$$2) \beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), \quad \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|},$$

$$3) \beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), \quad \gamma_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}\right)$$

В качестве тестовых задач были рассмотрены задачи *Розенброка* и *Пауэлла* [1]. В результате просчётов наиболее эффективными оказались процессы, где регуляровка шага осуществлялась по формулам 2) и 3).

Литература. 1. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. 2. Мадорский В.М. о некоторых подходах к построению нелокальных итерационных процессов // Труды международной научной конференции «Статистический и прикладной анализ временных рядов». – Брест: БрГУ, 1997.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ГЛОБАЛЬНОГО АНАЛИЗА СПЕКТРОВ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ С РАЗРЕШЕНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Коваленко О.А., БГУ, Минск

Флуоресцентная спектроскопия – мощный метод изучения динамики фотофизических процессов, определения параметров сложных биомолекулярных систем, химических и биологических объектов [1]. При использовании методов спектроскопии важным этапом является интерпретация экспериментальных данных. Глобальный анализ – это совместный анализ нескольких связанных наборов данных [2].

Целью данной работы является разработка метода глобального анализа флуоресцентных спектров с временным разрешением с использованием мате-

матического моделирования. Предлагается использовать имитационную модель, основанную на методе Монте-Карло. Такой подход помогает при исследовании сложных систем (например, системы, в которых возможны процессы переноса и миграции энергии). На базе имитационного моделирования, методов оптимизации и статистических критериев предложен подход глобального анализа данных для проведения исследования в донорно-акцепторной системе.

Двигаясь от простого к сложному, для исследования выбрана донорно-акцепторная модель, в рамках которой возможен резонансный перенос энергии от молекул донора к молекулам акцептора [3]. Основные параметры модели: τ_D и τ_A – время жизни нижнего синглетного возбужденного состояния соответственно донора и акцептора, k_{ET} – константа переноса энергии. Идея глобального анализа применительно к предложенной системе рассмотрена на рис. 1. С помощью единой имитационной модели генерируются две характеристики: затухания флуоресценции донора и затухание флуоресценции акцептора. Сгенерированные теоретические данные сравниваются с соответствующими экспериментальными данными. Результат сравнения – величина статистического критерия χ^2 .

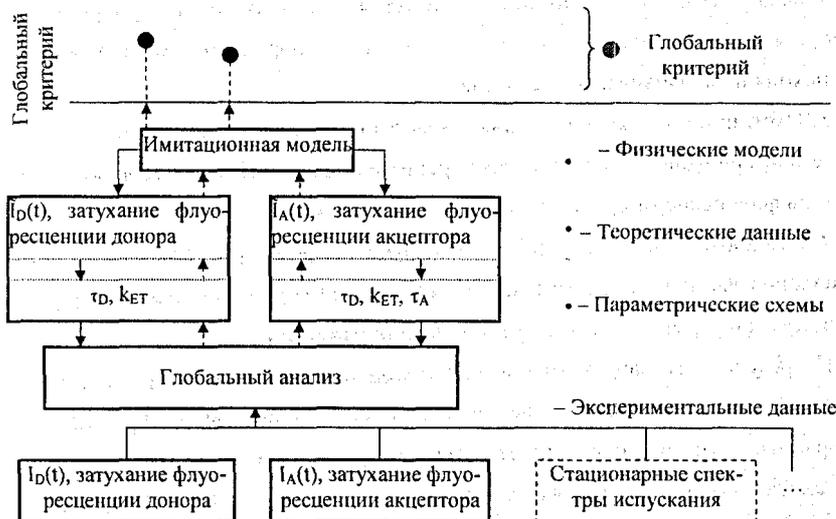


Рис 1. Схема метода глобального подхода анализа данных.

Результаты анализа отдельных наборов данных объединяются в единый глобальный критерий. В данной схеме глобального подхода для подгона параметров системы используется метод оптимизации Нелдера-Мида [4]. На основе полученной величины глобального критерия определяется направление поиска оптимальных параметров.

В качестве экспериментальных наборов данных в работе использованы синтетические данные, на основе параметров существующей молекулярной системы по переносу энергии, раствора пиронина и оксонина в этаноле [5].

В работе исследовано три стратегии вычисления глобального критерия χ^2 для процедуры оптимизации параметров системы, которые основаны на различных комбинациях частных значений статистического критерия. Полученные оптимистичные результаты определения параметров системы методом глобального анализа данных позволяют сделать следующие выводы:

1. Критерий χ^2 может быть успешно использован для анализа соответствия теоретических данных экспериментальным данным.

2. Метод оптимизации Нелдера-Мида может быть успешно использован для поиска оптимальных параметров системы, когда имеются априорная информация о значениях, которые могут принимать параметры модели (например, исходя из их физического смысла).

3. Имитационное моделирование может быть успешно использовано в качестве альтернативы аналитическому решению для получения теоретических спектров флуоресценции с разрешением по времени.

4. Разработанный метод глобального анализа эффективен при анализе многих наборов данных, когда отдельные данные зависят от нескольких параметров системы и связаны некоторыми общими параметрами.

По результатам работы можно предположить, что глобальный подход может быть использован для исследования более сложных моделей, таких как мембранные протенины и фотонные антенны на базе органических красителей в кристаллах циолитов, а так же улучшен включением в анализ стационарных спектров.

Литература. 1. J.R. Lakowisz, Principles of Fluorescence Spectroscopy, 2nd ed., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 1999. 2. J.M. Becheem and A.M. Amelot, Global Analysis of Fluorescence Intensity and Anisotropy Decay Data. 3. M.M. Yatskou and G. Calzaferri, Monte Carlo Simulation of Radiationless Energy Migration and Energy Transfer: Simulation-based Fluorescence Decay Fitting, Champery, Switzerland. 4. J.A. Nelder and R. Mead, A simplex method for function minimization, Computer Journal, 1965, 7, 308-313. 5. G. Calzaferri, M. M. Yatskou, M. Meyer, S. Huber, M. Pfenniger, Electronic Excitation Energy Migration in a Photonic Dye-Zeolite Antenna, ChemPhysChem, 2003, 4, 567-587.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРУКТУРЫ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Козлов А.В., ГГТУ, г. Гомель

В работах [1] получено уравнение движения ротора двухфазного асинхронного электродвигателя (АД) в следующем виде:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \left[u_{\beta} \cdot \int u_{\alpha} \cdot dt - u_{\alpha} \cdot \int u_{\beta} \cdot dt - \omega \cdot \left(\int u_{\beta} \cdot dt \right)^2 \right], \quad (1)$$

где u_{α}, u_{β} – напряжения на обмотках управления и возбуждения; ω – скорость вращения двигателя; J – момент инерции двигателя; R – приведенное сопротивление обмотки ротора;

По уравнению (1) построим структурную схему двухфазного АД во временной области при амплитудной модуляции напряжения $u_{\alpha} = m \cdot u_y = \Omega \cdot t \cdot U_{ym} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ (рис.1), где напряжение возбуждения $u_{\beta} = U_{em} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$, а через $K = \frac{1}{R \cdot J}$ – обозначен коэффициент передачи электродвигателя.

Из структурной схемы (рис.1) видно, что входной сигнал u_{α} получается в результате многочисленных операций перемножения. Поэтому для анализа u_{α} целесообразно применить многомерный операторный метод [2]. Для получения скорости вращения двигателя сигнал u_{α} должен пройти через активное многомерное звено, находящееся в обратной связи. В прямом канале присутствует интеграл, что делает применение многомерного операторного метода невозможным. Поэтому дальнейший расчет

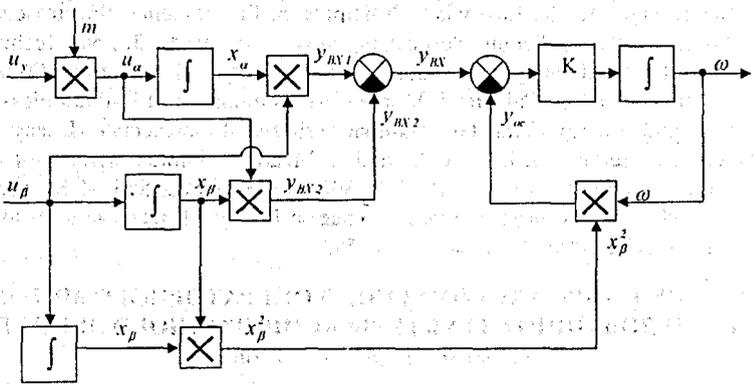


Рис.1. Структурная схема двухфазного асинхронного двигателя во временной области

можно проводить во временной области, решая дифференциальное уравнение движения, или в одномерной операторной области, применяя одномерное преобразование Лапласа.

Исходя из вышесказанного, можно построить структурную схему в многомерной операторной области (рис.2).

Рассчитаем сигнал $y_{\alpha\alpha}$ (рис.1) многомерным операторным методом. Запишем изображения сигналов u_α, u_β в многомерной области

$$U_\alpha(p_1, p_2) = M(p_1) \cdot U_y(p_2) = \frac{\Omega}{p_1^2} \cdot \frac{U_{ym} \cdot p_2^2}{p_2^2 + \omega_0^2}, \quad U_\beta(p_3) = U_{am} \cdot \frac{\omega_0}{p_3^2 + \omega_0^2}.$$

В многомерной операторной области входной сигнал $Y_{RN}(p_1, p_2, p_3)$ будет определяться следующим образом

$$\begin{aligned} Y_{RN}(p_1, p_2, p_3) &= Y_{RN1}(p_1, p_2, p_3) - Y_{RN2}(p_1, p_2, p_3) = \\ &= A(p_1, p_2) \cdot \frac{U_{am} \cdot \omega_0}{p_3^2 + \omega_0^2} - B(p_3) \cdot \frac{\Omega}{p_1^2} \cdot \frac{U_{ym} \cdot p_2}{p_2^2 + \omega_0^2}, \end{aligned}$$

где

$$A(p_1, p_2) = \frac{\Omega \cdot U_{ym} \cdot p_1}{p_2^2 \cdot p_1^2 + \omega_0^2 \cdot p_1 + p_2}, \quad B(p_3) = \frac{U_{am} \cdot \omega_0}{p_3^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{p_3}.$$

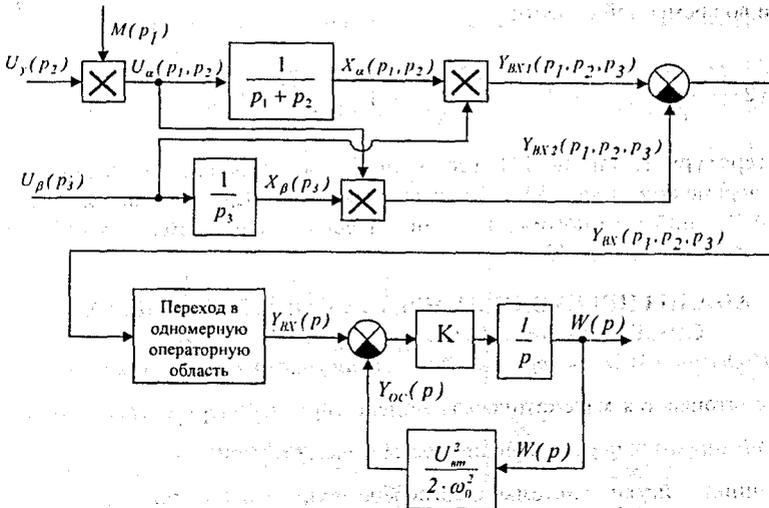


Рис.2. Структура двухфазного асинхронного двигателя в многомерной операторной области

Постепенно, сначала по оператору p_1 , потом по p_2 и наконец по оператору p_3 , перейдем во временную область и получим выражение

$$y_{BX} = \frac{U_{ym} \cdot U_{am} \cdot \Omega}{\omega_o} \cdot t \cdot (\sin^2(\omega_o \cdot t) + \cos^2(\omega_o \cdot t)) + \frac{U_{ym} \cdot U_{am} \cdot \Omega}{2 \cdot \omega_o^2} \cdot \sin(2 \cdot \omega_o \cdot t) =$$

$$= \frac{U_{ym} \cdot U_{am} \cdot \Omega}{\omega_o^2} \cdot \left(\omega_o \cdot t + \frac{\sin(2 \cdot \omega_o \cdot t)}{2} \right).$$

Отбрасывая колебания типа $\sin(2 \cdot \omega_o \cdot t)$, получим результат

$$y_{BX} = \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot U_{am}}{\omega_o} \cdot t,$$

или в одномерной операторной области

$$Y_{BX}(p) = \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot U_{am}}{\omega_o} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Далее, используя одномерное преобразование Лапласа и структурную схему рис.2 получим окончательный результат

$$W(p) = 2 \cdot \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_o}{U_{am}} \cdot \frac{1}{p^2} - 4 \cdot \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_o^3}{U_{am}^3 \cdot K} \cdot \frac{1}{p} + 4 \cdot \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_o^3}{U_{am}^3 \cdot K} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{K \cdot U_{am}^2}{2 \cdot \omega_o^2} \right)}.$$

Или во временной области

$$\omega = 2 \cdot \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_0}{U_{am}} \cdot t - 4 \cdot \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_0^3}{U_{am}^3 \cdot K} + 4 \cdot \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_0^3}{U_{am}^3 \cdot K} \cdot e^{-\frac{U_{am}^2 \cdot K \cdot t}{2 \cdot \omega_0^2}}$$

Литература. 1. Власов Н.П. Теория линейных следящих систем, работающих на переменном токе.- М.: Энергия, 1964, с.103-128. 2. Луковников В.И., Козлов А.В. Типовые многомерные динамические звенья // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого.-2000.-№2.-с.47-54.

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕМЕНТАХ СИСТЕМЫ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ СКРЕПЕРА

Подымако М.Э., Белорусско-Российский университет, г.Могилев

Рассматривается математическая модель системы энергосбережения скрепера, анализируются переходные процессы в элементах системы.

Принцип действия системы энергосбережения заключается в аккумуляровании энергии колебаний подрессоренных и непрессоренных частей скрепера. Для этого в подвеску скрепера устанавливаются гидроцилиндры, выполняющие роль качающих узлов, дроссели, обеспечивающие демпфирование колебаний, гидропневмоаккумулятор (ГПА), накапливающий энергию жидкости, а также направляющие и регулирующие элементы (клапаны, распределитель). Накопленная в ГПА жидкость направляется на вход насосов гидросистемы скрепера, создавая тем самым крутящий момент на валу двигателя внутреннего сгорания.

Для анализа работы системы при движении скрепера по неровностям микропрофиля в транспортном режиме составлена динамическая модель(рис.1) учитывающая инерционные, упругие и диссипативные свойства элементов системы. В модели приняты следующие обозначения: Q_i - расход на i -том участке; c_{i1} - коэффициент гидравлической жесткости i -го упругого элемента; μ_{i1} - коэффициент гидравлического сопротивления i -го участка; H_i - дискретные переменные управления клапанами и распределителем:

При составлении математической модели системы энергосбережения скрепера были приняты следующие допущения: 1) модуль упругости гидравлической жидкости является величиной постоянной; 2) инерционные свойства запорно-регулирующих элементов клапанов и распределителя не учитываются; 3) утечки в системе отсутствуют.

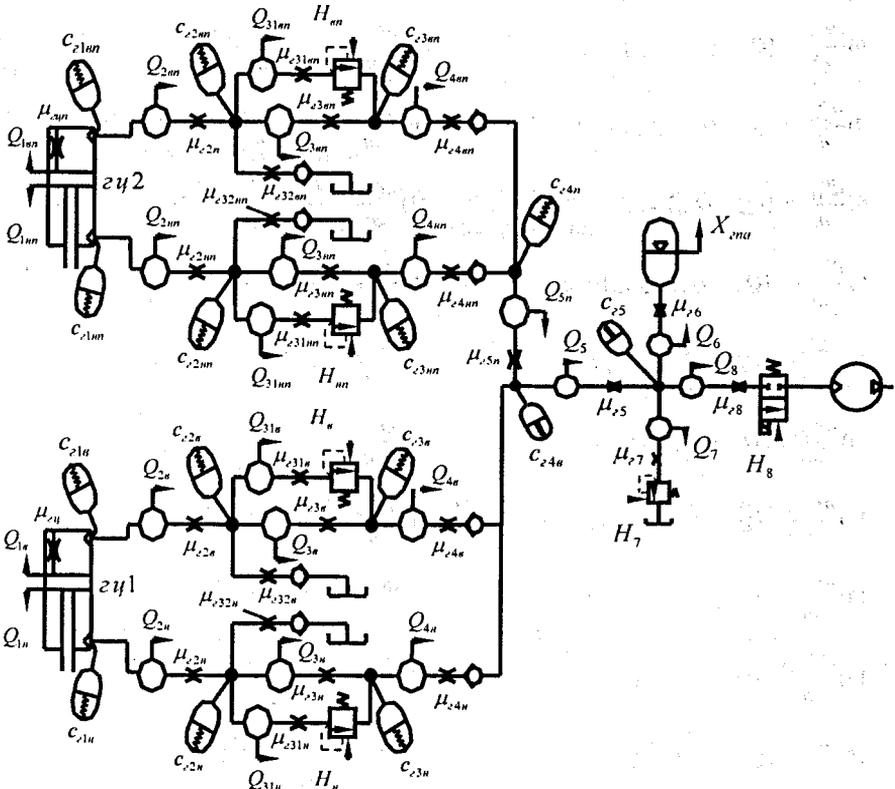


Рис. 1. Динамическая модель системы энергосбережения скрепера

Система уравнений в нормальной форме Коши имеет вид:

$$1) \frac{dP_{v1n}}{dt} = (Q_{1n} - Q_{2n}) \cdot c_{v1n};$$

$$20) \frac{dQ_{2n}}{dt} = \frac{P_{v1n} - P_{v2n} - P_{o1n} - P_{o2n} - P_{o2n} - P_{o32n}}{m_{n1} + m_{np2n}};$$

$$2) \frac{dP_{v2n}}{dt} = (Q_{2n} - Q_{3n} - Q_{31n}) \cdot c_{v2n};$$

$$21) \frac{dQ_{3n}}{dt} = \frac{P_{v2n} - P_{v3n} - P_{o3n}}{m_{np3n}};$$

$$3) \frac{dP_{v3n}}{dt} = (Q_{3n} - Q_{4n} + Q_{31n}) \cdot c_{v3n};$$

$$4) \frac{dP_{v4n}}{dt} = (Q_{4n} + Q_{4n} + Q_{5n} - Q_5) \cdot c_{v4n};$$

$$5) \frac{dP_{v1n}}{dt} = (Q_{1n} - Q_{2n}) \cdot c_{v1n};$$

$$6) \frac{dP_{v2n}}{dt} = (Q_{2n} - Q_{3n} - Q_{31n}) \cdot c_{v2n};$$

$$7) \frac{dP_{v3n}}{dt} = (Q_{3n} - Q_{4n} + Q_{31n}) \cdot c_{v3n};$$

$$8) \frac{dP_{v1nn}}{dt} = (Q_{1nn} - Q_{2nn}) \cdot c_{v1nn};$$

$$9) \frac{dP_{v2nn}}{dt} = (Q_{2nn} - Q_{3nn} - Q_{31nn}) \cdot c_{v2nn};$$

$$10) \frac{dP_{v3nn}}{dt} = (Q_{3nn} - Q_{4nn} + Q_{31nn}) \cdot c_{v3nn};$$

$$11) \frac{dP_{v4nn}}{dt} = (Q_{4nn} + Q_{4nn} - Q_{5n}) \cdot c_{v4nn};$$

$$12) \frac{dP_{v1nn}}{dt} = (Q_{1nn} - Q_{2nn}) \cdot c_{v1nn};$$

$$13) \frac{dP_{v2nn}}{dt} = (Q_{2nn} - Q_{3nn} - Q_{31nn}) \cdot c_{v2nn};$$

$$14) \frac{dP_{v3nn}}{dt} = (Q_{3nn} - Q_{4nn} + Q_{31nn}) \cdot c_{v3nn};$$

$$15) \frac{dP_{v5}}{dt} = (Q_5 - Q_6 - Q_7 - Q_8) \cdot c_{v5};$$

$$16) \frac{dQ_{2n}}{dt} = \frac{P_{v1n} - P_{v2n} - P_{v1n} - P_{v2n} - P_{v2n} - P_{v32n}}{m_{np} + m_{mp2n}};$$

$$17) \frac{dQ_{3n}}{dt} = \frac{P_{v2n} - P_{v3n} - P_{v3n}}{m_{mp3n}};$$

$$22) \frac{dQ_{31n}}{dt} = \frac{P_{v2n} - P_{v3n} - P_{v31n}}{m_{mp31n}} \cdot H_n;$$

$$23) \frac{dQ_{4n}}{dt} = \frac{P_{v3n} - P_{v4n} - P_{v4n}}{m_{mp4n}};$$

$$24) \frac{dQ_{2nn}}{dt} = \frac{P_{v1nn} - P_{v2nn} - P_{v1nn} - P_{v2nn} - P_{v2nn} - P_{v32nn}}{m_{np} + m_{mp2nn}};$$

$$25) \frac{dQ_{3nn}}{dt} = \frac{P_{v2nn} - P_{v3nn} - P_{v3nn}}{m_{mp3nn}};$$

$$26) \frac{dQ_{31nn}}{dt} = \frac{P_{v2nn} - P_{v3nn} - P_{v31nn}}{m_{mp31nn}} \cdot H_{nn};$$

$$27) \frac{dQ_{4nn}}{dt} = \frac{P_{v3nn} - P_{v4nn} - P_{v4nn}}{m_{mp4nn}};$$

$$28) \frac{dQ_{2nn}}{dt} = \frac{P_{v1nn} - P_{v2nn} - P_{v1nn} - P_{v2nn} - P_{v2nn} - P_{v32nn}}{m_{np} + m_{mp2nn}};$$

$$29) \frac{dQ_{3nn}}{dt} = \frac{P_{v2nn} - P_{v3nn} - P_{v3nn}}{m_{mp3nn}};$$

$$30) \frac{dQ_{31nn}}{dt} = \frac{P_{v2nn} - P_{v3nn} - P_{v31nn}}{m_{mp31nn}} \cdot H_{nn};$$

$$31) \frac{dQ_{4nn}}{dt} = \frac{P_{v3nn} - P_{v4nn} - P_{v4nn}}{m_{mp4nn}};$$

$$32) \frac{dQ_{5n}}{dt} = \frac{P_{v4n} - P_{v4n} - P_{v5n}}{m_{mp5n}};$$

$$33) \frac{dQ_5}{dt} = \frac{P_{v4n} - P_{v5} - P_{v5}}{m_{mp5}};$$

$$34) \frac{dQ_6}{dt} = \frac{P_{v5} - P_{v6} - P_{v6}}{m_{mp6} + m_{nu}};$$

$$35) \frac{dQ_7}{dt} = \frac{P_{v5} - P_{v7}}{m_{mp7}} \cdot H_7;$$

$$36) \frac{dQ_8}{dt} = \frac{P_{v5} - P_{v8}}{m_{mp8}} \cdot H_8;$$

$$18) \frac{dQ_{31a}}{dt} = \frac{P_{y2a} - P_{y3a} - P_{d31a}}{m_{np31a}} \cdot H_a;$$

$$37) \frac{dX_{zna}}{dt} = \frac{Q_6}{A_{zna}}$$

$$19) \frac{dQ_{4a}}{dt} = \frac{P_{y3a} - P_{y4a} - P_{d4a}}{m_{np4a}};$$

В математической модели введены следующие обозначения: P_{yi} - давление в i -том упругом элементе; P_{di} - потери давления на i -том участке; P_{zna} - давление в надпоршневой полости гидропневмоаккумулятора; m_{zci} - коэффициент массы поршня гидроцилиндра с присоединенными элементами; m_{mpi} - коэффициент массы i -го участка; X_{zna}, A_{zna} - соответственно перемещение и площадь поршня гидропневмоаккумулятора.

На графиках рис.2-5 показаны переходные процессы в элементах системы при движении машины по случайному микропрофилю.

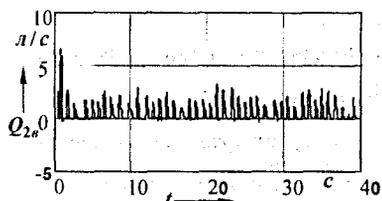


Рис.2. Зависимость расхода на участке 2в от времени

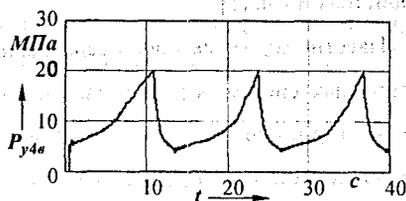


Рис.3. Зависимость давления в упругом элементе c_{4a} от времени

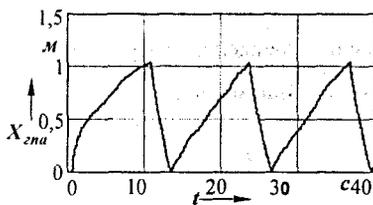


Рис.4. Зависимость перемещения поршня ГПА от времени

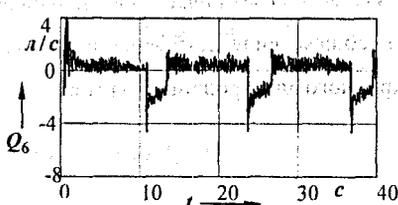


Рис.5. Зависимость расхода на участке 6 от времени

Анализ графиков рис.2-5 позволяет определить моменты зарядки/разрядки ГПА, проанализировать влияние включения распределителя на динамику системы. Реализация математической модели позволяет определить расходы и давления, а также оценить характер переходных процессов в элементах системы.

МЕТОД КОМПЕНСАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ «ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЬ – ПРУЖИНА».

Луковников В.И., Рудченко Ю.А., ГГТУ, Гомель

Во многих областях науки, техники и производства, используется колебательное движение рабочего органа машины без повышенных требований к качеству колебаний. Здесь перспективным оказывается применение автоколебательных режимов работы электродвигателей, что в конечном итоге ведет к уменьшению материалоемкости и энергопотребления. Данный режим работы электродвигателей используется в испытательных стендах пружинных подвесок и других упругих элементов, дисбалансных вибраторах, станках-качалках, аппаратах спортивной вибростимуляции, игрушках, рекламных качающихся устройствах и т.д. [1].

Известно много методов исследования установившегося движения автоколебательных систем: методы малого параметра, Ван дер Поля, Галеркина – Бубнова, гармонического баланса. В данной статье будет представлен еще один (авторский) метод, основанный на идее компенсации в установившемся режиме диссипативных сил нагрузки электромагнитными силами подпитки автоколебаний от асинхронного электродвигателя (АД).

Суть метода заключается в следующем.

В общем виде дифференциальное уравнение движения нагруженного асинхронного электродвигателя можно записать следующим образом

$$\varphi + f_1(\varphi) - f_2(\varphi) + \dot{\varphi} + \delta_1 - \delta_2 = 0, \quad (1)$$

где φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ – относительная угловая координата положения вала АД и ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по относительному времени;

Слагаемые φ и $\dot{\varphi}$ описывают в относительных переменных консервативную пару «момент инерции – упругость»; функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ определяют диссипативные силы нагрузки и электромагнитные силы подпитки от АД;

величины δ_1 и δ_2 учитывают постоянные, не зависящие от времени и координаты, усилия нагрузки и электромагнитного пускового момента АД.

С целью реализации метода компенсации, введем новую переменную

$$\psi = \varphi + \varphi_0, \quad (2)$$

где φ_0 — некоторая постоянная угловая координата.

Подстановкой (2) в (1) найдем, что

$$\psi + f_1(\psi) - f_2(\psi) + \psi - \varphi_0 + \delta_1 - \delta_2 = 0, \quad (3)$$

Так как установившееся автоколебательное движение происходит по периодическому закону, то постоянное слагаемое в уравнении (3) должно равняться нулю.

Значит величина постоянного смещения (поджатия или растяжения) пружины, относительно которого и происходят автоколебания, будет равна

$$\varphi_0 = \delta_1 - \delta_2.$$

Теперь представим уравнение (3) в виде, когда слагаемые, определяющие консервативную пару, записываются слева

$$\psi + \psi = f_2(\psi) - f_1(\psi). \quad (4)$$

При полной компенсации $f_2(\psi) - f_1(\psi) = 0$ и тогда вместо уравнения (4) можно исследовать систему двух уравнений

$$\begin{cases} \psi + \psi = 0, \\ f_2(\psi) - f_1(\psi) = 0. \end{cases}$$

Эта система избыточна, поскольку для нахождения одного общего неизвестного периодического решения имеется два уравнения.

В то же время такая избыточность очень полезна при определении взаимосвязи параметров пуска АД, электропитания и нагрузки, определяющей возникновение и устойчивость предельных циклов автоколебаний.

Такая связь легко устанавливается приравнением отдельно найденных решений обоих уравнений.

Предлагаемый подход к определению на основе идеи компенсации установившегося периодического решения уравнения (1) не рекомендуется для общего применения.

Он дает хорошие результаты в случае, когда $f_1(\psi)$ и $f_2(\psi)$ являются нечетными функциями, поскольку тогда, как следует из метода гармонического баланса, невязка $\xi(t) = f_1(\psi) - f_2(\psi)$ наиболее близка к нулю. Если же дополнительно известно, что закон автоколебаний почти гармонический, то использование метода компенсации дает результаты, точно совпадающие с полученными классическими методами.

Рассмотрим, например, известное уравнение Релея, которое в принятых нами обозначениях можно записать

$$\ddot{\varphi} - \mu \dot{\varphi} + \mu \dot{\varphi}^3 + \varphi = 0, \quad (5)$$

Здесь разность функций $f_1(\varphi) - f_2(\varphi) = -\mu \dot{\varphi} + \mu \dot{\varphi}^3$ нечетная и при $\mu \leq 0,1$, как известно, закон автоколебаний почти гармонический.

Используя идею компенсации, запишем уравнение

$$-\mu \dot{\varphi} + \mu \dot{\varphi}^3 = 0,$$

и найдем периодическое решение постановкой $\varphi = \varphi_m \sin \tau$.

Корни уравнения дают:

$\varphi_{m1} = 0$ — состояние равновесия,

$\varphi_{m2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ — неустойчивый предельный цикл,

$\varphi_{m3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ — устойчивый предельный цикл.

Это точно совпадает с известными исследованиями уравнения Релея [2].

Методом компенсации был проведен анализ обобщенного уравнения автоколебательного движения АД и определены условия возникновения, устойчивости и бифуркаций автоколебаний в однофазном и трехфазном электродвигателе с упругостью на валу [3]. Результаты совпали с результатами анализа общеизвестным методом Ван дер Поля.

Преимущество используемой нами идеи компенсации при решении уравнения движения перед методом Ван дер Поля, заключается в том, что в критерийные соотношения удается ввести кроме уравнений связи параметров нагрузки, АД и его электропитания еще и начальные условия пуска, которые существенно влияют на получение устойчивого автоколебательного режима.

Литература. 1. Луковников В.И., Веплер Л.В. Исследование автоколебательного движения однофазного асинхронного электродвигателя с линейной пружинной на валу // Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого. — 2001. — N 2. — с.33-42. 2. Власов Н.П. Автоколебательная схема с однофазным асинхронным мотором // Журнал технической физики. — 1935. — Т.5, №4. — с.641-653. 3. Луковников В.И., Рудченко Ю.А. Анализ электромеханической автоколебательной системы «Асинхронный электродвигатель — упругий элемент» // Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого. — 2003. — №1. — с.61-66.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ТРН-АД С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И УПРАВЛЕНИЕМ ПО УГЛУ БЕСТОКОВОЙ ПАУЗЫ

Шваяков А.В., Белорусско - Российский университет, Могилев

В статье рассматривается анализ и моделирование нелинейной динамической системы ТРН-АД с фазовым управлением и управлением по углу бестоковой паузы тиристорами. Все характеристики рассчитаны для асинхронного двигателя 4А100L4 (номинальная мощность — 4 кВт) в математическом пакете MATLAB фирмы The Math Works Inc..

На рисунке 1 представлена разработанная в Simulink блок-схема (модель) системы ТРН-АД с фазовым управлением.

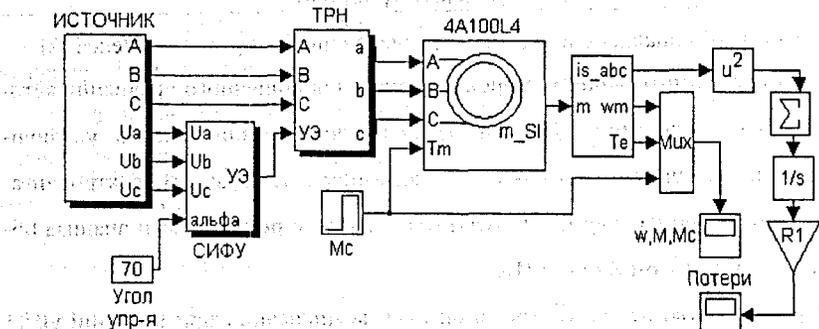


Рисунок 1. Блок-схема системы ТРН-АД с фазовым управлением.

Данная модель позволяет исследовать динамические характеристики привода по системе ТРН-АД, а так же определить потери энергии в статорной цепи двигателя за время переходного процесса.

Потери энергии в обмотках статора, за время переходного процесса определяются выражением:

$$\Delta P_1 = R_1 \cdot \int_0^{t_{\text{пр}}} (i_A^2 + i_B^2 + i_C^2) dt \quad (1)$$

где R_1 – активное сопротивление обмотки статора АД; i_A , i_B , i_C – токи фаз статора АД.

На рисунке 2 приведена блок-схема системы ТРН-АД с управлением тиристорами по углу бестоковой паузы.

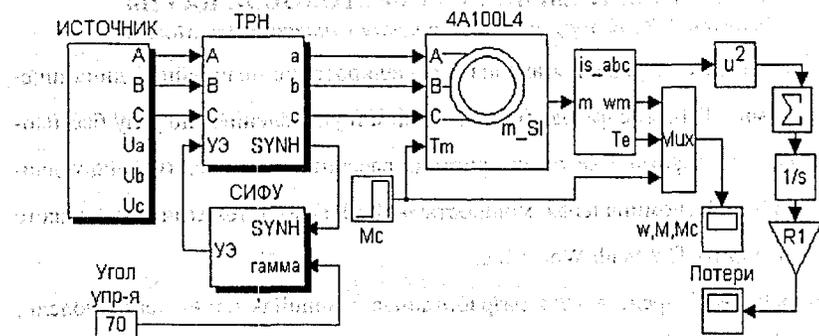


Рисунок 2. Блок-схема ТРН-АД с управлением по углу бестоковой паузы

Отличие ТРН с управлением по углу бестоковой паузы от модели ТРН с фазовым управлением состоит в способе синхронизации управляющих импульсов и в наличии в каждой фазе параллельно встречно-параллельно включенным тиристорам подсоединенного предвключенного элемента;

Использование предвключенных элементов позволяет обеспечить протекание тока в каждой фазе независимо от состояния тиристоров. Это обеспечивает непрерывную синхронизацию по току блока формирования управляющего напряжения во всех режимах работы устройства управления и исключает необходимость использования конструктивных средств для первоначального включения силовых тиристоров, и для обеспечения его работоспособности при пропуске включения очередного силового тиристора.

Пуск АД характеризуется наличием переходного момента, имеющего знакопеременный характер. Основная задача управления заключается в максимальном их ограничении. Экспоненциальный закон нарастания приложенного напряжения, в соответствии с формулой (2), позволяет добиться подавлении знакопеременных моментов, согласно [1].

$$U = U_{уст} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (2)$$

где $U_{уст}$ – установившееся значение приложенного напряжения; T – постоянная времени.

В [1] указано, что пусковые характеристики привода «ТРН-АД» при изменении угла α по закону (3) практически не отличаются от характеристик, получаемых при изменении напряжения приложенного к двигателю по закону (2) в случае равенства постоянных времени T .

$$\alpha = \alpha_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (3)$$

где α_0 – начальное значение угла открытия тиристоров ТРН; T – постоянная времени.

Что же касается ТРН с управлением по углу бестоковой паузы, то такие исследования не проводились и, следовательно, наиболее оптимальные законы изменения угла γ для пуска привода на сегодняшний день не определены.

Проведенные исследования показали, что ограничение знакопеременных переходных моментов наблюдается при изменении угла бестоковой паузы γ по линейному закону в соответствии с выражением:

$$\gamma = \gamma_0 - k \cdot \gamma_0 \quad (4)$$

где γ_0 – начальное значение угла управления; k – коэффициент наклона характеристики.

На основании разработанных моделей приводов «ТРН-АД» с различными способами синхронизации тиристоров проведен расчет динамических характеристик при пуске АД. Характеристики представлены ниже в относительных единицах. За базовые величины приняты: для скорости – скорость идеального холостого хода АД; для момента – критический момент АД; для потерь – потери энергии в статорной цепи за время прямого пуска АД.

Анализ характеристик на рисунках 3 и 5 показывает, что ограничение знакопеременных переходных моментов происходит в системе «ТРН-АД» с фазовым управлением при изменении угла α по закону (3), а в системе «ТРН-АД» с управлением тиристорами по углу бестоковой паузы при изменении угла γ по закону (4). В обоих случаях ограничение знакопеременных переходных моментов происходит без снижения быстродействия привода и с уменьшением потерь энергии в статорной цепи двигателя.

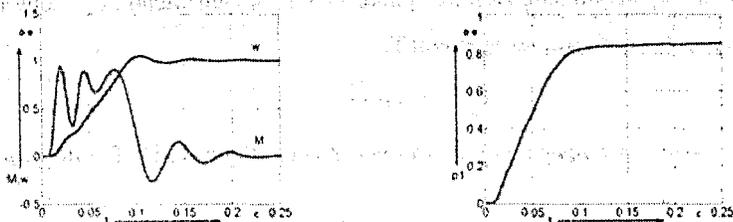


Рисунок 3. Графики переходных процессов при экспоненциальном законе изменения угла управления тиристорами α

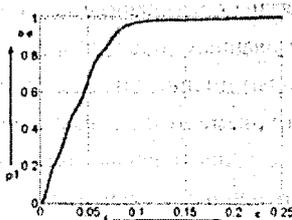
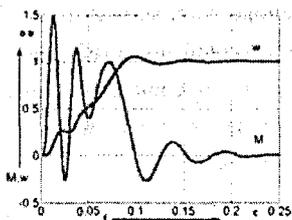


Рисунок 4. Графики переходных процессов при прямом пуске АД

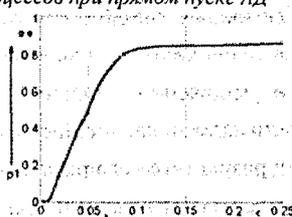
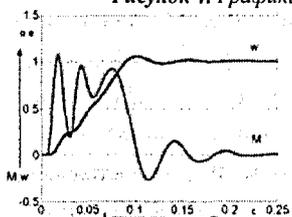


Рисунок 5. Графики переходных процессов при линейном законе изменения угла управления тиристорами γ

Литература. 1. Петров Л.П. Тиристорные преобразователи напряжения для асинхронного электропривода / Л.П. Петров, О.А. Андрищенко, В.И. Капинос и др. - М.: Энергоатомиздат, 1986.-200 с.: ил.

ИССЛЕДОВАНИЕ АМПЛИТУД ПАРЦИАЛЬНЫХ МОД РАСПРОСТРАНЕНИЯ КВ-РАДИОСИГНАЛА МЕТОДАМИ БИСПЕКТРАЛЬНОГО И КЕПСТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Щирый А.О, Марийский ГТУ, Йошкар-Ола (Россия)

Как известно, под действием постоянного магнитного поля Земли ионосфера приобретает свойства двоякопреломляющей среды. В условиях распространения коротких радиоволн это свойство проявляется в том, что одна волна с линейной поляризацией расщепляется на две – так называемые обыкновенную (O) и необыкновенную (X). Каждая составляющая при этом распространяется в ионосфере со своей групповой скоростью и отражается от различных уровней (высот) ионосферы, испытывает разное поглощение в ионосфере. Очевидно, что различно время распространения O и X лучей от передатчика к приемнику. Разность их времени группового запаздывания – $\Delta\tau$.

Описанные эффекты, т.н. магнитоионные расщепления (МИР) – не единственная причина многолучевости в диапазоне КВ. Вообще, дискретная многолучевость может быть вызвана приходом в точку приема нескольких скачковых и/или волноводных мод распространения радиосигнала. Диффузная многолуче-

вость связана с рассеянием на ионосферных неоднородностях. Однако, в каналах образованных только О и Х компонентами луча одной моды (обычно скачковой моды) именно МИР ограничивают пропускную способность канала, т.к. если при приеме лучи не разделяются (системой связи), то имеет место их интерференция, приводящая к биениям и замираниям сигнала.

Современным средством исследования модовой структуры КВ-радиосигнала является наклонный ионозонд, использующий в качестве зондирующих сигналы с линейно-частотной модуляцией (ЛЧМ). В приемнике ЛЧМ-ионозонда происходит сжатие принятого сигнала в частотной области, состоящее в его умножении на сигнал гетеродина, комплексно-сопряженный излучаемому сигналу и дальнейшему спектральному анализу сигнала разностной частоты, в результате чего разделяются дискретные моды распространения сигнала. Спектральный анализ и управление приемником осуществляется ПЭВМ со специальным программным обеспечением (ПО) [1]. Результат работы ионозонда – ионограмма, характеризующая зависимость амплитуды сигнала от частоты f и времени группового запаздывания τ . АЧХ моды находится по ионограмме по максимумам в выделенных областях, затем для удаления одиночных выбросов (вызванных, как правило, ошибкой выделения моды и помехами) подвергается медианной фильтрации (см. рис.1).

В работе использовались данные зондирования КВ - радиолиний (длина - в скобках) Н.Новгород – Йошкар-Ола (246 км), Кипр – Йошкар-Ола (2600 км), Великобритания – Йошкар-Ола (3100 км), Хабаровск – Йошкар-Ола (5700 км).

Разрешающей способности ионозонда по времени группового запаздывания (25 мксек) не всегда достаточно для разрешения (разделения) О и Х компонентов. Протяженность неразделенных участков треков (НУТ) может превышать 10 МГц. Для дальнейшего анализа выделялись НУТ. Амплитуда на НУТ испытывает замирания (рис.1) с периодом, обратным $\Delta\tau$ ($\Delta\tau \sim 1..5$ мксек).

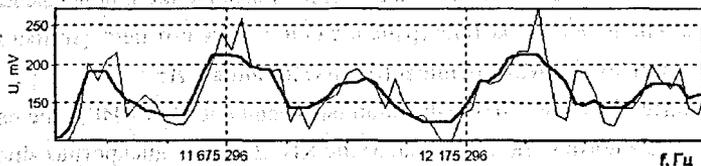


Рис.1. Фрагмент АЧХ НУТ по ионограмме Хабаровск - Йошкар-Ола, 24.11.1998, 12:25, до (тонкая линия) и после (толстая) медианной фильтрации

Если АЧХ имеет вид "хорошей" синусоиды, то период можно определить и на глаз (см. рис.1, период замираний АЧХ по этому фрагменту составляет 200-250 кГц, следовательно $\Delta\tau \sim 4...5$ мксек). Этот случай как раз соответствует биению двух лучей. Однако практика обработки экспериментальных данных показала, что такой вид "хорошей" синусоиды имеют только около 11 % фрагментов НУТ (доля этих НУТ от суммарной длины всех НУТ). И дело здесь не в помехах (задача фильтрации сосредоточенных помех, преобладающих практически на всем КВ-диапазоне над другими видами помех, при приеме непрерывного ЛЧМ-сигнала решалась в [2]). Дело в неоднородности и слоистой структуре ионосферы. Поэтому и возникла необходимость второго спектрального анализа (считая первым – спектральный анализ сигнала разностной частоты). Вместо двойного спектрального (биспектрального) анализа может использоваться кепстральный анализ: хотя в данной задаче и не требуются свойства логарифмической нелинейности, на которых основан последний, но его свойства лучше исследованы, введена терминология и др. [3].

Кепстральный анализ отличается тем, что второй спектр мощности вычисляется от логарифма первого спектра мощности. Под биспектральным анализом понимается спектр мощности спектра мощности. АЧХ (т.е. амплитудный спектр) предварительно переводится в спектр мощности.

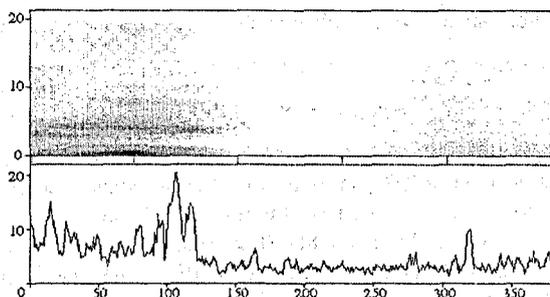


Рис.2. Развертка спектров (вверху) и АЧХ моды (внизу), р/л Кипр – Йошкар-Ола

Для повышения устойчивости обнаружения максимумов применяется следующая методика: данные (АЧХ) обрабатываются блоками равного размера, полученные кепстры выстраиваются в ряд т.о., что по вертикальной оси стоят частоты, по горизонтальной оси – номер блока (которому соответствует рабо-

чая частота), а в “высоту” (цветом) – амплитуды кепстров. Задача обнаружения максимумов в последовательности кепстров сводится к поиску протяженных “пятен” на построенной развертке кепстров. На рис.2 в качестве примера показаны развертка спектров (БПФ над АЧХ по 64 точки; цветом изображена амплитуда: черный – максимум) и АЧХ моды.

Обработка данных показала, что в кепстре наблюдаются два и даже три максимума, не считая нулевой кепстральной компоненты. Об этой нулевой кепстральной компоненте следует сказать особо: она соответствует постоянному уровню (в данном случае постоянному уровню АЧХ парциальной моды) и, согласно обработанным данным, превышает амплитуду биений в 3-10 раз. Этот вывод важен для проводимого [1] исследования свойств АЧХ, т.к. позволяет при оценочных инженерных расчетах АЧХ КВ – радиолинии считать амплитуду моды постоянной почти на всем ее протяжении.

Множество максимумов в кепстре означает, что интерферируют не два, а три или четыре луча – лучей на единицу больше чем максимумов. Интерпретация результатов о более чем двухлучевом характере биений на НУТ и их связь с ионосферными параметрами требуют дальнейших исследований.

Результаты оценки Δt между О и Х согласуются по порядку величин с результатами, полученными интерферометрическим методом [4] ранее. Правда, прямое сравнение невозможно, т. к. различна длина радиотрасс.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 02-02-16318.

Литература. 1. *Щирый А.О.* Методика и результаты исследования АЧХ многолучевой ионосферной КВ-радиолинии с использованием ЛЧМ-ионозонда // Труды 5-ой Сессии молодых учёных "Гелио- и геофизические исследования". – Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2002. – с.88-90. 2. *Щирый А.О.* Борьба с сосредоточенными помехами при приеме непрерывного ЛЧМ сигнала // Труды XII Всероссийской школы - конференции по дифракции и распространению волн. – Т.2. – М.: МФТИ, 2001. – с. 448-449. 3. *Чайлдс Д.Дж., Скиннер Д.П., Кемрейт Р.Ч.* Кепстр и его применение при обработке данных. Обзор // ТИИЭР, 1977, т.65, №10. – с. 5-23. 4. *Дробжев В.И., Куделин Г.М., Нургожин Б.И. и др.* Волновые возмущения в ионосфере. – Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1975. – 179 с.

**РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

**ORGANIZATION OF INTERACTIVITY OF A WEB-SITE BY MEANS
OF THE PROGRAMMING LANGUAGE PERL**

Denis Antonik, State University Of Grodno

The programming language Perl was created in 1986 as a tool for the administration and configuration of system resources in a network consisting of Unix-computers. Perl is deciphered as follows: "Practical Extraction and Reporting Language". Gradually Perl developed and became a language independent from the operational system.

The main advantage of the given language is that it is an interpretive language, it means that the programs in this language do not require compilation, the presence of the interpreter is necessary only. And therefore there is a number of advantages, for example, such as independence of a certain type of the system.

While developing web-sites the language Perl was applied to the spelling of CGI-scripts (CGI - Common Gateway Interface). CGI- are the applications located and carried out on the web-server.

Without the usage of the CGI-applications it is impossible to make a high-grade interactive site, which will cooperate with the user. In connection with specificity of the spelling of the CGI-application in various programming languages there can arise problem situations connected with the safety of the server. Therefore the safety of CGI is an integral part of the safety of the server.

For the organization of the site interactivity a number of the CGI-applications, were developed, such as:

- Conference;
- News manager;
- The counter of visiting;
- System of the removed administration.

To provide the safety of the site and the server as a whole in all CGI-

applications the functions of encryption are used which will not allow anybody to receive the password of the registered user or any information of him, if only the user himself has not published his data.

The conference is the section for the communication of the visitors of the site among themselves. To receive the access to the conference the user should pass registration, which includes filling in the registration form and sending of the data to the server. Further on the data sent to the server, are considered by the manager of the conference, and he adopts the final decision about the registration of the user.

After the registration the conference becomes accessible to the user. The access to the given section is carried out after granting the visitor's name and password, which he specified at filling in the registration form.

After having entered the name and the password, the user gets into the conference, where the following is accessible to him: reading of the personal messages, reading of the common messages, sending of the messages, removal of the old messages.

- The personal messages are accessible only to the given user and another user can not read them, it enables the confidential communication of a certain group of users.
- The common messages are the messages accessible for reading to all registered users, and can be deleted by the manager only.
- The sending of the messages is possible both personally to a separate user, and to all users simultaneously.
- The Removal of the messages; the user can delete only personal messages.

The manager of news, the CGI-application, allows making administration of the unit of news. For receiving the access to the manager of news as authentication (on granting the name and the password) is necessary. The data on the users, who are authorized to manage the news section are taken from the base of the administration system users, which means, that the users of the system of the site removed administration can be the users of the manager of news.

The manager of news gives the following opportunities:

- Add News (addition of news);
- Edit News (editing any already existing news);
- Del News (removal of unnecessary news);
- News Archive (transferring of out-of-date news to archive).

The counter of visiting is CGI-application, that is started at each, loading of pages, on which it is connected. The given application keeps account the visits of site pages, and also displays the total of visits on some pages.

The system of the removed administration includes various functions necessary for the maintenance of serviceability of a web-site.

Several users can be registered in the system, and for each of them the access rights can be adjusted, that is, the differentiation of access is supported. It means that there exists the restriction on the performance of various functions by the users.

In the given CGI-application there is a splitting into sections:

- Conferences administration (administration of conferences);
- File manager (shell for files management);
- UpLoad File (section for loading files from the removed computers through Internet);
- Messages (section for the exchange of the messages between the users registered in system of administration);
- Administration (section the change of personal adjustments of each user);
- Super Admin (the section accessible only to the main manager, with the help of this unit the control and management of the system of administration is carried out).

Through the given system of administration it is possible to provide for the complete removed management of all the contents of the web-site: the creation of new HTML-pages, CGI-applications, the loading of necessary files on the server and their publication in a network.

In the system of administration the methods of encryption for the organization of confidentiality of the users passwords are used.

In difference with the conference, where for the registration the user fills in the registration form, in the system of the removed administration only the main manager personally registers new users.

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБРАБОТКА РЕНТГЕНОВСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ
ПОЛУЧЕННЫХ CMOS КАМЕРОЙ***Васькович Т.А., Кольчевский Н.Н., БГУ, Минск***Введение**

Традиционные оптические способы получения изображений не нашли своего применения в рентгеновской оптике из-за сильного поглощения рентгеновского излучения веществом и слабой преломляющей способности веществ. Наиболее распространенными методами формирования изображений являются проекционные методы в основе которых лежит получение теневого изображения объекта. Для записи изображений широко применяются фотопленки и флуоресцирующие экраны. Распространенными методами улучшения изображения являются применение фотопленок высокого разрешения и введение рентгеноконтрастных веществ в исследуемый объект.

В настоящее время активно развиваются детекторы типа ПЗС (прибор с зарядовой связью) в основе работы которого лежит фотоэффект. Структура приемного чувствительного элемента представляет собой 2-х мерный набор ячеек разделенных изолирующими дорожками. Размер ячейки составляет 1 – 50 мкм. Под воздействием излучения в результате фотоэффекта ячейка способна накапливать электрический заряд, величина которого линейно зависит от интенсивности и времени действия излучения. Приборы такого типа в настоящий момент времени являются распространенным регистрирующим элементом в оптике видимого диапазона и ближней УФ и ИК области [1].

Целью настоящей работы является исследование возможности формирования рентгеновского изображения объекта проекционным методом при использовании в качестве изображающей системы CMOS камеры для видимого диапазона.

Эксперимент

В эксперименте изображение объекта формировалось проекционным методом. Схема проекционного метода показана на рис.1(а). Достоинствами такого метода получения изображений является его простота, нечувствительность к спектральному составу излучения источника и высокая яркость изображения.

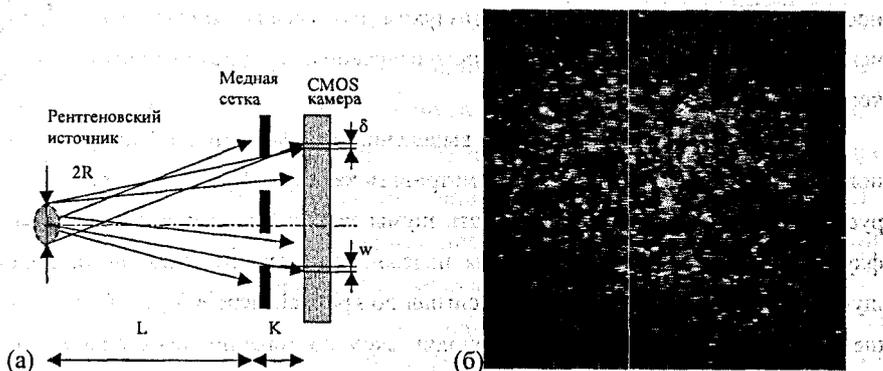


Рис.1. Схема проекционного метода (а). Изображение медной сетки, полученное CMOS камерой (б).

Установка для получения изображений в рентгеновском диапазоне содержала рентгеновский источник, объект и детектор. В качестве источника использовалась рентгеновская трубка аппарата ДРОН, материал анода Cu, энергия фотонов наиболее интенсивной характеристической линии 8 кэВ. Ускоряющее напряжение на трубке 20 кВ, ток 14 мА. В качестве объекта для получения изображения использовалась медная сетка толщиной 40 мкм и периодом 100 мкм. В качестве детектора использовалась CMOS камера Marshall V-XA076 для видимого диапазона формирующая черно-белое изображение в формате NTSC. Размер чувствительной матрицы составлял $4.95 \times 3.54 \text{ мм}^2$, количество ячеек 510×492 . Размер ячейки составлял порядка 13 мкм. Изображение в виде NTSC видеосигнала поступало на TV-tuner AverMedia и отображалось на экране компьютера в режиме реального времени. Источник располагался на расстоянии $L=70$ см от объекта, а детектор на расстоянии $K=2$ см., чтобы искажения обусловленные конечностью размеров источника δ и расходимостью пучка ω были незначительными, см. рис.1(а).

На рис.1(б) показано экспериментально полученное изображение сетки. Из рисунка видно, что изображения практически не проявляется на уровне шумов. Длительность записи кадра составляла время равно $1/24$ сек и определяется параметрами камеры. Максимальная чувствительность CMOS камеры приходится на диапазон 1-5 кэВ. Такое излучение обладает малой проникающей способ-

ностью и значительно поглощается воздухом, при увеличении жесткости излучения возрастает количество рассеянного излучения, которое приводит к потере контрастности изображения.

Определяющей является задача выделения изображения на фоне рассеянного излучения, которое можно рассматривать как шум. Кроме того, регистрируемое изображение может содержать шумы камеры, вызванные тепловыми флуктуационными колебаниями. Для надежного выделения сигнала на фоне шума требуется, чтобы измеряемый сигнал по крайней мере в 3 раза был больше среднего уровня шумов. При периодическом повторении сигнала результаты измерений можно статистически обрабатывать. Если в регистрирующей системе определяющим является "белый шум", то мощность сигнала соответствующая порогу чувствительности пропорциональна средней плотности шумов и обратно пропорциональна времени измерения [2]. Таким образом, минимальная мощность сигнала зависит от времени измерения, что говорит о возможности регистрации сигналов меньших уровня шума применяя накопительные системы при возможности повторения измерения.

На рисунке 2(а) показано изображение сетки, полученное суммированием 500 кадров аналогичных рис.1(б) в редакторе Photoshop. На рис. 2(а) можно различить ячейки сетки. Качество результирующей картинки тем выше, чем большее количество кадров просуммировано.

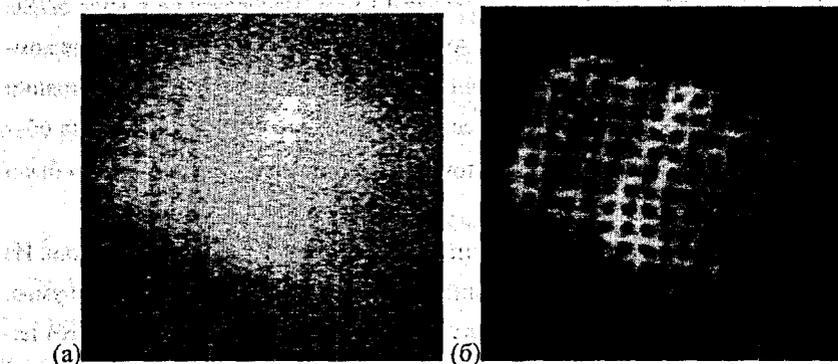


Рис.2 Изображение сетки: (а) полученное суммированием 500 кадров; (б) полученное вычитанием из (а) изображения источника.

Изображение может быть улучшено, если устранить грубые помехи и увеличить контраст изображения объекта методом вычитания из полученного изображения рис.2(а) изображения источника при отсутствии объекта - сетки, полученное с накоплением 500 кадров. Результат показан на рис.2(б). Как видно из рис.2(б) в изображении проявились детали, которые не входили в яркое пятно изображения рис.2(а), что говорит о неоднородности распределения яркости изображения на приемной матрице CMOS камеры.

Заключение

Рассмотрен проекционный метод формирования изображений в рентгеновской области с использованием в качестве детектора CMOS камеры. Показано, что при использовании метод накопления сигнала, можно получать рентгеновские изображения на фоне рассеянного излучения при неоднородной засветке объекта.

Работа выполнена при поддержке Фонда Фундаментальных Исследований (дог.Ф02М-048).

Литература. 1. *Овечкин Ю.А.*, Полупроводниковые приборы.-М., 1986.
2. *Афанасьев В.А.*, Оптические измерения.- М., 1981.

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА В ГРАФЕ

Грязев Е.В., БГТУ, Брест

Рассмотрим сеть для передачи информации. Каждый узел обладает пропускной способностью и расписанием работы. Передача информации из одного узла в другой возможна, если узлы связаны и свободны по расписанию для процесса передачи. Скорость передачи равна минимуму из пропускных возможностей. Необходимо рассчитать такой маршрут пересылки данных, чтобы время прохождения было минимально (с учетом расписания работы узлов). Усовершенствованный алгоритм расчета оптимального пути, основанный на алгоритме Дейкстры, учитывает расписание работы узлов.

Для каждой вершины будем хранить минимально возможное время поступления полного информационного пакета и номер вершины, из которой получены данные.

1. Помечаем вершину, из которой посылаем данные, нулем (информация первоначально находится в нем), и добавляем ее номер в очередь.
2. Извлекаем из очереди номер вершины и рассчитываем момент времени, к которому придет весь информационный пакет, если передача осуществляется из текущей вершины во все связанные с ней (с учетом скорости и расписания работы узлов). Возможны следующие варианты:
 - а) Смежная вершина не имеет пометки. Помечаем вершину и заносим в очередь.
 - б) Смежная вершина уже имеет метку и она меньше ожидаемого времени: Метку не изменяем. Если вершины нет в очереди, то добавляем ее.
 - в) Смежная вершина уже имеет метку и она больше ожидаемого времени: Модифицируем метку. Если вершины нет в очереди, то добавляем ее.
3. Если в очереди есть вершины, то повторяем пункт 2, иначе пункт 4.
4. Двигаясь из вершины – получателя по промежуточным вершинам (используя ссылки) к начальной получим искомым путь. Пометка вершины – получателя это искомое минимальное время.

Алгоритм реализован в среде MatLab 6.1. Он может быть полезен для оптимальной маршрутизации пакетов в сети передачи данных (например, Fido-NET).

ПОИСК КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА ГРАФАХ ПРИ УЗЛОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СТРУКТУРУ ПУТИ

Дарадкех Ю.И., Ревотюк М.П., БГУИР, г.Минск

Задача поиска кратчайших путей на графах [1] здесь рассматривается с целью построения шаблона функции полиморфного класса, где определение графа и условий перемещения транспортной на сети допускают конкретизацию в рамках технологии объектно-ориентированного программирования [2].

Пусть транспортная сеть представлена нагруженным ориентированным графом $G(M,N)$, где N и M – множества вершин и дуг графа, а каждой дуге $(i,j) \in M$, $i,j \in N$, соответствует положительное вещественное число $w(i,j)$, назы-

ваемое длиной дуги. Обозначим для любой дуги $(i,j) \in M$ множество допустимых вершин для развития путей из вершины j через $cont(i,j)$. Очевидно, что $cont(i,j) \in \{k | w(j,k) \geq \emptyset\}$, а в случае отсутствия ограничений на выбор пути после прохождения дуги $(i,j) - cont(i,j) = \{k | w(j,k) \geq \emptyset\}$, $i, j, k \in N$, $(i,j) \in M$.

Требуется найти, если существует, на множестве вершин $\{s(0)=s, s(1) \in cont(s,s), s(2) \in cont(s(0), s(1)), \dots, s(i) \in cont(s(i-2), s(i-1)), \dots, t\}$ кратчайший путь от вершины s к вершине t , где $s, t \in N$.

Покажем, что искомый алгоритм может быть построен путем целенаправленной модификации алгоритма Дейкстры [1], что обосновано [3].

Рассмотрим часто встречающийся на практике случай узловых ограничений, когда для всех $s \in N$ $cont(i,j) = cont(prec(j), j)$, $(i,j) \in M$, т.е. альтернативы перемещения из любой вершины графа сети определены только входящими в эту вершину дугами кратчайшего пути в вершину j (здесь $prec(j)$ – номер начальной вершины дуги кратчайшего пути в вершину j). Такой случай удобно представить введением локальной относительно отдельных вершин раскраски дуг.

Раскрасим разными красками каждую входную дугу отдельных вершин графа. Пометим выходные дуги, доступные для продолжения пути, цветом входной дуги. В результате выходные дуги получают композиционную окраску. Количество различных красок на отдельной выходной дуге не превышает количества входных дуг соответствующей вершины графа. При построении дерева кратчайших путей необходимо будет выбирать из множества выходных дуг только дуги, содержащие пометку с цветом зафиксированной входной дуги.

Обозначим для каждой вершины $x \in N$ множество входных вершин $x = \{i | w(i,x) \geq \emptyset\}$ и пусть максимальное значение полустепени захода $C = \max\{|x|, i \in N\}$. Для кодирования раскраски дуг графа можно использовать отображение цветов дуг на характеристические двоичные векторы размерностью C .

Каждая дуга (i,j) как элемент возможного пути является выходной для вершины i и входной для вершины j , поэтому для характеристики раскраски

потребуется $B(i,j)$ – вектор раскраски относительно входа в вершину j и $B'(i,j)$ – вектор раскраски этой дуги относительно выхода из вершины i .

Пусть для некоторой вершины $x \in N$ $x' = \{i(1), i(2), \dots, i(j)\}$, где $j \in C$. Тогда компоненты вектора $B(i(k), x) = \{b(i(k), x, m), m = \overline{1, C}\}$, определяются выражением $b(i(k), x, m) = (k=m) \& (m \notin C), m = \overline{1, C}, i(k) \in x$.

После проведения раскраски всех дуг графа относительно входа в вершину возможно определение раскраски выходных дуг каждой вершины. Обозначим для каждой вершины $x \in N$ множество выходных вершин $x' = \{i | w(x, i) \geq \Delta\}$ и пусть для некоторой вершины $x' = \{j(1), j(2), \dots, j(m)\}$ (в общем случае возможно выполнение условия $m > C$).

Для каждой дуги $(x, j(k))$ выделим подмножество $I(k) \in x'$ вершин, из которых разрешено построение участков пути $(i, x, j(k))$, $k = \overline{1, m}, x \in N$. отображение множества $I(k)$ на вектор $B'(x, j(k)) = \{b'(x, j(k), m), m = \overline{1, C}\}$, задается выражением $b'(x, j(k), m) = \cup \{b(j, x, m), j \in I(k)\}, m = \overline{1, C}, j(k) \in x'$.

В итоге получаем описание узловых ограничений на структуру путей на графе $G(N, M)$ в виде $con(i, j) = \{k | (w(j, k) \geq \Delta) \& B'(j, k) \& B(j, k)\}, (i, j) \in M$.

Очевидно, что требуемая для кодирования раскраски память оценивается величиной $2C|M|$, что хорошо согласуется с экономным способом представления графов в виде списка смежности вершин. Если учесть дискретность процесса построения дерева путей, то каждому листу текущего дерева на разных этапах построения дерева соответствует единственный цвет дуги. Пусть $\{clr(i, j), i = \overline{1, |N|}, j = \overline{1, C}\}$ – множество двоичных векторов, элементы которого отражают цвет дуг, по которой достигнуты вершины текущего дерева. На исходном шаге построения дерева из вершины s положим $clr(s, j) = 1$, а на всех других шагах при включении в дерево дуги $(v, i) - clr(i, j) = b(v, i, j), j = \overline{1, C}$. Тогда для развития дерева путей вместо $B(i, k)$ можно использовать значение $\{clr(k, j), j = \overline{1, C}\}$, что обеспечивает возможность работы только с выходными дугами вершины k и ассоциированными с ними в списке смежности значениями $B'(k, j)$

и $w(k,j), j \in k$. Таким образом, введение отображения раскраски листьев текущего дерева на множество $\{clr(\cdot)\}$ позволяет воспользоваться преимуществами спискового представления как графа $G(N,M)$ [1], так и ограничений $\{con(\cdot)\}$.

Перейдем, наконец, к рассмотрению алгоритма построения дерева кратчайших путей при узловых ограничениях на структуру пути.

Шаг 1. Пусть задан граф $G(N,M)$, описание узловых ограничений на множествах $\{B'(i,j)\}, \{B(i,j)\}, (i,j) \in M$, номер исходной вершины $s \in N$. Зарезервируем память для комплектов $\{R(i)\}, \{clr(i,\cdot)\}, i = \overline{1, |N|}$.

Шаг 2. Положим $R(s)=0, R(i) = \infty, i=1,2,\dots, s-1, s+1,\dots, |M|, prec(s)=s, N'=\{s\}, clr(s,j)=1, j=\overline{1, C}$.

Шаг 3. Если $N'=\emptyset$, то построение дерева кратчайших путей завершено и его полностью характеризуют комплекты $\{R(\cdot)\}, \{prec(\cdot)\}$.

Шаг 4. Пусть вершина $v = \operatorname{argmin}\{R(i), i \in N'\}$ имеет направленные дуги к вершинам из множества $v' = \{j(k), k = \overline{1, m(v)}\}$. Кратчайший путь (s,v) уже известен, поэтому положим $N' := N' \setminus \{v\}, m=0$.

Шаг 5. Если все выходные дуги вершины v просмотрены, т.е. $m=m(v)$, то возврат к шагу 3, иначе — $m:=m+1$.

Шаг 6. Если дуга $(m,j(m))$ не может быть продолжением пути из вершины v , т.е. $\cup \{clr(v,i) \cap b(v,j(m),i), i = \overline{1, C}\} = \emptyset$, то возврат к шагу 5.

Шаг 7. Длина пути $(s,j(m))$ через вершину v : $r=R(v)+w(v,j(m))$.

Шаг 8. Если $R(j(m)) < r$, то возврат к шагу 5, так как найденный ранее путь в вершину $j(m)$ предпочтительнее.

Шаг 9. Если $R(j(m)) = \infty$ то $N' := N' \cup \{j(m)\}$.

Шаг 10. Фиксация описания нового пути в вершину $j(m)$:

$$R(j(m))=r, prec(j(m))=v; clr(j(m),j)=b(v,j(m)), j=\overline{1, C}.$$

Шаг 11. Возврат к шагу 5 для продолжения ветвления дерева путей.

Таким образом, схема порождения дерева кратчайших путей с учетом ограничений на их структуру подобна схеме безусловной оптимизации, реализуемой в алгоритме Дейкстры [1]. Очевидно, что вычислительная сложность

представленного алгоритма строго не хуже варианта безусловной оптимизации, для которого оценка сложности – $O(|M|^2)$ [1,3].

Литература. 1. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 455 с. 2. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влассидес Дж. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. – СПб.: Питер, 2001. – 386 с. 3. Ревотюк М.П. Поиск кратчайших путей со структурными ограничениями на графах неоднородных транспортных сетей. – Мн.: МРТИ, 1990. – 16 с. – Деп. в ВИНТИ 08.06.90, № 3244-В90.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕЙВЛЕТОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕДИЦИНСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Дубровина О.В., БНТУ, Минск

Вейвлет-преобразования (непрерывное и дискретное) находят широкое применение в различных научных и прикладных исследованиях. Данное направление оформилось как отдельная математическая дисциплина в середине 80-х годов XX века (см., например, [2, 5]). Одно из перспективных направлений использования вейвлет-преобразований – обработка различного рода сигналов, содержащих медицинскую информацию (см. [1]).

Целью данной работы является разработка методики применения непрерывного и дискретного вейвлет-преобразования при исследовании звуковых сигналов, полученных при кардиотокографии (см., например, [3]). Для этого необходимо ввести интегральное вейвлет-преобразование, рассмотреть различные возможности выбора вейвлетов и только затем перейти к обработке сигналов на практике моделируется непрерывной кривой, хотя, как правило, заключенная в нем информация носит дискретный характер. Поэтому необходимо дискретизировать как сигнал, так и преобразование. Предлагается процедура дискретизации, позволяющая в дальнейшем использовать стандартные программные средства.

Приведем формальные определения. Пусть $x(t) \in L_2(R)$ – некоторая функция, в дальнейшем называемая сигналом. Интегральным вейвлет-преобразованием сигнала $x(t)$ называется преобразование вида

$$W_w(a, b)(x) = w(a) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$; ψ — произвольная функция из $L_2(\mathbb{R})$, называемая вейвлетом и удовлетворяющая дополнительным условиям:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty,$$

где $\tilde{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i(2\pi f)t} dt$ — преобразование Фурье функции $\psi(t)$,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < 0.$$

В приложениях достаточно часто употребляется вейвлет Хаара

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & t < 0, t \geq 1, \end{cases}$$

который позволяет идентифицировать угловые точки не-

прерывного сигнала и хорошо приспособлен для исследования сигналов с компактным носителем. Следует отметить также важный в теоретическом отноше-

нии комплексный вейвлет Морле $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{2\pi i f_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $f_0 \gg 0$, который позволяет раскладывать по частотным диапазонам сигналы, содержащие затухающие колебания.

Возможность перехода от интегрального вейвлет-преобразования к дискретному вейвлет-преобразованию была обнаружена И. Мейером [4]. Он также указал условия на вейвлет, при котором интегральное вейвлет-преобразование можно заменить дискретным, задав некоторый базис в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Обсудим данную возможность на примере некоторого сигнала медицинской природы. Пусть исходный сигнал представлен графически непрерывной кривой конечной длины (рис. 1).

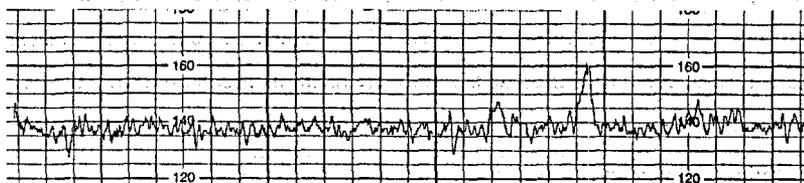


Рис. 1

Заметим, что в действительности прибор снимает показания в конечном числе моментов времени (другими словами, на некотором наборе точек). Это обуславливает необходимость перехода от непрерывного сигнала к дискретному.

Предлагается следующий алгоритм обработки сигнала:

Определяем длину сигнала, т.е. временной интервал, на котором информация о процессе является достоверной (или, по крайней мере, приближает достоверную).

Определение длины сигнала необходимо для задания дискретной шкалы и в дальнейшем длина может быть скорректирована как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения.

Определяем характерные точки кривой. Данный процесс называется оцифровкой графического представления сигнала и он состоит в снятии координат некоторых точек на кривой.

Поскольку моменты снятия показаний прибором, вообще говоря, не известны, то в качестве характерных точек берут точки локальных максимумов и минимумов на кривой.

Определяем единицу временной шкалы. Для применения стандартных программных средств необходимо, чтобы дискретный сигнал имел вид одномерного временного ряда, т.е. соседние данные находились на одинаковом расстоянии. При необходимости точки могут быть перемещены на некоторое расстояние.

Вводим диадическую шкалу. Стандартные алгоритмы работают с сигналами, содержащими точки в количестве, кратном степени двойки. На этом мы должны таким образом либо добавить, либо отбросить некоторое количество точек, с тем, чтобы указанное выше условие было выполнено. Это достигается применением полиномиальной интерполяции во внутренних диапазонах или экстраполяцией вне сигнала.

Раскладываем диадический сигнал по частотным интервалам. Данная процедура осуществляется с помощью стандартного приложения Wavelet Toolbox математического пакета MATLAB. Ниже представлены разложения сигнала, изображенного на рис. 1 в соответствующих частотных интервалах.

Переход от всех частот к некоторому набору частотных интервалов позволяет удалить сторонний “шум” в сигнале и восстановить характерные особенности сигнала, соответствующие исходному процессу.

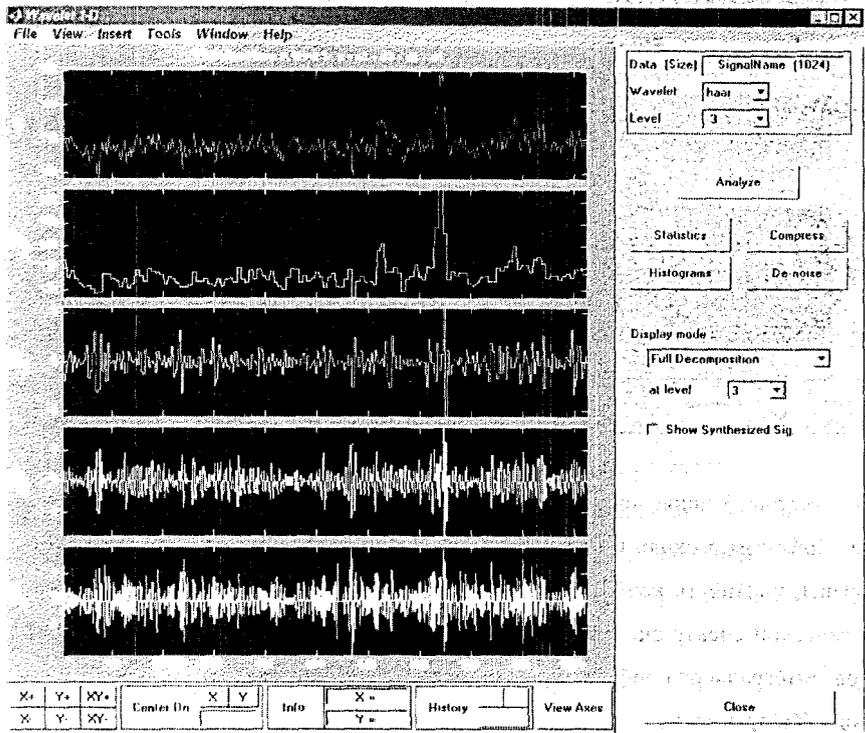


Рис. 2

На рис. 2 приведен анализ сигнала, изображенного на рис. 1, с помощью вейвлета Хаара. Декомпозиция сигнала представлена грубой аппроксимацией на третьем уровне коэффициентов a_3 , а также тремя детальными разложениями на уровнях коэффициентов d_1 , d_2 и d_3 .

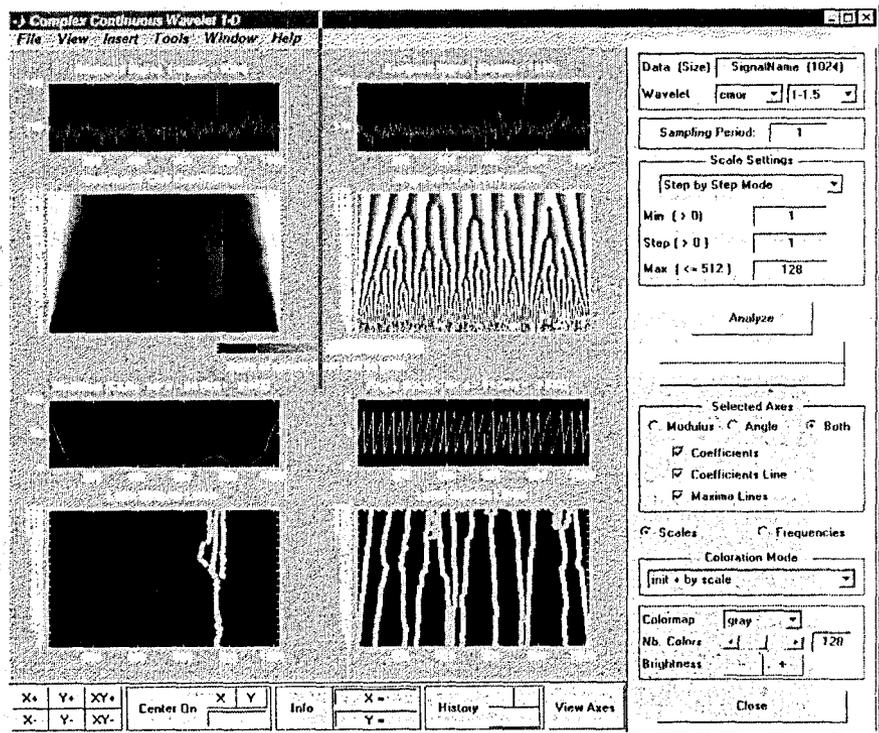


Рис. 3

На рис. 3 приведен анализ сигнала на основе комплексного вейвлета Морле. При этом в окнах в порядке их следования сверху вниз представлены сам сигнал, плотность коэффициентов дискретного вейвлет-преобразования, энергетический спектр сигнала для выбранной частоты (шкалы) и линии максимумов интегрального вейвлет-преобразования, соответственно для комплексного модуля и аргумента.

Литература. 1. Addison P.S. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*. Bristol, IoP Publ. 2002. 2. Grossmann A. and Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* 15 (1984), 723-736. 3. Hutson J.M., Petrie R.H. Possible limitations of fetal monitoring. *Clinical Obstet Gynecol.* 29, №1(1986). 104-113. 4. Meyer Y. Principe d'incertitude, bases on Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, *Séminaire Bourbaki* 662 (1985-1986). 5. Чуи К. *Введение в вейвлеты*. М., Мир. 2001.

СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ ВЫБОРА ПОЛИГРАФИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Киришченко П. В., БГТУ, Минск

В современных условиях функционирования предприятий очень важна правильно выбранная инновационная и инвестиционная тактика. В отношении полиграфических предприятий необходимо отметить такие особенности, как: большой ассортимент издательско-полиграфической техники, многообразие задач, многовариантность поиска, недостаток специалистов, способных квалифицированно подобрать наилучшую технологию и технику.

Важной задачей при проектировании нового и реконструкции существующего полиграфического производства является выбор такого оборудования, которое отвечает современным требованиям качества печатной продукции, производительности, рентабельности процессов. Необходимо, чтобы технологический процесс обеспечивал минимальные затраты труда и материалов, оптимальные режимы обработки полуфабрикатов, высокие показатели качества изданий.

Для быстрого анализа разнообразных вариантов, поиска необходимой информации и решения конкретных проблем полиграфии целесообразно применять компьютер и введенные в него соответствующие программы. Одним из таких направлений являются экспертные системы. Экспертные системы составляют часть систем искусственного интеллекта. Экспертные системы обычно определяют как программы ЭВМ, моделирующие действия эксперта-человека при решении задач в узкой предметной области, на основе накопленных знаний, составляющих базу знаний.

Экспертная система обрабатывает символическое представление реальности с помощью эвристических правил, обычно с помощью метода обратной цепочки. В этом методе консультация начинается с определения конкретной цели или конечного результата.

Правило состоит из двух частей: предпосылки и заключения. Как предпосылка, так и заключение являются фактами базы знаний, выраженными парами

“объект—значение”. На данный момент на кафедре полиграфии БГТУ ведется разработка экспертной системы для решения следующих задач: определение типов полиграфической продукции по виду изделий, подбор технологии для изготовления определенного вида продукции, подбор оборудования для производства продукции по выбранной технологии, расчет себестоимости по видам продукции, расчет эффективности использования выбранной технологии.

Экспертная система предназначена для проектирования полиграфических и издательских технологий. Данная система позволяет получить экспертные оценки типов полиграфической продукции и технологических процессов ее изготовления, а также рекомендации по подбору оборудования для реализации выбранной технологии. Система помогает выбирать оптимальные схемы технологического процесса в зависимости от вида изделий.

При проведении экспертизы по определению технологии система исходит из конкретных условий заказчика. При этом учитывается вид изделия и тип полиграфической продукции.

Ключевой информацией при подборе оборудования является наименование технологической операции, для реализации которой его выбирают. На выходе экспертизы система сообщает вид оборудования и его характеристики, стоимость, фирму или предприятие—изготовитель, продавца и телефон, срок окупаемости.

Прямое назначение экспертной системы состоит в обработке больших массивов информации, выборе оптимальных проектных решений при создании новых и реконструкции существующих полиграфических производств и, в первую очередь, обосновании экономической целесообразности выбранной технологии и оборудования по технико-экономическим показателям. Разработка и совершенствование экспертных систем и систем оценки в области полиграфических технологий позволят на новом качественном уровне подойти к организации производственного процесса в полиграфии.

СИСТЕМА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СИНТЕЗА КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Культиясов С.Ю., ГТТУ, Гомель

Современная научная и инженерная деятельность акцентирует большое внимание на развитие и внедрение автоматизированных систем синтеза различных технических устройств. Как правило, подобные системы, обладают функциями выбора структуры объекта, определения его параметров и исследования полученной модели объекта на оптимальность.

Этап структурного синтеза технических объектов включает в себя элементы технического творчества, которые недостаточно хорошо поддаются формализации, поэтому при создании компьютерных систем синтеза структуры возникает необходимость в разработке формальных методов и подходов с применением теории искусственного интеллекта и экспертных систем.

Компьютерное моделирование технических объектов позволяет в сжатые сроки с достаточно большой точностью провести исследование практически любой технической системы, установить “работоспособные” параметры, режимы работы, надежность и долговечность системы. Следует отметить, что данный метод исследования технических систем отличается относительно низкой себестоимостью. Наиболее качественным и доступным программным инструментом для исследования математических моделей технических объектов являются системы компьютерной математики – MathCad, Maple, Matlab.

Система автоматизированного синтеза кулачковых механизмов включает следующие компоненты: блок синтеза структуры кулачкового механизма, блок расчета и оптимизации параметров механизма выбранной структуры, блок создания чертежа кулачкового механизма. Кулачковые механизмы выбраны в качестве объекта автоматизации не случайно: в настоящее время они получили большое распространение как управляющие механизмы, так как позволяют с достаточной степенью точностью реализовать закон движения входного звена.

Для разработки информационного обеспечения системы была выполнена классификация кулачковых механизмов по следующим направлениям:

- по типу кулачка (плоский, пространственный);
- по типу выходного звена (с коромыслом, с толкателем);
- по типу толкателя (игольчатый, роликовый, плоский);
- по типу замыкания (силовое, геометрическое);
- по типу закона движения выходного звена (с жестким, мягким ударом, безударный).

Процесс проектирования кулачкового механизма в системе проводится по следующему алгоритму:

1. В блоке синтеза структуры после ввода исходных условий выполняется
 - выбор схемы кулачкового механизма;
 - выбор закона движения выходного звена.
2. В блоке расчета и оптимизации параметров выполняется
 - определение минимального радиуса кулачка, исходя из условия допустимого угла давления;
 - определение профиля кулачка по заданному закону перемещения выходного звена.
3. В блоке создания чертежа выполняется чертеж центрального профиля кулачка по рассчитанным параметрам.

На настоящем этапе разработки системы полностью реализован блок расчета и оптимизации параметров кулачка в системе MathCad. Для этого блока постановка задачи имеет вид: задан закон изменения аналога ускорения толкателя в функции угла поворота кулачка φ , допустимый угол давления $\vartheta_{\text{доп}}$, фазовые углы, угловая скорость кулачка ω . Требуется определить аналитическую функцию, описывающую центральный профиль кулачка в декартовой системе координат и оптимизировать результат.

Для решения поставленной задачи используются стандартные функции системы MathCad: численное интегрирование и дифференцирование, решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты, элементы про-

граммирования. Решается задача оптимизации при помощи стандартной функции minimize для получения кулачка с минимальными габаритами без потери функциональности. В результате получена оптимизированная аналитическая функция, описывающая центровой профиль различных видов кулачковых механизмов.

Блок структурного синтеза находится в стадии разработки, в качестве программной среды для его реализации выбрана система Delphi.

Пользователями системы могут выступать как студенты старших курсов технических ВУЗов, так и инженеры-проектировщики. Удобный графический интерфейс, справочная система позволят каждому из них получить нужные результаты, корректно решая поставленную задачу в доступной и понятной для него форме, не требующей чрезмерных знаний математической специфики.

НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТЯХ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ИНДЕКСИРОВАНИЯ ДОКУМЕНТОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО КАТАЛОГА БИБЛИОТЕКИ

Ливенцева С. П., Пензенский государственный университет, Россия

Индексирование документов, то есть систематизация и предметизация изданий и их составных частей, является одной из наиболее важных и достаточно сложных задач библиотечной обработки изданий, поступающих в библиотечные фонды. Именно полнота и точность индексирования во многом определяют эффективность работы читателей с библиотечными каталогами, а следовательно, и степень удовлетворения читательских запросов.

В настоящем докладе приведены некоторые результаты анализа структурных и качественных изменений, которые происходят в решении этой задачи при внедрении автоматизированных библиотечно-информационных систем (АБИС), оценивается их влияние на качество индексирования и даются некоторые рекомендации, направленные на более полное и всестороннее описание документов (в том числе по раскрытию содержания издания или статьи), что, в конечном счете, способствует повышению эффективности работы пользователей с электронными каталогами (ЭК) библиотеки, в том числе и в режиме он-

лайнного доступа к ЭК по сетям Интернет/Инtranет.

Краткая характеристика традиционной схемы индексирования документов в библиотеке

В настоящее время в научных и учебных библиотеках, как правило, используют три методики индексирования изданий и их составных частей (ниже – документов):

1) систематизацию документа – определение классификационного индекса документа в соответствии с его содержанием по таблицам определенной системы библиотечно-библиографической классификации [ГОСТ 7.26 - 80];

2) предметизацию документа – определение предметной рубрики для документа в соответствии с его содержанием [ГОСТ 7.26 - 80];

3) координатное индексирование документа – перечисление ключевых слов или дескрипторов, раскрывающих содержание документа [ГОСТ 7.27-80].

Ключевым этапом решения задачи индексирования является анализ документа, оценка его содержания и составление поискового образа документа (ПОД) в вербальной форме, в виде словесного классификационного решения, включающего выделенные систематизатором классификационные признаки. Именно на этом этапе закладывается основа для обеспечения качества индексирования издания или его составной части, решается проблема неизбежного компромисса между стремлением обеспечить максимальную полноту описания и при этом свести к минимуму уровень "информационного шума". Естественно, что на этом этапе решающую роль играет профессионализм систематизатора, его знания и опыт работы с документами, относящимися к конкретной предметно-тематической области.

На втором этапе вербальный ПОД "переводится" на формализованный информационно-поисковый язык (ИПЯ) и составляется классификационная формула в виде строго оформленной совокупности классификационных индексов. При этом наиболее существенную роль играют следующие факторы:

1) качество используемого понятийного аппарата тех отраслей знания

(конкретных наук), которые отражены в библиотечном фонде и в справочно-поисковом аппарате (СПА) конкретной библиотеки;

2) качество информационно-поисковых языков (ИПЯ), которые используются в библиотеке при индексировании поступающих документов и при поиске документов в каталогах;

3) функциональные возможности и качество информационно-поисковых систем (ИПС), предоставляемых библиотекарям и читателям для работы с каталогами.

Большое внимание уделялось постоянному совершенствованию систематических систем классификации, в том числе двум базовым системам:

- "Универсальной десятичной (децимальной) классификации" (УДК);
- "Библиотечно-библиографической классификации" (ББК).

Не вдаваясь в детальное сравнение этих систем, можно отметить лишь некоторые, наиболее принципиальные их особенности.

УДК как международная и универсальная система классификации находит широкое применение во всем мире, в том числе:

- в документоведческой, информационной и библиотечной работе;
- в систематических каталогах библиотек и в расстановке библиотечных фондов;
- как основа ИПЯ в автоматизированных библиотечных системах.

Особую привлекательность системе УДК придает принцип детализации разделов, основанный на использовании арабских цифр, который прост и понятен для читателей любой страны.

Одним из основных инструментов, который используется систематизатором при отборе классификационных индексов, является алфавитно-предметный указатель (АПУ) к соответствующей системе классификации (к таблицам УДК и ББК, к Рубриктору).

Необходимо подчеркнуть, что АПУ, которые являются обязательными составными частями любой системы классификации, по своему назначению

принципиально отличаются от других разделов этой системы, в том числе от ее основных таблиц. Если в основных таблицах все рубрики расположены в систематическом порядке, отражающем классификацию соответствующих наук (отраслей знания) и/или объектов, то в АПУ все понятия расположены по алфавиту их предметов, причем под наименованием каждого базового предмета собираются все индексы, под которыми это понятие отражено в основных таблицах.

Говоря об АПУ как об основном инструменте предметизации, необходимо подчеркнуть следующие особенности их применения в библиотеках:

а) в сводных ("гнездовых") рубриках АПУ сводятся воедино те понятия, которые в основных таблицах разнесены по разным разделам (в этом удобство АПУ);

б) в АПУ под каждым "предметом" собираются его отраслевые аспекты и отражаются межотраслевые связи, однако не приводятся связи соподчинения понятий;

в) для легкости поиска в АПУ многие понятия отражаются и в прямой, и в инверсированной форме, поэтому количество рубрик в АПУ, как правило, значительно превышает количество рубрик (индексов) в основных таблицах.

Как общий вывод, необходимо подчеркнуть, что при всех достоинствах АПУ функции указателя – чисто справочные, ибо это средство быстрого поиска рубрики, а не готового индекса (как правило, в АПУ отсутствуют методические указания, которые приведены в основных таблицах).

ЭЛЕКТРОННАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ЭФФЕКТАМ

Поплетеев А. М., Ильющонок Б. А., Макарова Е. В., Ретич М. В., БГУ, Минск

Роль информационных технологий в учебном процессе в настоящее время значительно возросла. Это обусловлено увеличением количества компьютеров в учебных учреждениях и повсеместным распространением глобальных и локальных сетей. Традиционные источники информации (книги, справочники), имеют ряд недостатков, к числу которых относятся: сложность поиска данных,

большой промежуток времени между выходами новых изданий, ограниченность тиража, довольно высокая стоимость.

Использование сети Интернет позволяет перевести учебный процесс на качественно новый уровень. Сетевые системы делают обучение более удобным и гибким, т.к. они могут быть использованы где и когда угодно. Многие люди обращаются к дистанционному обучению, чтобы поддержать и развить свои профессиональные навыки [1].

Интернет-системы предоставили преподавателям возможность внедрить современные технологии в свои курсы. Существуют примеры применения сетевых систем обучения в области механики и электроники [2–3].

Однако, и интернет-системы не лишены определенных недостатков. К последним относятся: сложность выделения нужной информации среди результатов поиска, различия в качестве изложения материала. Кроме того, информация, относящаяся к одному разделу науки, может быть расположена на разных сайтах, что усложняет ее систематизацию и понимание.

При разработке справочной системы “Физические эффекты” основное внимание направлено на решение перечисленных проблем. Данное приложение содержит систематизированную информацию о наиболее важных и изученных физических эффектах. Доступ к системе возможен по сетям Intranet/Internet, что обеспечивает возможность одновременного получения и обсуждения информации широкой аудиторией пользователей. Это значительно расширяет возможности верификации и оперативного обновления информации. Посетители могут оставить свои отзывы о размещенных в справочнике эффектах, тем самым оказывая помощь в улучшении содержания и качества изложения материала.

Система включает в себя базу данных и интерфейс для удаленного доступа преподавателей и студентов. Информация упорядочена по разделам, образующим многоуровневую иерархическую структуру.

Каждая справочная статья содержит: название, описание эффекта, ссылки

на литературу, набор ключевых слов для поиска, информацию о преподавателе, разместившем ее, дату последнего обновления, ссылки на другие статьи, содержащиеся в справочнике.

Текстовая часть статьи хранится в формате HTML, что предоставляет авторам широкие возможности форматирования текста, для отображения информации оптимальным образом.

Система поддерживает возможность присоединения к статье файлов. Преподаватель может загружать не только текст, но и любые типы файлов. Ссылки на присоединенные файлы можно располагать прямо в тексте статьи, что дает возможность отображать отформатированный текст с внедренными изображениями; аудио- и видеофрагментами, и значительно улучшает восприятие материала.

Важной функцией системы является поддержка пользовательских отзывов. Любой зарегистрированный пользователь может оставить свой отзыв о статье и/или посмотреть отзывы других пользователей. Это могут быть вопросы, ответы, предложения или что-либо другое. Отзывы позволяют организовать обсуждение статьи и способствуют дальнейшему улучшению материала.

Встроенная система поиска позволяет найти нужный эффект по названию, по ключевым словам или по автору.

Ключевые слова статей, содержащихся в системе, объединены в глоссарии. Каждое слово является гиперссылкой на соответствующие статьи справочника, что упрощает поиск нужного явления. Таким образом, нужная информация может быть найдена всего за два щелчка мышью: первым выбирается ключевое слово, затем – нужная статья.

Интерфейс предоставляет пользователям следующие возможности:

- регистрация в системе;
- восстановление забытого пароля;
- просмотр информации об эффектах;
- просмотр/добавление/удаление отзывов о статьях;

- поиск по глоссарию, ключевым словам или специальным признакам;
- добавление/изменение/удаление статей и разделов;
- администрирование пользователей.

В системе существуют следующие группы пользователей, обладающих различными правами.

- Гость (незарегистрированный пользователь системы). Он имеет возможность зарегистрироваться, войти в систему.
- Студент (зарегистрированный пользователь системы). Имеет возможность изменения регистрационных данных, просмотра информации об эффектах, поиска по ключевым словам.
- Преподаватель (зарегистрированный пользователь системы). Имеет возможность добавления новых данных в выбранный раздел, редактирования уже существующих, добавления слов в глоссарий.
- Администратор. Осуществляет управление пользователями и регистрацию новых преподавателей. Может добавлять/изменять/удалять разделы и данные из справочника.

Система была спроектирована в среде Rational Rose 2000 с использованием методологии Rational Unified Process и современных объектно-ориентированных технологий. Для реализации использованы современные Java-технологии, такие как: Java Servlets 2.3 и Java Server Pages 1.2. Структура базы данных была создана в ErWin 4.0; в качестве СУБД используется MySQL 3.23. Применение данных средств разработки обеспечивает простоту переносимости на компьютеры с различными операционными системами, а также сокращает время установки и запуска системы.

Для использования данной системы достаточно обычного интернет-браузера, который имеется на каждом современном компьютере (Например, Internet Explorer, Netscape или Opera).

Система предназначена для учащихся школ и лицеев, студентов и преподавателей. Она может быть использована в качестве учебного пособия, для сопровождения практических занятий и лабораторного практикума, а также для общепознавательных целей.

Литература. 1. S. Kariya. Online Education Expands and Evolves. IEEE Spectrum, May 2003, P. 49-51. 2. M. Khalifa, R. Lam. Web-Based Learning: Effects on Learning Process and Outcome // IEEE Transactions on Education, Vol. 45, No 4, No, 2002. P. 350-356. 3. Han-Pang Huang, Chiou-Hwa Lu. Java-Based Distance Learning Environment for Electronic Instruments //IEEE Transactions on Education, Vol. 46, No 1, 2003. P. 88-94.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА РАСЧЕТА СУММАРНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОБРАБОТКИ (АСРСПО "ЕХАСТ-1")

Пуденкова В.А., ГГТУ, г. Гомель

Необходимость разработки алгоритма и программы для автоматизации расчета суммарной погрешности обработки появилась, потому что традиционный поиск справочно-нормативных данных замедляет технологическую подготовку производства, повышает вероятность случайных ошибок при расчете величин использующих таблицы, заставляет выполнять много рутинной и однообразной работы.

Проанализировав предметную область расчета суммарной погрешности обработки [1, с.119-170], был разработан алгоритм автоматизации поиска суммарной погрешности обработки.

Для программной реализации алгоритма на ЭВМ была использована система проектирования Delphi, которая предназначена для разработки программ и имеет две характерные особенности: создаваемые с ее помощью программы могут работать не только под управлением Windows, а сама она относится к классу инструментальных средств ускоренной разработки программ (Rapid Application Development, RAD). Это ускорение достигается за счет двух характерных свойств Delphi: визуального конструирования форм и широкого использования библиотеки визуальных компонентов (Visual Component Library, VCL). Использование компонентов не только во много раз сокращает сроки разработки программ, но и существенно снижает вероятность случайных программных ошибок, от которых не защищен ни один крупный программный проект. В качестве средства для создания баз данных была выбрана утилита Database Desktop, входящая в поставку Delphi. Применение этой утилиты позволяет соз-

давать таблицы в интерактивном режиме и сразу же просмотреть их содержание - и все это для большого числа форматов.

Автоматизированная система расчета суммарной погрешности обработки "ЕХАСТ-1" состоит из самого расчета, а также из просмотра, обновления и пополнения баз данных по погрешностям обработки

Расчет суммарной погрешности обработки можно разделить на четыре части:

- поиск погрешности, обусловленной износом режущего инструмента;
- поиск погрешности настройки станка;
- поиск погрешности установки заготовки;
- поиск случайной погрешности.

АСРСПО "ЕХАСТ-1" представляет собой совокупность некоторых форм, в которые вносятся исходные данные. Для внесения исходных данных используется диалоговый режим, реализованный при помощи визуальных компонентов Delphi. Проанализировав исходные данные, выдается результат: суммарная погрешность обработки.

Важным свойством АСРСПО "ЕХАСТ-1" является работа с базами данных, имеющих формат dBase. Благодаря чему пользователи -технологи получают возможность пополнять нормативно-справочные таблицы новыми данными.

АСРСПО "ЕХАСТ-1" предназначена для поиска погрешности обработки при оценке точности вновь проектируемого технологического процесса. Она исключает случайные ошибки, которые может допустить человек. Использовать предлагаемую программу могут студенты в курсовых и дипломных работах, а также пользователи-технологи.

Литература. 1. Дипломное проектирование по технологии машиностроения. Под общ. ред. В.В. Бабука.-Мн.: Выш. школа, 1979.- 464 с. 2. Справочник технолога-машиностроителя. В 2-х т. Т.1/Под ред. А.Г. Косиловой и Р.К. Мещерякова.- М.: Машиностроение, 1985.-656 с.

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОДМОДЕЛЕЙ И ПОДКОНСТРУКЦИЙ К
ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ЦИСТЕРНЫ***Путьято А.В., БГУТ, г. Гомель*

Для оценки напряженно-деформированного состояния элементов конструкции железнодорожной цистерны, была получена конечноэлементная модель нефтеналивной железнодорожной цистерны, реализованная в программном комплексе ANSYS. В работе [1] приведены некоторые результаты оценки напряженно-деформированного состояния элементов конструкции железнодорожной цистерны модели 15–1443. В ряде случаев возникает необходимость определения напряжений в узлах с учетом подробностей при геометрическом моделировании и для более детального анализа и варьирования нагрузками вышеназванных областей комплексная модель громоздка и недостаточно универсальна. Добиться быстрого анализа элементов конструкции при различных изменениях нагрузок и конструктивных параметров можно путем применения методов подмоделей и подконструкций.

Метод подмоделей основан на принципе Сен-Венана. Это подразумевает, что эффекты концентрации напряжений ограничены вокруг концентратора, поэтому, если границы подмодели достаточно далеки от концентратора напряжений, в подмодели могут быть рассчитаны достаточно точные значения напряжений.

Метод подмоделей удобно использовать, к примеру, если после проведения анализа для полной модели оказалось, что для некоторых областей результаты недостаточно подробны. При этом при первоначальном анализе достаточно создать конечно-элементную модель с такой сеткой, которая вполне достаточна для адекватного описания особенностей нагружения и выделения зон высоких напряжений, но является недостаточно мелкой для получения точных результатов для таких зон. Выявив интересующую область необходимо создать новую модель (подмодель), геометрию которой можно выполнить более детально и, следовательно, сетку конечных элементов подмодели можно сделать значительно мельче для получения более точных результатов. При этом важным шагом является задание граничных условий для подмодели на основе от-

клика основной конструкции. И, наконец, производится анализ подмодели, который уже не зависит от исходной конструкции, что исключает необходимость повторять анализ всей модели.

В процессе анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкции при движении цистерны по кривой [2] возникла необходимость подробного моделирования среднего крепления котла к раме цистерны, для анализа вопроса появления трещин в рассматриваемой зоне при эксплуатации (рисунок 1).

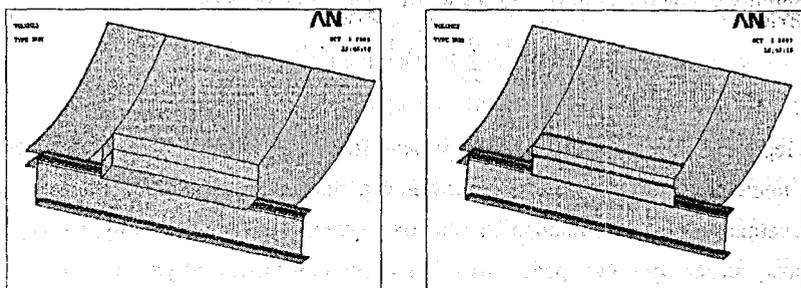


Рисунок 1 – Представление подмоделью узла крепления котла к раме для уточненной оценки напряженно-деформированного состояния.

Таким образом, метод подмоделей дает возможность исследования влияния внесения в конструкцию локальных изменений геометрии без повторного анализа конструкции целиком.

Метод подконструкций (метод суперэлементов) представляет собой выделение из модели конструкции более простых ее составных частей – подконструкций [3]. Математическая идея метода суперэлементов состоит в том, что заданная система, описываемая соответствующими уравнениями состояния, расчленяется поэтапно на части до тех пор, пока не образуется множество элементов с известными деформативными свойствами. После этого составляются уравнения состояния каждого суперэлемента и обратным путем с использованием матрицы соединения, формируется уравнение состояния системы в целом.

Каноническая форма статических уравнений метода конечных элементов имеет вид

$$[K] \cdot [u] = [P] \quad (1)$$

где $[K]$ – матрица жесткости всей системы, $[u]$ – матрица узловых перемещений; $[P]$ – матрица заданных нагрузок.

Уравнение может быть записано в следующем виде

$$\begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [u_i] \\ [u_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_i] \\ [P_j] \end{bmatrix} \quad (2)$$

Здесь группа i – соответствует группе наложенных степеней свободы на узлы конечных элементов; j – группа удаленных степеней свободы. В результате ряда преобразований получается, что между перемещениями граничных и внутренних узлов подконструкции имеется следующая связь

$$[u_j] = [K_{jj}]^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot [P_{jk}] - [K_{ji}]^{-1} \cdot [K_{ji}] \cdot [u_i] \quad (3)$$

где b_k – нагрузочный коэффициент.

Перемещение удаленных узлов можно использовать для уменьшения времени решения и повышение эффективности процесса моделирования за счет приведения группы или набора элементов к одному эквивалентному, самостоятельному элементу – суперэлементу. Метод подконструкций удобен также при исследовании различных степеней нагруженности рассматриваемой конструкции, что достигается путем изменения значения нагрузочного коэффициента b_k .

Применение методов подмоделей и подконструкций позволяет производить уточненную оценку напряженно-деформированного состояния элементов конструкции цистерны с использованием разработанной модели практически на любой ЭВМ с ограниченной возможностью.

Литература. 1. Путьто А. В. Конечноеэлементное моделирование железнодорожной цистерны с использованием программного комплекса ANSYS//Сборник материалов III международной межвузовской научно-технической конференции студентов, аспирантов и магистрантов. 24 – 25 апреля 2003 года. – Гомель: Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2003. – с. 25 – 28. 2. Сенько В. И., Шимановский А. О., Путьто А. В. Расчетная схема приложения силовых факторов к конструкции цистерны при ее движении в кривой//Труды научно-практической конференции «Безопасность движения поездов». – М.: МИИТ, 2003. – с. IV-79 – IV-80. 3. Строительная механика корабля и теория упругости: Учебник для вузов: В 2 т. – Л.: Судостроение, 1987. Т. 1: Постнов В. А., Суслев В. П. Теория упругости и численные методы решения задач строительной механики корабля. 228 с.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТОНКИХ ПЛЕНОК

Раткевич А.В., БГТУ, г. Брест

В настоящее время все более широкое применение в материаловедении находят методы фрактального анализа. Это связано с тем, что толщина тонких пленок не превышает несколько десятков нанометров, в связи с чем традиционные методы анализа зачастую уже не могут выявить закономерности роста тонких пленок и изменения их свойств.

Фрактальный анализ основан на понятии фрактала – самоподобной структуры, обладающей свойствами инвариантности. Иначе говоря, при любом изменении множества точек фрактала в пространстве мы получим то же самое множество точек, а форма фрактала не изменяется от изменения масштаба. Фрактальная размерность (D) – это свойство фрактала, показывающая степень заполнения фракталом пространства. Так, для линии она равна 1, квадрата – 2, шара – 3, а у фрактальных объектов-поверхностей она находится между 2 и 3.

Фрактальная природа тонких пленок становится очевидной при рассмотрении поверхности тонкой пленки с различной степенью увеличения. При этом появляется все больше и больше деталей, причем независимо от масштаба они имеют одинаковую структуру. Экспериментальные исследования подтвердили, что фрактальная размерность поверхности тонких пленок различных материалов колеблется в диапазоне от 2,1 до 2,8. Фрактальную размерность можно использовать при описании качества поверхности пленки, а это – важный фактор, влияющий на различные физические свойства пленки.

В качестве методов обработки профилей исследуемых поверхностей для последующего их анализа можно привести следующие: метод островов среза (МОС), метод преобразования подобия (МПП), метод вертикальных сечений (МВС). Эти методы преобразовывают исходную поверхность в набор фрактальных фигур для последующего определения D . Так, МВС основан на исследовании зависимости длины профиля поверхности от масштаба измерений. Для получения профиля необходимо сделать вертикальный срез поверхности и построить полученную ломаную в декартовых координатах, где в качестве x будет

выступать длина среза, а u – значение яркости точки среза. В МОС профиль получается в результате покрытия поверхности каким либо материалом и последующей ее полировки. Таким образом, получаются контуры фрактальных островков для последующей обработки. В МПП используются линии скольжения, которые образуются в результате сдвига в соответствующей единственной плоскости скольжения. Тогда при пересечении линий скольжения с прямой линией образуется фрактальный профиль.

Полученный профиль анализируют для последующего нахождения фрактальной размерности. Для этого необходимо построить график зависимости связанных между собой параметров, и найти угол наклона (например, аппроксимировать график методом наименьших квадратов). Тангенс угла наклона будет представлять искомую размерность.

Сравним между собой следующие методы вычисления фрактальной размерности профиля: метод подсчета ячеек (кубическая размерность), модифицированный метод подсчета ячеек (информационная размерность), корреляционный метод (корреляционная размерность).

В общем случае для определения кубической фрактальной размерности (D_{box}) требуется произвести следующее построение: фрактальное множество покрывается элементарными d -мерными блоками (или сферами) с длиной ребра (радиуса) e и производится подсчет их числа $N(e)$. Затем в двойных логарифмических координатах строится зависимость количества ячеек от размера ячейки. Данный метод обладает тем недостатком, что приходится эмпирическим путем подбирать величину e : с одной стороны, она должна быть не настолько мала, чтобы стал невозможным подсчет числа элементов, а с другой, не настолько велика, чтобы выйти за область применимости зависимости.

Информационная размерность (D_{inf}) строится как зависимость размера покрывающей локальное множество точек ячейки от количества точек множества в ячейке. Этот метод учитывается частотность (локальное свойство множества – свойство принадлежности к соседям локальных точек), т.е. сколько точек множества находится в ячейке. Информационная размерность учитывает «вес» каждой ячейки, в которые входят точки множества.

Еще один способ определения фрактальной размерности – корреляционная размерность (D_{cor}). Размерность показывает степень корреляции между каждой парой точек в рассматриваемом фрактальном множестве.

Рассмотрим практические значения этих фрактальных размерностей для фрактальных объектов. Так, для квадратной кривой Кох (теоретическая размерность $D = 1.5$) клеточная размерность равна $D_{box} \sim 1.53$ (погрешность 1,8%), информационная $D_{inf} \sim 1.51$ (погрешность 0,9%), корреляционная $D_{cor} \sim 1.512$ (погрешность 0,9%). Для пленок SiO_2 (увеличение от $\times 2000$ до $\times 30000$) значения соответственно равны $D_{box} \sim 2.52$, $D_{inf} \sim 2.51$, $D_{cor} \sim 2.5$ ("истинное" значение размерности такой пленки следует принять равным величине около 2,5).

Как видно, корреляционная размерность более точна, однако для ее вычисления затрачиваются значительные вычислительные ресурсы ЭВМ. Кубическая и информационные размерности более просты в вычислении, однако от выбора шага, с которым будет изменяться размер ячейки для покрытия множества, зависит точность вычисляемой размерности.

Также в последнее время появились много новых методик вычисления фрактальной размерности: спектральной плотности, вариаций, смены центров и т.д. Изучение их представляет интерес для нахождения наиболее оптимального и наименее ресурсоемкого метода для каждого случая. Сейчас можно с уверенностью сказать, фрактальная размерность может быть использована для описания и сравнения качества и свойств поверхности пленок в тех случаях, когда традиционные методы оказываются бессильны.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В АРХИВНОМ ДЕЛЕ: ЗАРУБЕЖНЫЙ И ОТЕЧЕСТВЕННЫЙ ОПЫТ

Ровнейко С.Н., БрГУ, Брест

В последние 50 лет работники архивов различных европейских стран и Америки ищут пути избавления от традиционных рутинных видов работ. К тому побуждают две тенденции: рост состава делопроизводства во всех сферах деятельности человека и расширение информационного пространства вследствие происходящего коммуникативного взрыва в мировом сообществе.

Как показывает анализ современного состояния архивного дела в различных странах, широкое применение получило использование информационных технологий в архивном деле. Наибольшее распространение получил архив машиночитаемых документов (во Франции, США, Канаде, Швеции, Швейцарии и некоторых других странах). Координацию действий в этом направлении взял на себя созданный в 1993 г. Международным советом архивов Комитет машиночитаемых (электронных) документов.

Применение архивных информационных технологий в Восточной Европе началось несколько позднее. В странах бывшего СССР это относится к 90-м годам и характеризуется высокими темпами, поскольку ранее стихийное развитие информатизации архивных учреждений было включено в долгосрочные государственные программы.

Американские архивы имеют наиболее давние традиции информатизации и к настоящему времени обладают наиболее совершенными технологиями. Самой распространённой современной американской общей компьютерной программой для архивов является система SIS – программа контроля площадей и хранилищ центров. Она включает данные о системах нумерации каждого архива и планировке стеллажей и позволяет контролировать местоположение и размеры имеющихся в наличии свободных площадей, что необходимо для рационального комплектования архивных фондов. В конце 90-х годов XX в. в США была введена в действие программа TASK, предназначенная для контроля качества и повышения эффективности работы служащих и специалистов с документами. Она основана на данных о трудозатратах в выполнении тех или иных видов работы с документами и может производить профессиональный рейтинг персонального состава и составлять статистическую отчетность архивов. Общий контроль программ в США осуществляется в центре информационных систем Управления федеральных центров документации, оборудованном в NPRS (Национальный центр документации по личному составу).

Информатизация архивного дела во Франции началась в 70-е годы. В на-

стоящее время в 44-х департаментских архивах Франции используются следующие пакеты обработки документов: TEXTO – представляет справочные данные архивных служб, перечень архивных законов, принятых после 1958 г., состав источников комплектования архивов предприятий, учет архивных документов в коммунах; JLB – разработка документальных материалов "древней секции"; TAURUS – прием и размещение дел в хранилищах, их выдача исследователям и прием дел от них, учет и уничтожение документов; SIRIUS – учет описей архивов; PROF – королевские письма Луи XV и Луи XVI; RENO – описи парижских нотариальных архивов 1650 г.; SERAC – дела коммунальной администрации в фондах МВД Франции XIX века; THALIE – дела цензуры и театральные постановки; LIBREDIT – описи книжных магазинов и издательств XIX века; ALADIN – библиография архивного дела Франции.

В Канаде активно используется опыт США и Франции. В национальном архиве Канады создана информационная система управления архитектурой – IMOSA. Кроме того, действуют пять автоматизированных систем поиска документов государственного архива.

Шведские специалисты создали Национальную архивную информационную базу (NAD). Система включила 7 модулей, подготовленных на базе международных архивных стандартов с учетом некоторых специфических особенностей шведских архивов.

В других европейских странах вызывает определенный интерес Германский центр социально-исторических исследований, в котором осуществляется сбор и обработка машиночитаемых документов по социальной и политической истории, исторический и социологический архивы Дании, где ведется большая работа по широкому внедрению новейших автоматизированных архивных технологий, Нидерландский исторический архив машиночитаемых данных (NHDA) с его достижениями в области распознавания исторических источников, их компьютерного документирования и архивирования. По инициативе Европейского научного фонда в Бернском университете (Швейцария) на осно-

ве единых международных архивных стандартов описания (база данных "Euro-CLIMHIST") создается тематическое машиночитаемое хранилище.

Более медленными темпами идет использование информационных технологий в архивах Российской Федерации и Республики Беларусь. Информатизация российских архивов является одной из основных функций Государственной архивной службы Российской Федерации. В этом направлении разрабатываются типовые автоматизированные базы данных "Учет фондов", "Паспорт архива", "Учреждения – источники комплектования", "Учет использования документов", "Аннотация фондов" и др. При этом в качестве программного обеспечения используется пакет универсальных прикладных программ CDS ISIS/M и СУБД Q&A. В условиях наличия различных школ и подходов к реализации информационного процесса актуальной проблемой в Российской Федерации становится совместимость накопленных информационных массивов и создание единых интегрированных баз данных. Типовые архивные технологии дают возможность объединения баз данных, созданных различными архивными учреждениями, в единую архивную информационную сеть с горизонтальными связями между архивными учреждениями разных уровней. При этом основой построения научно-справочного аппарата, наряду с традиционными видами справочников и каталогов, становятся справочник и тематические базы данных, создающиеся в электронном формате.

Информатизация архивного дела в Беларуси развернулась в начале 90-х годов, когда к созданию локальных баз данных приступили сотрудники Национального архива Республики Беларусь (НАРБ), Белорусского государственного архива кинофотофонодокументов (БГАКФФД) и др. Научно-методическое руководство, проектирование и координацию этой работы осуществляет Белорусский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела (БелНИИДАД).

В БГАКФФД был образован отдел автоматизированных информационно-поисковых систем, который, используя программы ISIS и PHOTO PHINISH,

приступил к составлению компьютерного путеводителя по кинофотодокументам с их графическим изображением. В Национальном архиве РБ были разработаны базы данных "Память", "Неволя", "Эвакуация", "Учет фондов". К работе по созданию баз данных приступили многие архивы республики. В белорусской ветви Ассоциации "История и компьютер" стран СНГ определилось целое направление работы, связанное с разработкой мультимедиа программ по истории и культуре Беларуси XII- XX веков.

Таким образом, использование информационных технологий в архивном деле наивысшую степень развития получило в США, Франции, Швеции, Германии, Дании, Нидерландах, Швейцарии, Канаде. Для поднятия этой информационной сферы на более качественный уровень необходимо взаимознакомление и взаимообмен накопленными теоретическими разработками и практическим опытом.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОЗГА

Стрик О.Н., ГрГУ, Гродно

Целью исследования является выбор геометрической модели трехмерного представления мозга, в соответствии с условиями: модель должна содержать наиболее точное пространственное строение структуры мозга и обладать возможностью дополнения информации, например, о химическом составе.

Трехмерные изображения биологических объектов являются мощным источником информации для исследователей. В настоящее время известно несколько методов представления трехмерных объектов и связанных с ними методов визуализации. Все представления можно разделить на несколько классов, обладающих характерными свойствами: поверхностные или объемные, связанные или дискретные, явные или параметрические [1].

Поверхностные модели описывают только поверхность объекта в трехмерном пространстве, объемные структуры позволяют рассматривать модели объекта, как часть трехмерного пространства, разбитого на ячейки (воксели)[1]. Связанные модели явно и неявно содержат информацию о непрерывных участках

поверхностей моделей, тогда как дискретные представления описывают, только приближение поверхности объекта.

Явное задание моделей предполагает, что описание модели объекта в данном представлении доступно в явной форме, а параметрическое – что для его получения необходимо дополнительно вычислять некоторую функцию, зависящую от параметра.

Наиболее соответствующая условиям является воксельная модель [1]. Она обладает рядом преимуществ перед остальными моделями, способна хранить информацию о каждой единице пространства и является наиболее универсальным методом представления строения мозга, можно представить объекты большой сложности. К недостаткам относятся большой объем данных, необходимых для описания строения структуры.

Мозг представляет собой объект со сложным строением и состоящий из большого числа логических объектов (нейроны, ядра, волокна и т.д.). Мозг можно заключить в параллелепипед (для крысы размеры: длина не более 22 мм, ширина - 16 мм, высота - 12 мм). Параллелепипед разбивается на элементарные кубики (воксели), размер их выбирается достаточным для оптимального представления структур мозга. Как выяснилось (в случае с мозгом крысы) размер кубика может быть заключен в диапазоне от 0.01 мм до 0.1 мм. Этого вполне хватает для нормальной визуализации структуры. Но уже при размере вокселя 0.01 мм необходимо не менее 0.5 МБ на жестком диске для хранения данных для бинарной модели, а если еще использовать информацию о цвете единицы объема, то необходимый размер свободного места на диске возрастает пропорционально используемой цветовой палитре.

Наиболее оптимальным представлением мозга является описание его каждой структуры в отдельности, что позволяет при необходимости варьировать размером кубика, описывать строение не только поверхности, но и внутренней структуры объекта, в зависимости от строения и важности структуры. Например, достаточно описать поверхность мозга, без ее внутренней структуры, что

позволяет сократить объем хранимых данных.

Существуют методы позволяющие уменьшить требуемый объем хранимых данных: октарные и бинарные деревья [2,3].

Воксельная модель является наиболее оптимальной для представления мозга, она способна хранить информации не только о строении поверхности моделируемого объекта, но и о внутренней структуре.

Литература. 1. Порев В.Н. Компьютерная графика.–СПб.:БХВ-Петербург,2002.–432 с.: ил. 2. Ахо, Альфред, В., Хопкрофт, Джон, Ульман, Джеффри, Д. Структуры данных и алгоритмы.: Пер. с англ.: Уч.пос. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2000. – 384 с.: ил. 3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001. – 304 с.: ил.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

Тузик И.В., БГТУ, Брест, Тузик С.А., БрГУ, Брест

На лабораторных занятиях по курсам «Математические модели информационных процессов и управления» и «Дискретная математика» студенты сталкиваются с необходимостью решения задач, в которых используются группы подстановок n -го порядка. При решении таких задач на компьютере требуется уметь представлять подстановки в памяти компьютера и совершать над ними определенные операции, для чего обычно приходится писать соответствующие подпрограммы.

Рассмотрим способ, не требующий дополнительного программирования.

Каждой подстановке длины n поставим в соответствие квадратную матрицу размерности $n \times n$, состоящую из нулей и единиц: элемент (i, j) матрицы равен 1, если в соответствующей подстановке элемент i переходит в элемент j . В каждой строке и каждом столбце такой матрицы находится ровно одна единица. При таком изоморфизме операции произведения подстановок соответствует операция обычного умножения соответствующих им матриц, нахождению обратной подстановки – транспонирование матрицы. Тожественной подстановке соответствует единичная матрица.

Несмотря на кажущуюся громоздкость указанного способа, предложенное

представление позволяет решать многие задачи, связанные с подстановками, в любой среде, в которой реализованы стандартные матричные операции, например, в MS Excel, MathCad, Derive и т.д., что существенно упрощает работу студента.

Литература. 1. Романовский И. В. Дискретный анализ. – СПб.: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2003. 2. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

ПОСТРОЕНИЕ ТАРИФНОЙ СИСТЕМЫ ОПЛАТЫ ТРУДА НА ПРЕДПРИЯТИИ С ПОМОЩЬЮ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Тур В.М., БГТУ, г. Минск

В последнее время в экономических исследованиях все больше внимания уделяется применению математических методов и моделей. Это связано со значительным расширением возможностей расчетов посредством использования современной вычислительной техники.

Большую роль для решения различных экономических задач играют методы оптимизации или методы математического программирования, однако в качестве примеров решения этих задач в литературе в основном используются задачи составления плана производства различных видов продукции из нескольких видов сырья, рациона из нескольких видов кормов, либо распределения капиталовложений между проектами. Между тем методы линейного программирования применимы и для распределения средств на оплату труда между работниками различных разрядов и нахождения оптимального для данного предприятия варианта тарифной сетки с заданными соотношениями тарифных коэффициентов.

Так, на кафедре статистики, бухгалтерского учета, анализа и аудита Белорусского государственного технологического университета разработана математическая модель построения тарифной системы оплаты труда предприятия, в основу которой положена модель оптимизации с применением симплекс-метода, предполагающая применение соответствующих программных продуктов (например, пакета программ Mathematica). При этом модель предполагает

решение задачи распределения планируемого тарифного фонда оплаты труда.

В задаче распределения планируемого тарифного фонда заработной платы (ФЗП^{пл}_{тариф}) целевая функция выглядит следующим образом:

$$Z = \sum \text{Ч}_i \cdot \text{ТК}_i \rightarrow \max, \quad (1)$$

где Ч_i – число работников i -того разряда ($i=1, 2, 3, \dots, 23$); ТК_i – тарифный коэффициент, соответствующий i -тому разряду.

В качестве ограничений выступают следующие соотношения:

$$\text{ТК}_1 = 1,00. \quad (2)$$

$$1,10 \cdot \text{ТК}_i - \text{ТК}_{i+1} \leq 0; \quad (3)$$

$$\text{ТС}_{\text{IP}}^{\text{пр}} \cdot \sum \text{ТК}_i \cdot \text{Ч}_i \leq \text{ФЗП}_{\text{тариф}}^{\text{пл}} \quad (4)$$

$$\text{ТС}_{\text{IP}}^{\text{пр}} \cdot \text{ТК}_i \geq \text{ТС}_i^{\text{дейст}}, \quad i=1, 2, 3, \dots, 23 \quad (5)$$

где $\text{ТС}_{\text{IP}}^{\text{пр}}$ – проектируемая величина тарифной ставки первого разряда; $\text{ТС}_i^{\text{дейст}}$ – действующие на предприятии тарифные ставки i -того разряда.

Ограничение (2) фиксирует единицу в качестве тарифного коэффициента для первого тарифного разряда. Ограничение (3) подразумевает, что при построении тарифной сетки предприятие ориентируется на нижний порог осязательности материального стимула, составляющий 10%, то есть межразрядные соотношения тарифных коэффициентов должны быть не менее 1,10. Ограничение (4) предполагает, что сумма тарифных ставок работников предприятия не должна превышать планируемый тарифный фонд заработной платы. Неравенство (5) означает, что расчетные тарифные ставки работников должны быть не ниже уровня тарифных ставок, действующих на предприятии на текущий момент.

Для того, чтобы данная задача имела решение, проектируемая величина тарифной ставки первого разряда не должна превышать некоторой максимально возможной величины ($\text{ТС}_{\text{IP}}^{\text{max}}$), которая определяется по следующей формуле:

$$\text{ТС}_{\text{IP}}^{\text{max}} = \frac{\text{ФЗП}_{\text{тариф}}^{\text{пл}}}{\sum \text{Ч}_i * 1,10^{i-1}} \quad (6)$$

Для решения задачи проектируемая величина тарифной ставки первого разряда задается в следующих пределах:

$$TC_{IP}^{\text{госуд}} \leq TC_{IP}^{\text{дейст}} \leq TC_{IP}^{\text{пр}} \leq TC_{IP}^{\text{мах}} \quad (7)$$

Соотношение (7) подразумевает, что задаваемая величина тарифной ставки первого разряда не может быть ниже законодательно установленной величины ($TC_{IP}^{\text{госуд}}$) для обеспечения социальных гарантий в оплате труда и не должна быть ниже величины тарифной ставки первого разряда, действующей на предприятии. Кроме того, учитывая, что оплата труда должна выполнять воспроизводственную функцию, величину проектируемой тарифной ставки первого разряда целесообразно ориентировать на достижение величины прожиточного бюджета либо минимального потребительского бюджета.

На основе целевой функции и ограничений, изменяя величину тарифной ставки первого разряда в обозначенных пределах формулы (7), рассчитываются различные варианты тарифной сетки, один из которых и является основой тарифной системы предприятия.

Так как тарифная сетка служит для установления дифференциации в оплате труда работников предприятия, то она должна быть научно обоснованной и восприниматься работающими как справедливое распределение средств на оплату труда. Поэтому возможно введение дополнительных ограничений на конкретном предприятии, ориентированных на количественное выделение тарифных ставок определенных разрядов.

Так, можно задать необходимые соотношения (C_{NM}) между определенными разрядами (к примеру, разряды N и M, причем $N > M$):

$$TK_N / TK_M \geq C_{NM}, \text{ где } N > M, \text{ либо } TK_N - C_{NM} \cdot TK_M \geq 0 \quad (8)$$

В зависимости от политики заработной платы, проводимой предприятием, предлагаемая модель расчета параметров тарифной системы может быть дополнена другими ограничениями. Так, например, в зависимости от характера нарастания тарифных коэффициентов возможно построение следующих видов тарифных сеток (с равномерным ростом; с прогрессивным нарастанием; с про-

грессивно снижением либо с комбинацией вышеперечисленных видов).

Предлагаемая модель расчёта параметров тарифной системы может быть дополнена рядом ограничений по усмотрению предприятия.

ОБУЧЕНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ СЕТЕВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Хомяк Н.А., ГрГУ, Гродно

Бурное развитие компьютерной техники и информационных технологий послужило толчком к развитию общества, построенного на использовании различной информации и получившего название информационное общество. Движущей силой развития общества должно стать производство информационного, а не материального продукта.

Основной базой информационного общества станут различного рода системы на базе компьютерной техники и компьютерных сетей. Главной тенденцией развития вычислительной техники в настоящее время является дальнейшее расширение сфер применения ЭВМ и переход от отдельных машин к их системам.

Наиболее перспективные, создаваемые на основе персональных ЭВМ, территориально распределенные вычислительные системы – вычислительные сети – ориентируются не столько на вычислительную обработку информации, сколько на коммуникационные информационные услуги: электронную почту, системы телеконференций и информационно-справочные системы.

Новые возможности использования информационных ресурсов для образования открывает Internet.

Министерством Образования Республики Беларусь в состав программы для факультативных занятий была включена тема «Глобальная компьютерная сеть Internet».

Отметим некоторые направления использования ресурсов Internet в образовании:

- обмен информацией (текстовой, графической, мультимедийной, гипертекстовой);

- электронная почта;
- группы новостей;
- создание собственных школьных web-страниц;
- разработка электронных учебных материалов, обучающих компьютерных программ;
- дистанционное обучение;
- создание «виртуальных» университетов;
- организация предметных олимпиад, конкурсов;
- проведение телеконференций;
- совместные проекты школьников (и учителей) разных школ, в том числе разных стран, по разным темам;
- интегрированное использование вычислительных средств и ресурсов.

В связи с широким развитием компьютерных сетевых технологий и отсутствием соответствующего программно-методического обеспечения актуальной является проблема разработки организационно-методического обеспечения обучения школьников работе в глобальной компьютерной сети Internet.

Целью настоящего исследования является разработка программно-методического обеспечения факультативного курса «Глобальная компьютерная сеть Internet». Для облегчения работы учителя предлагается программный продукт, в виде электронного учебника, представленного на компакт диске, а также инструкция пользователя, которые можно использовать при организации самостоятельной работы школьников.

В электронном учебнике рассматривается история компьютерных сетей, приводятся основные приемы построения web-страниц с помощью HTML и редактора Word, т.е. круг вопросов и тем, наиболее актуальных для современного этапа изучения темы «Глобальная компьютерная сеть Internet».

Электронный учебник представлен в виде трех разделов. В первом содержатся первоначальные сведения об основной службе Internet - World Wide Web. Раздел предлагает материал для первичного знакомства с данной темой. На его изучение отводится 4 часа.

Во втором разделе «Создание web-страниц с помощью HTML» дается описание языка HTML, предоставляющего богатейшие возможности для создания web-страниц. Основные из них нашли отражение в данном разделе. На изучение раздела отводится 12 часов.

Следующие 20 часов направлены на знакомство учащихся со способами создания web-страниц с помощью текстового процессора Microsoft Word в рамках третьего раздела «Создание web-страниц с помощью Word».

Последние 4 занятия служат систематизации знаний учащихся о Web. Школьники получают советы по созданию и планированию своих личных web-страниц.

Методические аспекты проведения занятий базируются на выделении двух форм работы с обучаемыми: теоретических и практических занятий. Вначале преподаватель излагает теоретический материал, демонстрирует его применение на компьютере, учащиеся выполняют пробные упражнения, а затем идет этап применения полученных знаний на практике путем выполнения тренировочных упражнений и творческих заданий.

Основные цели, которые ставятся перед учащимися: ознакомиться с принципами построения web-страниц, научиться создавать web-страницу, создать свою собственную web-страницу. Предполагается, что страница каждого ученика должна содержать информацию о нем самом, его интересах и увлечениях.

В процессе работы на факультативе школьникам предоставляется возможность сделать свою страницу живой и интересной, при ее создании проявить свои способности и вкус.

Использование данной программы значительно возрастает эффективность усвоения знаний. Так как при сочетании устного обучения учащихся с работой на компьютере появляется возможность применить полученные знания на практике.

Использование электронного учебника при проведении факультативных занятий позволит отказаться от написания конспектов по данной теме, что по-

зволит больше времени и внимания уделить выполнению учащимися творческих заданий. Основным преимуществом электронного учебника является возможность индивидуализации изучения разработанного материала.

Электронный учебник может использоваться в средней общеобразовательной школе для учащихся 9-11 классов, а также в практике работы высшей школы: как при обучении студентов теме «Глобальная компьютерная сеть Internet», так и для самостоятельного изучения.

В данном исследовании рассматриваются теоретические предпосылки преподавания факультативного курса «Глобальная компьютерная сеть Internet»: проводится анализ изучения настоящей темы в базовой школе, приводится теоретическое обоснование программы факультатива. Описывается программа факультативного курса, возможности Internet в школе, а также инструкция пользователя.

Настоящий электронный учебник прошел апробацию на детских компьютерных курсах, а также на семинаре преподавателей информатики при Институте последипломого образования (УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»). Основные выводы, полученные в результате исследования, докладывались в ряде конференций.

Результаты апробации свидетельствуют о широкой содержательно-методической направленности факультативного курса. Это позволяет не только расширить возможности учителя в процессе преподавания, но и оказывает ему методическую помощь при проведении занятий.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОРОГА СЕМИВАРИОГРАММЫ

Цеховая Т.В., БГУ, г. Минск

Рассмотрим стационарный случайный процесс $Y(s)$, $s \in Z(R)$, с математическим ожиданием $m = MY(s)$, $s \in Z(R)$, ковариационной функцией

$$R(s) = M[Y(t+s) - m][Y(t) - m], \quad t, s \in Z(R),$$

семивариограммой

$$\gamma(s) = \frac{1}{2} D[Y(t+s) - Y(t)], \quad t, s \in Z(R).$$

Исследованию свойств вариограммы, оценок вариограммы стационарных случайных процессов посвящены, например, работы [1, 2], где получены асимптотические выражения для вторых моментов и семиинвариантов высших порядков построенных статистик. Предельное распределение классической оценки вариограммы найдено в статье [3]. Оценки вариограммы внутренние стационарных случайных процессов изучались в [4]. Данная работа посвящена построению порога семивариограммы стационарных случайных процессов.

Теорема 1. Если составляющие $Y(s)$ и $Y(s+h)$ случайного процесса $Y(s), s \in Z(R)$, попарно некоррелируемы для $h \geq h^*, h \in Z(R)$, h^* – ранг семивариограммы $\gamma(h), h \in Z(R)$, то порог $\gamma(h | h > h^*)$ семивариограммы $\gamma(h), h \in Z(R)$, удовлетворяет соотношению

$$\gamma(h | h > h^*) = R(0), \quad (1)$$

где $R(0)$ – дисперсия рассматриваемого стационарного случайного процесса.

Доказательство. Из определения вариограммы, свойств математического ожидания, получим

$$2\gamma(h) = M[Y(s+h) - m - Y(s) + m]^2 = M[Y(s+h) - m]^2 + M[Y(s) - m]^2 - 2M[Y(s+h) - m][Y(s) - m].$$

Используя определения ковариации, ковариационной функции, в силу стационарности рассматриваемого процесса, запишем

$$\gamma(h) = R(0) - \text{cov}\{Y(s+h), Y(s)\}.$$

Поскольку для $h \geq h^*$ составляющие $Y(s)$ и $Y(s+h)$ рассматриваемого процесса попарно некоррелируемы, то $\text{cov}\{Y(s+h), Y(s)\} = 0$ и порог семивариограммы $\gamma(h | h > h^*) = R(0)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в качестве оценки дисперсии рассматриваемого процесса можно использовать оценку порога семивариограммы. Однако обратное верно не всегда.

Пусть $Y(s_1), Y(s_2), \dots, Y(s_n)$ – n последовательных наблюдений за процессом

$Y(s), s \in Z(R), s_i \in Z(R), i = \overline{1, n}$.

В качестве оценок математического ожидания и дисперсии процесса $Y(s), s \in Z(R)$, рассмотрим статистики вида:

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y(s_i), \quad (2)$$

$$\tilde{R}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})^2 \quad (3)$$

соответственно, где $s_i \in Z(R), i = \overline{1, n}$.

Обозначим Γ_n арифметическое среднее значение семивариограммы рассматриваемого процесса

$$\Gamma_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \gamma(s_i - s_j),$$

$$s_i \in Z(R), i = \overline{1, n}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. Арифметическое среднее значение Γ_n семивариограммы процесса $Y(s), s \in Z(R)$, удовлетворяет равенству

$$\Gamma_n = M\tilde{R}(0), \quad (4)$$

где $\tilde{R}(0)$ – оценка дисперсии рассматриваемого процесса, задаваемая равенством (3).

Доказательство. Используя определение вариограммы, свойства математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=1}^n M[Y(s_i) - Y(s_j)]^2 = \\ &= M \left[\frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})(Y(s_j) - \bar{m}) + \frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=1}^n (Y(s_j) - \bar{m})^2 \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно *каждое* из трех слагаемых выражения, стоящего в квадратных скобках правой части последнего равенства. Преобразуем первое из них:

$$\frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})^2$$

Аналогично запишем для третьего слагаемого:

$$\frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})^2 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (Y(s_j) - \bar{m})^2.$$

Учитывая вид (2) оценки математического ожидания, преобразуем второе слагаемое. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})(Y(s_j) - \bar{m}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (Y(s_i) - \bar{m}) \sum_{j=1}^n (Y(s_j) - \bar{m}) = \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n Y(s_i) - \bar{m}n \right) \left(\sum_{j=1}^n Y(s_j) - \bar{m}n \right) = \frac{1}{n^2} (\bar{m}n - \bar{m}n)(\bar{m}n - \bar{m}n) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, объединяя полученные результаты, имеем

$$\Gamma_n = M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y(s_i) - \bar{m})^2 \right] = M\tilde{R}(0).$$

Теорема доказана.

Заметим, что при решении многих практических задач соотношение (4) используется, например, для тестирования выбранной модели вариограммы.

Если $h \leq h^*$, то Γ_n есть арифметическое среднее небольшого числа значений равных порогу семивариограммы и большого числа значений, не превышающих порог. В этом случае (3) не является "хорошей" оценкой для порога семивариограммы [5].

В работах [6, 7] показано, что при решении практических задач статистику (3) можно использовать в качестве оценки порога семивариограммы тогда, когда h в три и более раз больше ранга h^* семивариограммы рассматриваемого процесса.

Литература. 1. Труш Н.Н., Цеховая Т.В. Исследование статистических свойств оценок вариограммы и ковариационной функции // Вести НАН Беларуси. Сер.1, Физ. Мат. Мех. – 2001. – №2. – С. 24-29. 2. Труш Н.Н., Цеховая Т.В. Асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки вариограммы // Вестник БГУ. Сер. 1., Физ. Мат. Мех. – 2001. – №2. – С. 74-77. 3. Цеховая Т.В. Предельное распределение оценки вариограммы стационарного случайного процесса // Вестник БГУ. Сер. 1, Физ. Мат. Мех. – 2002. – №1. – С. 104-105. 4. Труш Н.Н., Цеховая Т.В. Оценки вариограммы стационарного случайного процесса // Вести НАН Беларуси. Сер.1, Физ. Мат. Мех. – 2002. – № 4. – С. 16-21. 5. Barnes R. J. The Variogram Sill and the Sample Variance // Jour. Inter. Assoc. Math. Geol. – 1991. – Vol. 23, № 4. – P. 673-678. 6. David M. Geostatistical Ore Reserve Estimation. – Elsevier Scientific Publishing. – New York, 1977. 7. Journel A.G., Huijbregts C. J. Mining Geostatistics. – Academic Press. – London, 1978.

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПРОВЕДЕНИЯ АНАЛИЗА
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ***Шкред С.Л., БГУИР, г. Минск*

В современных условиях динамично развивается рынок комплексных интегрированных систем автоматизации предприятий и учреждений самого различного профиля. Проблема комплексной автоматизации стала актуальной для каждого предприятия.

Предприятия наконец-то начинают понимать необходимость не только автоматизации технологий с помощью программных средств, но и важность предварительной оценки стратегических перспектив и ценности бизнеса для всех заинтересованных лиц. Анализ и оценка существующих бизнес-процессов предприятия должна проводиться постоянно при условии функционирования на предприятии процессной системы управления.

В условиях глобальной конкуренции, расширяющихся границ предприятия и недостаточности финансовых показателей для оценки своей деятельности современные предприятия все чаще используют новые технологии. Для выполнения подобных работ требуются особые технологии, методики и программные средства.

Любая организация – это сложный организм, функционирование которого одному человеку понять просто невозможно. Необходима деятельность, направленная на то, чтобы разобраться в функционировании таких организмов, построить соответствующие модели и на их основе построить новую улучшенную процессную модель предприятия [1].

Рассмотрим процесс проведения анализа процессных моделей на базе учебного подразделения.

Предлагаемый подход к разработке подсистемы автоматизации процесса анализа деятельности учебной организации основан на использовании семантических сетей. Семантические языки, т.е. языки, которым принадлежат только семантические информационные конструкции, являются основным объектом используемым в данной работе. Графовые семантические языки имеют достаточную «прозрачную» возможность реализации моделей параллельной асин-

хронной переработки знаний путем их сведения к более простым и в конечном счете к непосредственно реализуемым моделям [2].

Для обеспечения поддержки анализа и реинжиниринга бизнес-процессов разработаны соответствующие языковые средства на базе универсального языка представления и обработки знаний SCK (Semantic Code Knowledge), программной среды, позволяющей формально описывать и анализировать семантику бизнес-процессов, отношения между бизнес-процессами и сценарии типовых бизнес-процессов [2].

Необходимость разработки специального языка для описания процессной модели вызвана тем, что:

- традиционные методы и средства моделирования – структурный анализ, диаграммы потоков, ER-диаграммы, описывают только внешнюю сторону бизнес-процессов (т.е. что они собой представляют), но не могут выразить мотивацию, смысл и взаимосвязь между действиями и сущностями (т.е. почему бизнес-процесс именно таков);
- описание процессной модели организации является описанием концептуальной модели проектируемой корпоративной компьютерной системы, что способствует более адекватному отражению действительности в автоматизированной системе;
- описание процессной модели является фактором повышения интеллектуальности организации, т.к. знание системы о своих функциональных возможностях позволяет ей самообучаться, т.е. совершенствовать свое поведение, знания и т.д.;
- описание процессной модели позволяет проводить семантический анализ бизнес-процессов и, таким образом, совершенствовать бизнес-процессы.

Язык SCK является подязыком языка SC и предназначен для представления и обработки различных видов знаний. Предлагаемые в работе языковые средства ориентированы на построение и анализ процессных моделей кафедр, которые являются базовыми структурными единицами высших учебных заведений [3].

Фрагмент описания спецификации бизнес-процесса включает следующие компоненты (рис. 1,2):

- сценарий бизнес-процесса;
- участники бизнес-процесса и их роли;
- информационные ресурсы с указанием владельцев, пользователей, операторов и т.д.;
- границы бизнес-процесса (первичные и вторичные информационные входы и выходы);
- стадии реализации: начальная, промежуточная, завершающая;
- состояния бизнес-процесса или отдельных стадий (активный, потенциально активный, успешно завершённый, в нормальном состоянии, аварийном).

Данный подход позволяет применять различные наборы методов и операций для работы со знаниями, что даёт возможность интеллектуализировать процесс проведения анализа деятельности организаций. Интеллектуализация данного процесса может существенно упростить и значительно улучшить качество принимаемых решений на основе полученных заключений.

На основе результатов исследования была спроектирована и разработана подсистема анализа процессов происходящих в учебной организации. Созданию данной подсистемы предшествовали детальное изучение предметной области, выделение критериев для проведения анализа, определение методов представления оценок. Особое значение уделено выбору способа представления и переработки информации, интеллектуализации процесса проведения анализа деятельности организации.

Литература. 1. Калянов Г.Н. CASE-технологии. Консалтинг в автоматизации бизнес-процессов. – 3-е изд. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 320 с.; 2. Представление и обработка знаний в графодинамических ассоциативных машинах: В.В. Голенков, О.Е. Елисеева, В.П. Ивашенко и др.; Под ред. В.В. Голенкова. - Мн.: БГУИР, 2001. - 412 с.; 3. Программирование в ассоциативных машинах: В.В. Голенков, Г.С. Осипов, Н.А. Гулякина, и др. - Мн.: БГУИР, 2001.

РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЕЛИЧИН МОМЕНТОВ СГЛАЖЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ БАРТЛЕТТА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОКОН

Акинфина М.А., БГУ, Минск

Рассмотрим комплекснозначный симметричный устойчивый стационарный случайный процесс с дискретным временем $X(t), t \in Z = \{0, \pm 1, \dots\}$ с характеристическим показателем $\alpha, 0 < \alpha < 2$.

Пусть $x(1), x(2), \dots, x(T) - T=L \times M$ - последовательных наблюдений за процессом $X(t), t \in Z$, которые разбиты на L равных непересекающихся отрезков, содержащих по $M=2k(n-1)+1$ наблюдений (L не зависит от T), где $n \in N, k \in N \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, причем при $k = \frac{1}{2}$ будем предполагать, что $n=2n'+1, n' \in N$.

Исследуем следующую статистику:

$$\hat{f}_T(\lambda) = \int_{\Pi} W_T(\nu) \bar{f}_T(\lambda + \nu) d\nu, \quad (1)$$

где $\bar{f}_T(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_M^l(\lambda), \lambda \in \Pi$, является периодограммой Бартлетта, а $I_M^l(\lambda)$ - модифицированная периодограмма, построенная по наблюдениям l -го интервала, $l=1, L$, и определенная в [1], $W_T(\lambda), \lambda \in \Pi$, - спектральное окно, являющаяся неотрицательной, четной, 2π -периодической функцией, для которой: $\int_{\Pi} W_T(\lambda) d\lambda = 1$.

Причем $W_T(\lambda) = M_T W(M_T \lambda)$, где $M_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty, \frac{M_T}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, а $W(\lambda)$ - действительная, четная, функция, для которой выполняется: $\int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda) d\lambda = 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Пусть

$$H_M(v) = A_M H^{(M)}(v). \quad (2)$$

$$A_M = \left[\int_{\Pi} H^{(M)}(v)^\alpha dv \right]^{-1/\alpha}, \quad H^{(M)}(v) = \operatorname{Re} \sum_{m=k(n-1)}^{k(n-1)} e^{-i\omega m} h_k(m, n); \text{ где } h_k(m, n) -$$

окно просмотра данных, позволяющее представить $H^{(M)}(v)$ в виде

$$H^{(M)}(v) = \frac{2\pi}{\int_{\Pi} \left(\frac{\sin \frac{n\nu}{2}}{\sin \frac{\nu}{2}} \right)^{2k} d\nu} \left(\frac{\sin \frac{n\nu}{2}}{\sin \frac{\nu}{2}} \right)^{2k}; \text{ Функции типа } H^{(M)}(v) \text{ называют}$$

полиномиальными ядрами типа Джексона.

Статистика $\hat{f}_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, была исследована в работах [1], [2]. Показано, что она является асимптотически несмещенной оценкой, дисперсия и среднеквадратическое отклонение которой стремятся к нулю при $T \rightarrow \infty$.

Теорема [2]. Пусть случайный процесс $X(t)$, $t \in Z$, является m -зависимым, его спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена на множестве Π , удовлетворяет условиям Гельдера в точке $\lambda_0 \in \Pi$ порядка $0 < \gamma \leq 1$, причем $f(\lambda_0) > 0$, последовательность функций $|H_M(\lambda)|^\alpha$, определенная (2), является ядром на Π , для которого справедливо

$$\int_{\Pi} H_M \left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T} - \nu \right) H_M \left(\lambda_0 - \frac{x_2}{M_T} - \nu \right) \left| \frac{\alpha}{2} \right| d\nu \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \quad x_1,$$

$x_2 \in [-1, 1]$, $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon_T > 0$, $\varepsilon_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, $\varepsilon_T T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$, а для функции $W(x)$,

$x \in \mathbb{R}$, выполняются условия $\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\gamma |W(x)| dx < \infty$, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда

для статистики $\hat{f}_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, заданной равенством (1), справедливо

$$1) \Delta = \left| M \hat{f}_T(\lambda_0) - [f(\lambda_0)]^{p/\alpha} \right| \leq S_1 \frac{1}{M_T^\gamma} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

где $S_1 = \frac{p}{\alpha} F_0^{p/\alpha - 1} \times$
 $\times \left(B_1(\lambda_0) \int_{\Pi} W(\lambda) |\lambda|^\gamma d\lambda + B_1(\lambda_0) \frac{\alpha \pi^{\gamma+2k\alpha}}{2^{2k\alpha} (\gamma+1)(2k\alpha-1)} + 2F_0 \frac{(\pi-p)\pi^{4k\alpha-1}}{\rho^{2k\alpha}} \right), 0 < \rho < \pi,$

2) $|D\tilde{f}_T(\lambda_0)| \leq \frac{D_1}{L} \frac{1}{n^t} = \frac{1}{L} \left\{ V_{p,\alpha} \int_{\Pi} \{f(\lambda_0)\}^{2p/\alpha} W^2(x) dx + C_1 C_2 \right\} \frac{1}{n^t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$

где $t = \frac{2k^2\alpha^2 - 1 - 2k^2\alpha^2 s}{2k\alpha + 1 + 2k^2\alpha^2}, V_{p,\alpha} = \frac{\Gamma(2p)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)\pi \sin p\pi}{2\Gamma^2(p)\Gamma^2\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)\sin^2 \frac{p\pi}{2}},$

3) $\nabla = M|\tilde{f}_T(\lambda_0) - \{f(\lambda_0)\}|^2 \leq \left\{ \frac{D_1}{L} + S_1^2 \right\} n^{-\frac{2\gamma}{k\alpha+1}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$

$$C_1 = \frac{2p^2 e \max_{\nu \in \Pi} f(\nu) \Gamma^2\left(\frac{1-p}{2}\right)}{\alpha^2 \left\{ f\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T}\right) f\left(\lambda_0 - \frac{x_2}{M_T}\right) \right\}^{\frac{1-p}{2}} \Gamma^2\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)},$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k\alpha} (\pi^{2k\alpha+1} + 2(\pi)^{k\alpha}),$$

$B_1(\lambda_0), M_T$ и $W(\lambda)$ определены выше, $H_M(\lambda)$ определено соотношением (2), $\Gamma(x)$ — гамма-функция числа x , $0 < s \leq \frac{1}{k\alpha+1}, k \geq \frac{2\gamma+1}{\alpha}, 0 < p < \frac{\alpha}{2}, 0 < \alpha < 2, \lambda_0 \in \Pi.$

Проведем сравнение величины $I(\gamma) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\gamma |W(x)| dx \right\}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx, 0 < \gamma \leq 1,$

в выражении для среднеквадратического отклонения сглаженной периодограммы Бартлетта для следующих спектральных окон:

Прямоугольное спектральное окно $U(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi, & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

Статистика Журбенко $Z(x) = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{2\gamma} |x|^\gamma + \frac{\gamma+1}{2\gamma}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

$$\text{Статистика Парзена } P(x) = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} \right)^4, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Статистика Тьюки-Хеннинга } T(x) = \frac{\sin x}{2\pi x} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - x^2} \right), x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Статистика Бартлетта } B(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Статистика Абея } A(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

Результаты вычислений занесем в таблицу

Таблица 2

γ	U(x)	Z(x)	P(x)	T(x)	B(x)	A(x)
	I(γ)					
0,1	1,223	1,611	1,218	1,289	1,215	1,183
0,2	1,15	1,367	1,395	1,411	1,381	1,265
0,3	1,094	1,203	1,627	1,573	1,632	1,419
0,4	1,051	1,086	1,929	1,785	2,02	1,687
0,5	1,016	1	2,223	2,058	2,651	2,159
0,6	0,99	0,934	2,835	2,413	3,774	3,054
0,7	0,969	0,882	3,506	2,873	6,048	5,01
0,8	0,954	0,84	4,386	3,475	10,073	10,631
0,9	0,943	0,806	5,549	4,272	33,92	41,023
1,0	0,935	0,778	7,094	5,344	∞	∞

Из таблицы 2 можно сделать вывод, что наиболее предпочтительными для всего диапазона $\gamma \in (0,2]$ является статистика Журбенко и прямоугольное спектральное окно, причем

- при $\gamma \in (0,0,5)$ лучше использовать прямоугольное спектральное окно;
- при $\gamma \in (0,5,2]$ лучше использовать статистику Журбенко.

Литература. 1. Демеш Н.Н., Акинфина М.А. // Вестник БГУ. Серия физ. мат. инф. - 2001, №1. - С. 75-79. 2. Акинфина. - Минск, 1999. - 26 с. - Деп. В БелИСА. 16.06.99, № Д199971.

ОБОБЩЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМЫ КАРТАНА И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Андреев А.С., БГУ, Минск

Понятие главного расслоения имеет важное значение при изучении геометрических структур на дифференцируемых многообразиях. Основные определения и результаты сформулированы в терминах главных расслоений. Другой подход к изучению этой теории основан на идеях Э. Картана и был разработан Ш. Эресманом. Понятие главного расслоения в нем заменено на понятие группоида Ли. Хотя главное расслоение и группоид Ли различаются только формально, использование группоидов Ли допускает более эффективные применения теории групп Ли.

Будем рассматривать группоид Ли $\Pi^k(B)$ k -струй локальных диффеоморфизмов многообразия B ($\dim B = n$), т.е.

$$\Pi^k(B) = \{j_x^k \varphi \mid x \in B, \varphi \in \text{Diff}_{\text{loc}} B\}.$$

На группоиде Ли $\Pi^k(B)$ можно выделить следующие структуры.

1) канонический морфизм группоидов Ли

$$\pi_{k-1} : \Pi^k(B) \rightarrow \Pi^{k-1}(B) : j_x^k \varphi \mapsto j_x^{k-1} \varphi;$$

2) представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли J^kTB k -струй векторных полей на B ;

3) скобка с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \rightarrow A\Pi^{k-1}(B)$, являющаяся морфизмом векторных расслоений;

4) представление группоида Ли $\Pi^k(B)$ как группоида Ли изоморфизмов слоев векторного расслоения, сохраняющих скобку с усечением;

5) фундаментальная форма на $\Pi^k(B)$ со значениями в алгеброиде Ли $A\Pi^{k-1}(B)$.

Перечисленные структуры являются обобщениями аналогичных структур на расслоениях реперов высшего порядка и рассматривались в работах В. Гийемина и Ш. Штернберга, П. Либермана, П. Молино; Нго Ван Кё; Д. Алексеевского и других авторов.

При изучении псевдогрупп Эли Картан ввел фундаментальную форму, которая играет важную роль при исследовании псевдогрупп и G -структур. В частности, деформация псевдогрупповых структур строится с использованием фундаментальной формы. При помощи фундаментальной формы также строятся обобщенные G -структуры.

Фундаментальная форма Картана на главном расслоении реперов рассматривалась многими авторами. Мы будем строить обобщение классической формы Картана на α -вертикальном подрасслоении J^kTB со значениями в алгеброиде Ли.

Зафиксируем точку $x \in B$. Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ — k -репер в точке $y \in B$. Напомним, что $\xi = j_x^k \varphi$ может быть рассмотрен как изоморфизм алгебр Ли с усечением $J_x^{k-1}TB \rightarrow J_y^{k-1}TB$. Т.к. пространства J_y^kTB и $T_\xi \Pi^k(B)$ изоморфны, то k -репер ξ может быть рассмотрен также как изоморфизм $J_x^{k-1}TB \rightarrow T_\xi \Pi^{k-1}(B)$, который определяется следующим образом.

Если $\xi = j_x^k \varphi$ и X — локальное векторное поле на B , то k -репер ξ задает отображение

$$j_x^{k-1}X \mapsto (\varphi_* X)_{\xi}^{(k-1)}.$$

Определим фундаментальную форму θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ следующим образом.

Пусть $p \in T_\xi^\alpha \Pi^k(B)$ — α -вертикальный касательный вектор в точке ξ , где ξ — обратимая k -струя диффеоморфизма φ с истоком в точке x и устьем в точке $y = \varphi(x)$, т.е. $\xi = j_x^k \varphi$. Тогда можно представить касательный вектор $p \in T_\xi^\alpha \Pi^k(B)$ как поднятие векторного поля X , т.е. $p = X_\xi^{(k)}$. Вектор $X_\xi^{(k)}$ получается правым умножением на k -струю ξ касательного вектора $X_y^{(k)} \in A\Pi^k(B)$, т.е.

$$X_\xi^{(k)} = X_y^{(k)} \cdot \xi.$$

Поставим в соответствие касательному вектору $p = X_\xi^{(k)}$, касательный вектор $X_y^{(k)}$ с помощью правого умножения на ξ^{-1} . К $X_y^{(k)}$ применим операцию усечения π_{k-1}^k и переместим полученный вектор в точку $\tilde{x} \in \Pi^{k-1}(B)$, получив тем самым элемент $(\varphi_*^{-1} X)_{\tilde{x}}^{(k-1)}$ алгеброида Ли $AP^{k-1}(B)$. Таким образом, фундаментальная форма θ^k является α -вертикальной 1-формой на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. Она принимает значения в алгеброиде Ли $AP^{k-1}(B)$ и определяется как композиция следующих отображений:

$$\chi: T_\xi^\alpha \Pi^k(B) \rightarrow J_y^k TB: X_\xi^{(k)} \mapsto X_y^{(k)};$$

$$\pi_{k-1}^k: J_y^k TB \rightarrow J_y^{k-1} TB: X_y^{(k)} \mapsto X_y^{(k-1)};$$

$$\xi^{-1}: J_y^{k-1} TB \rightarrow J_x^{k-1} TB: X_y^{(k-1)} \mapsto (\varphi_*^{-1} X)_{\tilde{x}}^{(k-1)},$$

т.е. $\theta^k = \xi^{-1} \circ \pi_{k-1}^k \circ \chi^{-1}$.

Все эти отображения сохраняют структуру алгебры Ли с усечением. Следовательно, в каждой точке $\xi \in \Pi^k(B)$, $\xi = j_x^k \varphi$ 1-форма θ^k определяет морфизм алгебр Ли с усечением $T_\xi^\alpha \Pi^k(B) \rightarrow J_x^{k-1} TB$.

Форма θ^k является обобщением классической формы Картана на главном расслоении реперов. Выберем произвольную точку $x \in B$. Рассмотрим каноническую форму θ^k на α -слое $\Pi^k(B)_x$. Пусть $\psi: \mathcal{R}^n \rightarrow B$, $\psi(O) = x$ — диффеоморфизм \mathcal{R}^n и открытой окрестности точки $x \in B$. Для любого элемента $\xi \in \Pi^k(B)_x$, $\xi = j_x^k \varphi$ композиция k -струй $j_x^k \varphi \circ j_O^k \psi$ является репером порядка k на расслоении реперов $R^k(B)$. Форма $\theta_{\xi^n}^k = j_x^k(\psi^{-1}) \circ j_y^k(\varphi^{-1}) \circ \pi_{k-1}^k \circ \gamma^{-1}$ является фундаментальной 1-формой Картана на расслоении реперов $R^k(B)$.

Отметим основные свойства формы θ^k .

Теорема 1. Фундаментальная форма θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ обладает:

следующими свойствами:

- 1) в каждой точке $x \in B$ форма θ^k эквивариантна относительно правого действия группы G_x^k ;
- 2) форма θ^k левоинвариантна;
- 3) ограничение формы θ^k на алгеброиде Ли $A(\Pi^k(B))$ совпадает с усечением π_{k-1}^k ;
- 4) k -струйное продолжение диффеоморфизма базы оставляет инвариантной фундаментальную форму θ^k .

Классическая форма Картана на главном расслоении реперов позволяет характеризовать продолжения многообразия. Аналогичным свойством обладает и построенная нами фундаментальная форма θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. Т.е. справедлива следующая

Теорема 2. Автоморфизм $(\Psi, \psi)_k$ группоида Ли $\Pi^k(B)$ с усечением является k -струйным продолжением диффеоморфизма многообразия B тогда и только тогда, когда $(\Psi, \psi)_k$ оставляет инвариантной фундаментальную форму θ^k , т.е.

$$\Psi^* \theta^k = \theta^k.$$

G -структура порядка k на многообразии B определяется подгруппоидом Ли Ω группоида Ли $\Pi^k(B)$. Сужение формы θ^k является фундаментальной формой G -структуры Ω .

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MAPLE ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДРАЙЗИНА

А.С. Асмькович, *О.И.*; БГУ, Минск

Рассмотрим стационарную линейную неоднородную дескрипторную [1] систему с запаздыванием:

$$A_0 \dot{x}(t) + Ax(t) + A_1 x(t-1) = f(t), \quad (1)$$

$$x_0(t) = \{x(t) = \varphi(t), -1 \leq t < 0, x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

где $x \in R^n$, $A_0, A, A_1 \in C_{n,n}$, $\det A_0 \neq 0$, $f(t), \varphi(t)$ - кусочно-непрерывные n -вектор

функции, $x_0 \in R^n$. При исследовании её качественных свойств в теории управления необходимо иметь аналитическую запись решения [3].

Система (1) совместна тогда и только тогда, когда совместна соответствующая ей однородная система

$$A_0 \dot{x}(t) + Ax(t) + A_1 x(t-1) = 0. \quad (3)$$

Доказана теорема [4].

Если для параметров системы (3) выполняется равенство

$$A_0(A + mA_1) = (A + mA_1)A_0, \quad (4)$$

для всех $m, m \in C$, то для любых n -вектора q и кусочно-непрерывной n -вектор-функции $\psi(\tau)$, $-1 \leq \tau < 0$, вектор-функция

$$x(t) = F(t)A_0^D A_0 q + \int_{-1}^0 F(t-\tau-1)A_0^D A_1 A_0^D A_0 \psi(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где $F(t)$ есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) + A_0^D A F(t) + A_0^D A_1 F(t-1) &= 0, \\ F(0) &= E_n, F(t) = 0, t < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

является решением системы (3). Здесь A_0^D - обратная матрица Драйзина [2].

Матрица $A^D \in C_{n,n}$, являющаяся решением матричных уравнений

$$AA^D = A^D A, \quad A^D A A^D = A^D, \quad A^D A^{k_0+1} = A^{k_0} \quad (7)$$

где $k_0 = \text{ind}(A)$, называется обратной Драйзина [2] матрицы $A \in C_{n,n}$.

Она обладает следующими свойствами:

1. $R(A^D) = R(A^{k_0})$,
2. $N(A^D) = N(A^{k_0})$,
3. $AA^D = A^D A = P_{N(A^{k_0}), R(A^{k_0})}$
4. $(I - AA^D) = (I - A^D A)$,
5. $A^{p+1} A^D = A^p$ если $p \geq k_0$ и $p \in N$
6. если A невырождена то $A^D = A^{-1}$.

Пусть $A_0, B \in C_{n,n}$ и $A_0 B = B A_0$. Тогда $A_0^D B^D = B^D A_0^D, A_0^D B = B A_0^D, A_0^D B^D = B^D A_0^D$.

Для нахождения обратной матрицы Драйзина в докладе использованы [2] и запрограммированы в Марле несколько различных методов.

I. Подсчёт с использованием жордановой формы,

1. Находим жорданову форму матрицы $A - J(A) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$.
2. Вычисляем переходную матрицу P , и обратную к ней P^{-1} .
3. Выделяем из матрицы $J(A)$ матрицу C и вычисляем C^{-1} .
4. Подсчитываем $A^p = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$.

II. С помощью эшелонной формы Эрмита.

1. Берём $p \geq k_0$, $p \in N$, так чтобы $A^p \neq 0$.
2. Находим эшелонную форму Эрмита [2] к $A^p - H_{A^p}$.
3. Выбираем из H_{A^p} линейно независимые вектор-строки v_1, v_2, \dots, v_r (базис для $R(A^k)$).
4. Формируем матрицу $I - H_{A^p}$, и сохраняем ненулевые строки, которые назовём $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n$ (базис для $N(A^k)$).
5. Составим невырожденную матрицу $P = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$.
6. Вычисляем P^{-1} .
7. Формируем матрицу $P^{-1} A^p = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, где C - невырожденная матрица, а N - нильпотентная.
8. Подсчитываем C^{-1} .
9. Записываем $A^p = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$.

III. Нахождение обратной матрицы Драйзина A^p в виде полинома от матрицы A .

1. Находим собственные числа для A .
2. m_0 - количество нулевых собственных чисел, $m = n - m_0$ - количество

всех остальных собственных чисел.

3. Находим коэффициенты полинома $p(x) = x^m (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1})$,

где [2]

$$\frac{1}{\lambda_i} = p(\lambda_i),$$

$$-\frac{1}{\lambda_i^2} = p'(\lambda_i),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{(-1)^{m-1} (m-1)!}{\lambda_i^m} = p^{(m-1)}(\lambda_i)$$

4. Находим $A^p = p(A)$.

Приведены оценки быстродействия и точности предложенных методов.

Литература. 1. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences, Vol.118.- Berlin, Springer-Verlag, 1989. 2. Campbell S.L. Generalized inverses of linear transformations. Belmont. California 1979. 3. Асмыкович О.И., Крахотко В.В. О стабилизации линейных регулярных дескрипторных систем с запаздыванием // *Мат. V Респ. науч. конф. студ. и асп.* 18-20 марта 2002 г. Гомель, 2002, с. 153-154. 4. Крахотко В.В., Размыслович Г.М. Линейные системы с запаздыванием, неразрешенные относительно старшей производной // *Актуальные задачи теории динамических систем управления.* - Мн.1989, с.51-59.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА КЛАСТЕРОВ МЕТОДАМИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Белко А.В., ГрГУ, г.Гродно

Фрактальные кластеры являются основным структурообразующим элементом целого ряда макроскопических систем, возникающих в результате протекания физико-химических процессов и явлений. Моделирование фрактальных кластеров является одним из способов изучения таких макроскопических систем [1-3]. Выбрав потенциал межатомного взаимодействия, можно, казалось бы, приступить к моделированию образования кластеров. Однако сразу же возникает проблема: каким численным методом решать уравнения движения? В традиционной молекулярной динамике движение системы из N частиц описывают уравнениями Ньютона:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i \quad (1)$$

где $i=1, 2, \dots, N$, m_i , r_i – соответственно масса и координата i -й частицы, F_i – действующая на нее сила, которая включает в себя силу внешнего поля и силы взаимодействия между i -й и остальными частицами. Каждую силу взаимодействия находят как градиент выбранного потенциала взаимодействия.

Чтобы использовать ЭВМ, исходные уравнения движения заменяют системой $2N$ уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dr_i(t)}{dt} &= v_i(t) \\ \frac{dv_i(t)}{dt} &= \frac{1}{m_i} F_i(r_1(t), \dots, r_N(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

которые обычно записываются в декартовых координатах для каждой проекции скорости и радиус-вектора.

Существует множество способов численного интегрирования уравнений движения (2) [4]. Например, если ограничиться первым членом ряда Тейлора,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t v_k \\ v_{k+1} &= v_k + \frac{\Delta t}{m} F_k \end{aligned} \quad (3)$$

Этот метод называется методом Эйлера первого порядка точности. Здесь новое состояние вычисляют явным образом по известным значениям на предыдущем шаге. Добавив члены второго порядка точности приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t v_k + \frac{(\Delta t)^2}{4m} (F_k + F_{k+1}) \\ v_{k+1} &= v_k + \frac{\Delta t}{m} (F_k + F_{k+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

Эту систему можно решить методом последовательных приближений. Такой метод называется уточненным методом Эйлера с итерациями. Поскольку с ростом числа итераций их эффективность быстро падает, то обычно не делают более трех итераций. В принципе лучше уменьшить шаг интегрирования, чем проводить многократные корректирующие вычисления.

В обычном методе Эйлера, интерполируя вперед, используют нисходящие

разности $v_{k+1} - v_k = \frac{\Delta t}{m} F_k$. Если из точки k интерполировать назад и взять восходящие разности, то $v_k - v_{k+1} = \frac{\Delta t}{m} F_k$. Суммируя нисходящие разности с восходящими, мы получим центральные разности на двойном шаге:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_{k-1} + \frac{2\Delta t}{m} F_k \\ x_{k+2} &= x_k + 2\Delta t v_{k-1} + \frac{4(\Delta t)^2}{m} F_k \end{aligned} \quad (5)$$

В математике этот метод второго порядка точности называют уточненным методом Эйлера с двойным шагом, методом с перешагиванием или методом центральных разностей.

Ввиду низкой точности метод Эйлера первого порядка не целесообразно применять при моделировании образования кластеров. Метод Эйлера с двойным шагом лежит в основе большинства алгоритмов молекулярной динамики.

Метод Эйлера с итерациями физики обычно называют методом средней силы. Чтобы найти первое приближение в методе средней силы, требуется почти вдвое больше вычислений, чем в методе центральных разностей. Однако метод средней силы дает меньшие погрешности и более устойчив. Кроме того, в методе средней силы и координаты, и скорости относятся к одному и тому же моменту времени и потому их легко корректировать. Описанные выше методы позволяют моделировать образование кластеров в очень узком временном интервале. Для того чтобы расширить временной интервал образования кластера можно применить алгоритм Верле в скоростной форме [5]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t v_k + \frac{(\Delta t)^2}{2m} F_k \\ v_{k+1} &= v_k + \frac{\Delta t}{2m} (F_k + F_{k+1}) \end{aligned} \quad (6)$$

Время образования фрактальных кластеров в газовой фазе порядка $\sim 10^{-2}$ [6]. На основе проведенных экспериментов по образованию кластеров установлено, что моделирование образования кластеров методом Верле в скоростной форме позволяет увеличить временной интервал на два порядка в сравнении с

выше перечисленными методами.

Литература. 1. Белашенко Д.К. Компьютерное моделирование некристаллических веществ методом молекулярной динамики // Соросовский образовательный журнал. 2001. Т.7. № 8. С.44–51. 2. Фракталы в физике. 6 Международный симпозиум по фракт. в физике / Под ред. Пьетронеро. – М.: МИР, 1988. – 670 с. 3. Белко А.В., Никитин А.В. Методы построения объектов с фрактальной структурой. // Вестник ГрГУ. Серия 2. -2002. - №2. – С.52-56. 4. Мелькер А.И. Моделирование эксперимента. – М.: Знание. –1991. – 64 с. 5. Гульд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х ч. Ч.2: - М.: МИР, 1990. - 380 с. 6. Смирнов Б.М. Энергетические процессы в макроскопических фрактальных структурах // Успехи физических наук: – 1991. – Т.161. – вып.2. – С.171–200.

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПЕРВОГО МОМЕНТА ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Василенко Ж. В., БГУ, Минск

Рассмотрим действительный стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, с математическим ожиданием $m = MX(t) = 0$, ковариационной функцией $R(\tau) = MX(t+\tau)X(t)$, $\tau \in \mathbb{Z}$, и спектральной плотностью $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\lambda\tau}$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$.

Пусть $X(0), X(1), \dots, X(T-1)$ – T последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за процессом $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику вида:

$$I_T(\lambda) = |d_T(\lambda)|^2, \quad (1)$$

где

$$d_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_t^2} \Delta_T(\lambda) \overline{\Delta_T(\lambda)},$$

$$\Delta_T(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} h_t(t) X(t) e^{-i\lambda t},$$

$\lambda \in \Pi$, $h_t(t) = h\left(\frac{t}{T}\right)$ — некоторая функция, называемая окном просмотра данных. Заметим, что если $h_t(t) = 1$, то статистику $I_T(\lambda)$ называют периодограммой.

Известно [1], что если спектральная плотность $f(x)$ непрерывна в точке $x=\lambda$ и ограничена на Π , то статистика $I_T(\lambda)$, заданная соотношением (1), является асимптотически несмещенной, но не состоятельной оценкой для спектральной плотности. Исследуем скорость сходимости математического ожидания статистики $I_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, к спектральной плотности.

Будем предполагать, что спектральная плотность удовлетворяет следующему соотношению:

$$|f(x+\lambda) - f(\lambda)| \leq C|x|^\gamma,$$

где C — некоторая постоянная, $\lambda \in \Pi$, а $0 < \gamma \leq 1$. Согласно [1], имеем:

$$|MI_T(\lambda) - f(\lambda)| \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |x|^\gamma \Phi_T(x) dx, \quad (2)$$

где

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_t^2} \varphi_T(x) \overline{\varphi_T(x)},$$

где

$$\varphi_T(x) = \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) e^{-itx}$$

Рассмотрим несколько окон просмотра данных:

$$h_T^1(t) = 1, \quad |t| \leq T,$$

$$h_T^2(t) = 1 - \frac{|t|}{T}, \quad |t| \leq T,$$

$$h_T^3(t) = \cos^2 \frac{\pi t}{2T}, \quad |t| \leq T.$$

Вопросы аналитического исследования скорости сходимости для окна $h_T^1(t)$ приведены в работе [1]. Для других окон просмотра данных получить аналитические результаты не всегда удается. Как видно из (2) скорость сходимости $MI_T(\lambda)$ к $f(\lambda)$ зависит от величины интеграла в правой части. Поэтому в данной работе приведены некоторые численные результаты вычисления рассматриваемого интеграла для трех приведенных выше окон просмотра данных, числа наблюдений $T = 25, 50, 75$ и для $\gamma = 0, 1; 0, 2; \dots; 1$.

$T = 25$:

γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$h_T^1(t)$	2,4152	1,9118	1,5377	1,2564	1,0430	0,8798	0,7542	0,6572	0,5821	1,0482
$h_T^2(t)$	2,1124	1,6586	1,2611	1,1002	0,8723	0,7103	0,6218	0,5112	0,1862	0,1877
$h_T^3(t)$	2,0021	1,3998	1,2001	1,0742	0,7103	0,6723	0,4823	0,3492	0,0982	0,1847

Минимальное значение интеграла в правой части (2) получается для окна просмотра данных $h_T^3(t)$ и $\gamma = 0,9$.

$T = 50$:

γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$h_T^1(t)$	2,2750	1,6876	1,2741	0,9793	0,7669	0,6122	0,4986	0,4146	0,3522	0,6112
$h_T^2(t)$	1,9910	1,5632	1,1886	1,0369	0,8221	0,6695	0,5861	0,4818	0,1755	0,1077
$h_T^3(t)$	1,8870	1,4816	1,1265	0,9828	0,7792	0,6345	0,5554	0,4567	0,1663	0,0872

Минимальное значение интеграла в правой части (2) получается для окна просмотра данных $h_T^3(t)$ и $\gamma = 1$.

$T = 75$:

γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$h_T^1(t)$	2,1920	1,5642	1,1370	0,8424	0,6368	0,4916	0,3882	0,3138	0,2600	0,4414
$h_T^2(t)$	1,9228	1,3721	0,9974	0,7389	0,5586	0,4312	0,3405	0,2753	0,2281	0,0771
$h_T^3(t)$	0,3359	0,2397	0,1742	0,1291	0,0976	0,0753	0,0595	0,0481	0,0398	0,0074

Минимальное значение интеграла в правой части (2) получается для окна просмотра данных $h_T^3(t)$ и $\gamma = 1$.

Литература. 1. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. — Минск: БГУ, 1999. 2. Демеш Н.Н. Построение состоятельной оценки спектральной плотности дискретного устойчивого стационарного процесса. — Минск, 1987.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА КРАСНОСЕЛЬСКОГО-КАНТОРОВИЧА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вашкевич В.В., Вашкевич В.В., БрГУ, Брест

1. Нерегуляризованные процессы, локально сходящиеся с квадратичной скоростью

Рассматривается уравнение вида

$$f(x) + g(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(x) \in C^2_D$, $g(x) \in C_D$, $f(D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $g(D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

Для решения уравнения (1) предлагается следующий итерационный процесс:

$$f'(x_n) \Delta x_n = -\beta_n (f(x_n) + g(x_n)) \quad (2)$$

где β_n определяется по одной из следующих формул:

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\| \beta_n} \right); \quad \beta_0 \in [10^{-6}; 10^{-1}] \quad (3)$$

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| \beta_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\|} \right) \quad (4)$$

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{w_n}{\alpha \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\| \beta_n} \right); \quad w_0 = \gamma \|f(x_0) + g(x_0)\|, \quad \gamma \in (10^{-10}; 10^{-2}), \quad (5)$$

$$w_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})w_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\|$$

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\|f(x_n) + \beta_n g(x_n)\| + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\| \beta_n} \right) \quad (6)$$

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{w_n}{(w_n + \alpha \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\|) \beta_n} \right) \quad (7)$$

w_{n+1} определяется так же, как и выше.

Наряду с процессами (2), (3) – (7) рассматривается процесс с $\beta_n = 1$ (8)

Для всех процессов очередное приближение x_{n+1} определяется по формуле

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

Рассмотренные процессы (2), (3) – (7) и (8) применялись для решения системы:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + e^{x_3} = 2e + 1, \\ x_1^2 + |x_2| = 2, \\ x_1^2 + \ln|x_2| - x_3 = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Проведён сравнительный анализ процессов (2), (3) – (7) и (8). Анализ показал, что все процессы (2), (3) – (7) с коэффициентом регулирования шага β_n значительно лучше процесса (8), т.е. за счёт выбора подходящего β_0 мы можем добиться сходимости процессов (2), (3) – (7) практически при любом начальном приближении. Среди процессов (2), (3) – (7) с регулировкой шага лучшим оказался процесс (2), (7) (не получил результат лишь в одном случае), худшим – процесс (2), (4). Однако здесь следует сделать одно замечание, а именно: в случае, когда результат получен процессом (2), (6), то при этом потребовалось значительно меньшее количество итераций, чем при применении других процессов (примерно вдвое). Процессы (2), (3) и (2), (5) оказались примерно сравнимыми.

2. Регуляризованные процессы и сравнение эффективности использования регуляризованных процессов и нерегуляризованных процессов, локально сходящихся с квадратичной скоростью

Для регуляризованных процессов на первом шаге решается линейная система:

$$(\alpha E + (\alpha E + f'(x_n))f'(x_n))\Delta x_n = -\beta_n (\alpha E + f'(x_n))(f(x_n) + g(x_n)), \quad (10)$$

β_n вводятся по формулам (3) – (7), $\alpha = 1e-16$.

Очередное приближение находится по формулам:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n=0,1,\dots$$

Регуляризованные процессы оказались эффективными при начальных приближениях, при которых якобиан системы обращается в нуль.

Регуляризованный метод оказался намного эффективнее остальных процессов, причём результат получен практически во всех случаях, чего нельзя сказать о нерегуляризованных методах. Также нужно отметить, что с помощью регуляризованного метода получен результат приблизительно в четыре раза быстрее, чем в случае нерегуляризованных процессов. Среди регуляризованных методов лучшим оказался процесс (10),(6) (получен результат вдвое быстрее), процессы (10),(3); (10),(5) и (10),(7) оказались приблизительно сравнимыми. Регуляризованные процессы существенно расширяют область сходимости процессов. Специальная схема организации процесса позволяет лишь не намного (примерно на 25 %) увеличить объём вычислительной работы на каждом шаге итерационного процесса.

Литература. 1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближённое решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. 2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. 3. Мадорский В.М. О некоторых подходах к построению нелокальных итерационных процессов // Труды международной научной конференции «Статистический и прикладной анализ временных рядов». – Брест: БрГУ, 1997.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Гаджиева Л.Э., БГУ, Минск

Наиболее простым и удобным способом определения устойчивой случайной величины является задание её характеристической функции.

Для того чтобы случайная величина ξ была устойчивой (пишут

$\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$), необходимо и достаточно, чтобы её характеристическая функция $\psi_\xi(t)$ допускала представление (см.[4])

$$\ln \psi_\xi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) i g \frac{\alpha\pi}{2}) + i\mu t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t|) + i\mu t, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ и $\mu \in \mathbb{R}$.

Практические исследования невозможны без компьютерного моделирования. Сложность проблемы генерирования устойчивых случайных величин состоит в том, что вид характеристической функции не позволяет получить аналитического выражения ни для функции распределения, ни для плотности распределения. Исключения составляют частные случаи устойчивого распределения – распределение Гаусса ($S_2(\sigma, 0, \mu) = N(\mu, 2\sigma^2)$), Коши ($S_1(\sigma, 0, \mu)$) и Леви ($S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$, $S_{1/2}(\sigma, -1, \mu)$) для которых применимы обычные методы моделирования. Во всех остальных случаях, чтобы получить плотность распределения, необходимо проводить численное интегрирование.

Действительно, по формуле обращения (см.[1], стр.302), если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\xi(t)| |t| dt < \infty, \quad (2)$$

$$\text{то } p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_\xi(x) dx.$$

Имеем:

$$|\psi_\xi(t)| = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) i g \frac{\alpha\pi}{2}) + i\mu t\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t|) + i\mu t\}, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |t|\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

и следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\xi(t)| |t| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\} |t| dt < \infty.$$

Таким образом условие (2) выполняется. Так как плотность распределения является действительной функцией, то

$$\begin{aligned}
 p_{\xi}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \psi_{\xi}(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \exp\{-\sigma^{\alpha} |t|^{\alpha} (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}) + i\mu t\} dx, \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \exp\{-\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t|) + i\mu t\} dx, \alpha = 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma^{\alpha} |t|^{\alpha}\} \cos\{\beta \sigma^{\alpha} |t|^{\alpha-1} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} + \mu t - tx\} dx, \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma |t|\} \cos\{i\beta \frac{2}{\pi} t \ln |t| + \mu t - tx\} dx, \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Далее можно проводить численное интегрирование правой части равенства (3), заменяя бесконечные пределы конечными и применяя, например, составную формулу трапеций (см. [2], стр. 164). Для контроля правильности вычислений можно использовать условие нормировки.

Зная плотность распределения вероятностей, можно смоделировать непрерывную случайную величину стандартным методом исключения (см. [3], стр. 61). Используем следующий алгоритм.

Алгоритм 1:

Шаг 0. Подбираем мажорирующую функцию $g(x)$, $g(x) \geq p_{\xi}(x) \geq 0$.

Шаг 1. Моделируем случайный вектор $(x, y) \in G$, где $G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x)\}$.

Шаг 2. Если $y > p_{\xi}(x)$, то (x, y) исключаем и вновь повторяем шаг 1; если же $y \leq p_{\xi}(x)$, то значение x принимается в качестве реализации случайной величины ξ .

Таким образом, разработан метод компьютерного моделирования устойчивых случайных величин, однако он требует существенных затрат машинного времени и влечёт за собой погрешность, связанную с численным интегрированием.

Сформулируем теорему (см. [4], стр. 55), которая устанавливает выражение устойчивой случайной величины через равномерно распределённую и экспоненциальную случайные величины, с моделированием которых не возникает существенных проблем.

Теорема. Пусть V - случайная величина, которая равномерно распределёна

на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а W - независимая от V экспоненциально распределённая случайная величина с $EW=1$, тогда случайная величина X , заданная следующими формулами

1. $\alpha \neq 1$

$$X = D_{\alpha,\beta} \frac{\sin \alpha(V + C_{\alpha,\beta}) (\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha,\beta})))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}} W}$$

2. $\alpha = 1$

$$X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \operatorname{tg} V - \beta \ln \left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right],$$

где $C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}$, $D_{\alpha,\beta} = (\cos(\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2})))^{\frac{1}{\alpha}}$ является устойчивой с $\sigma=1$, $\mu=0$ ($X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$).

Теорема даёт формулы для генерирования устойчивой случайной величины с $\sigma=1$, $\mu=0$. Следующее свойство позволяет сгенерировать устойчивую случайную величину для всех допустимых значений параметров.

Если $X \sim S_{\alpha}(1, \beta, 0)$ и $Y = \begin{cases} \sigma X + \mu, \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \ln \sigma + \mu, \alpha = 1 \end{cases}$, то случайная величина

Y является устойчивой с $\sigma \neq 1, \mu \neq 0$ ($Y \sim S_{\alpha}(\alpha, \beta, \mu)$). На основании данного утверждения и теоремы был разработан алгоритм моделирования устойчивой случайной величины.

Алгоритм 2:

Шаг 0. Полагаем $k1 = \operatorname{rand}()$; $k2 = \operatorname{rand}()$;

Шаг 1. Генерируем V - случайную величину, которая равномерно распределена на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, и W - независимую от V экспоненциально распределённую случайную величину с $EW=1$.

$$V = -\pi/2 + \pi(0.5 + k1)/32768; \quad W = -\ln((0.5 + k2)/32768);$$

Шаг 2. Вычисляем вспомогательные значения:

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}; \quad D_{\alpha,\beta,\sigma} = \sigma (\cos(\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2})))^{\frac{1}{\alpha}};$$

Шаг 3. Генерируем устойчивую случайную величину по формулам:

A) $\alpha \neq 1$

$$X = D_{\alpha, \beta, \sigma} \frac{\sin \alpha(V + C_{\alpha, \beta})}{(\cos V)^\alpha} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \mu.$$

B) $\alpha = 1$

$$X = \sigma \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \operatorname{tg} V - \beta \ln \left(\frac{\pi/2 + W \cos V}{\pi/2 + \beta V} \right) \right] + \mu + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \ln(\sigma).$$

Литература. 1. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1989. 2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. 3. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. - Минск: изд-во "Университетское", 1987. 4. Aleksander Janicki, Adam Izydorczyk. Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym. - WNT, Warszawa. 2001.

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Громько Ю. В., БГУТ, Гомель

Рассматриваются свободные осесимметричные колебания упругой трехслойной кольцевой пластины. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в легком заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины. Работой заполнителя в тангенциальном направлении пренебрегаем. Деформации малы.

Однородная система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение получена вариационным методом:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_r) &= 0; & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_r) &= 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_r) - M_0 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где M_0 – коэффициент зависящий от физических и геометрических параметров слоев; L_1 – дифференциальные операторы; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате;

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+);$$

$$a_3 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+; \quad a_4 = c^2 \left[h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right];$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \quad (1.2)$$

$$a_6 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+. \quad (2)$$

В общем случае система уравнений движения (1) сводится к виду [1]:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}$$

Прогиб принимается в виде:

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (4)$$

где $v(r)$ – неизвестная координатная функция; ω – частота собственных колебаний рассматриваемой пластинки; A, B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (4) в третье уравнение системы (3) получаем бибесселево уравнение для определения неизвестной координатной функции $v(r)$:

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0, \quad L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0; \quad \beta^4 = M^4 \omega^2. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) представляем в виде [2]:

$$v(r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r) \\ v(r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r). \quad (6)$$

Здесь J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков. Константы интегрирования C_1, \dots, C_8 , входящие в (3) и (6), определяются из граничных условий на внешнем и внутреннем контурах.

Рассмотрим случай шарнирного опирания пластины по внутреннему и внешнему контурам. В этом случае при $r = 1$ и $r = r_0$ должно выполняться требование $u = \psi = w = 0, M_r = 0$. Подставляя в последние два условия решение

(2.16) с учетом координатной функции (2.19), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{aligned} C_5 J_0(\beta) + C_6 I_0(\beta) + C_7 Y_0(\beta) + C_8 K_0(\beta) &= 0; \\ C_5 F_1(J(\beta)) - C_6 F_2(I(\beta)) + C_7 F_3(Y(\beta)) + C_8 F_4(K(\beta)) &= 0; \\ C_5 J_0(\beta r_0) + C_6 I_0(\beta r_0) + C_7 Y_0(\beta r_0) + C_8 K_0(\beta r_0) &= 0; \\ C_5 F_1(J(\beta r_0)) - C_6 F_2(I(\beta r_0)) + C_7 F_3(Y(\beta r_0)) + C_8 F_4(K(\beta r_0)) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

где J_1, Y_1 – введенные ранее функции Бесселя первого порядка; I_1, K_1 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда первых порядков.

Однородная система уравнений (7) имеет нетривиальное решение для констант интегрирования C_5, C_6, C_7, C_8 при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно

$$\begin{vmatrix} J_0(\beta) & I_0(\beta) & Y_0(\beta) & K_0(\beta) \\ F_1(J(\beta)) & -F_2(I(\beta)) & F_3(Y(\beta)) & F_4(K(\beta)) \\ J_0(\beta r_0) & I_0(\beta r_0) & Y_0(\beta r_0) & K_0(\beta r_0) \\ F_1(J(\beta r_0)) & -F_2(I(\beta r_0)) & F_3(Y(\beta r_0)) & F_4(K(\beta r_0)) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Получаемое из (8) трансцендентное уравнение служит для определения собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). После их вычисления частоты собственных колебаний следуют из соотношения (5).

В общем случае для описания прогиба круглой трехслойной пластинки с отверстием, защемленной на внешнем и внутреннем контурах, при поперечных колебаниях можно ввести систему собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\beta_n r) \equiv v(\beta_n, r)$:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} [J_0(\beta_n r) + k_{1n} I_0(\beta_n r) + k_{2n} Y_0(\beta_n r) + k_{3n} K_0(\beta_n r)], \quad (9)$$

где k_{in} – выражаются через значения бесселевых функций на внешнем и внутреннем контурах пластинки после определения собственных чисел β_n в связи с громоздкостью здесь не приводятся.

Константы d_n определяются из требования нормировки собственных функций:

$$d_n^2 = \int_{r_0}^1 [J_0(\beta_n r) + k_1 I_0(\beta_n r) + k_2 Y_0(\beta_n r) + k_3 K_0(\beta_n r)]^2 r dr.$$

В конечном виде искомый прогиб представляется с помощью разложения в ряд по полученной фундаментальной системе собственных ортонормированных функций (9):

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (10)$$

Радиальное перемещение и относительный сдвиг получим, используя соотношения (3) и условия $u = \psi = 0$ при $r = 1, r_0$:

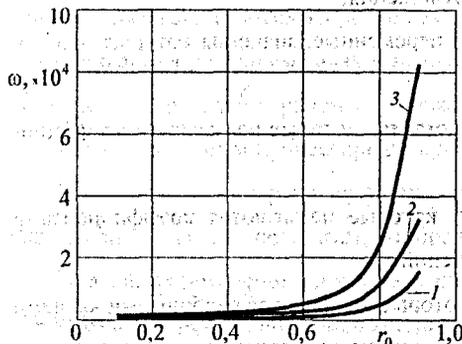
$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t));$$

$$\psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (11)$$

Коэффициенты A_n, B_n в формулах (10), (11) получим из начальных условий движения

$$A_n = \frac{1}{r_0} \int f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n r_0} \int g(r) v_n r dr.$$

Численные результаты получены для шарнирно опертой по обоим контурам пластины, несущие слои которой выполнены из сплава Д16Т, в качестве заполнителя – фторопласт. Соотношения толщин слоев в пакете принималось следующее: $h_3 = 20h_1 = 20h_2 = 0,1$.



На рисунке показана зависимость собственных частот ω от радиуса отверстия r_0 ($1 - \omega_0, 2 - \omega_1, 3 - \omega_2$). С увеличением отверстия жесткость оставшейся части пластины увеличивается, что и вызывает нелинейный рост собственных частот колебаний.

Литература. 1. Старовойтов Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 343 с. **2.** Громыко Ю. В. Свободные колебания трехслойной кольцевой упругой пластины. // Материалы, технологии, инструменты. №4. Гомель, 2001. – С. 9–12

КОМПЛЕКС КОНТРОЛИРУЮЩЕ- ОБУЧАЮЩИХ ПРОГРАММ ПО КУРСУ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Гуца П.И., БГТУ, г. Брест

В настоящей работе рассматривается один из подходов к разработке программ для обучения и контроля знаний студентов. В качестве конкретных задач были выбраны следующие задачи из области исследования операций:

1) **Задача линейного программирования.** Необходимо найти такой набор неизвестных переменных x_1, \dots, x_n , при которых линейная целевая функция (1) достигает своего экстремума, и при этом выполняется линейная система основных ограничений (2).

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}(\max, \min) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \oplus b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \oplus b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \oplus b_m \end{cases}$$

где:

- а) $\oplus \in \{=, \leq, \geq\}$ - знак операции отношения;
- б) x_1, x_2, \dots, x_n - неизвестные переменные, значения которых необходимо найти;
- в) c_1, c_2, \dots, c_n - известные константы, которые называются коэффициентами целевой функции;
- г) a_{ij} - известные константы, которые называются коэффициентами системы основных ограничений;
- д) b_i - известные константы, которые называются свободными членами или просто правыми частями системы основных ограничений;

- 2) **Транспортная задача.** У m поставщиков однотипной продукции сосредоточены ее запасы в объемах A_i . Эта продукция поставляется потребителям в объемах B_j единиц продукции. Стоимость доставки единицы продукции от i -го поставщика j -му потребителю равна C_{ij} . Требуется составить план перевозок продукции от поставщиков потребителям, который обладал бы минимальными транспортными издержками;
- 3) **Задача о коммивояжере.** Бродячий торговец постоянно перемещается между N городами. Для каждой пары городов $(i; j)$ известно расстояние C_{ij} , которое принимается равным бесконечности, если прямого пути из города i в город j не существует. Требуется составить маршрут посещения городов, который:
 - а) Был бы замкнутым;
 - б) Проходил бы через все города по одному разу кроме, может быть, начального и конечного;
 - в) Имел бы наименьшую длину.

Разработанные программы для решения этих задач имеют три режима работы:

Решение задачи в автоматическом режиме. Данный режим используется при практическом использовании программ для решения задач. В автоматическом режиме можно наблюдать за процессом решения задачи по шагам. Благодаря использованию оптимизированных алгоритмов возможности программ не ограничиваются решением задач маленькой размерности. Теоретически, сложность решаемых задач ограничена только объемом доступной оперативной памяти и располагаемым процессорным временем.

Решение задачи в режиме обучения. В этом режиме программы решают поставленную задачу по шагам, отображая результаты выполнения каждого шага и выдавая пояснения по каждому шагу алгоритма. Рассмотрим интерфейс программы для решения задачи о коммивояжере в режиме обучения (рис. 1).

Коммивояжер: 510wms.spl

Вычисление оценки правой вершины

Описание:
Оценка правой вершины равна сумме оценки вершины ветвления и оценки нуля ребра ветвления.
Означает, что оценка ребра ветвления равна сумме чисел, которые были вычтены при приведении матрицы. Если полученная оценка больше оценки текущего рекорда, то вершина сразу вычеркивается.

Матрица правой вершины

	1	2	3	4	5	6
1	∞	∞	3	0	0	0
2	9	∞	36	0	11	0
3	0	33	∞	34	17	0
4	0	42	0	∞	1	0
5	13	24	23	0	∞	0
6	0	24	0	0	0	∞

Оценка правой вершины: $67 + 24 = 91$

Приведенная матрица правой вершины

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	3	0	0
2	9	∞	36	0	11
3	0	9	∞	34	17
4	0	18	0	∞	1
5	13	0	23	0	∞

Степень нуля ребра ветвления: 24
Оценка текущей вершины: 67

Остановить Далее

67 (1,2) (1,3) 91

Рис. 1. Решение задачи о коммивояжере в режиме обучения

1- страница текущего шага алгоритма; 2- название текущего шага; 3- описание действий текущего шага; 4,5- кнопки управления обучением; 6- данные и результаты выполнения текущего шага; 7- область просмотра дерева решения (только для задачи о коммивояжере).

В верхнем левом углу окна отображается название текущего шага алгоритма, рядом находится поле для отображения сведений по выполняемому шагу алгоритма. Справа от этого поля отображается вся исходная информация, необходимая для выполнения текущего шага, а также результаты вычислений.

Для задачи о коммивояжере в нижней части окна дополнительно резервируется область для отображения дерева решения. При помощи кнопок "Остановить" и "Далее" студент может управлять процессом обучения.

Решение задачи в режиме контроля. Данный режим применяется для контроля теоретических знаний и навыков студента, он проводится в виде решения контрольного примера. Программы предлагают студенту два типа заданий для выполнения:

1) Вопросы с вариантами ответов. Данный тип заданий применяется для контроля знаний студента как по последовательности выполнения шагов алгоритма решения задачи, так и по теории. Варианты ответов постоянно меняются

местами случайным образом, что исключает механическое запоминание номера правильного ответа;

2) Задания для вычисления/анализа. Для правильного выполнения данного вида заданий студент должен знать формулы и/или правила, необходимые для выполнения конкретного шага алгоритма. При этом на экране отображаются все необходимые исходные данные. Если выполнение шага подразумевает большой объем однотипных вычислений, то студенту предлагается для выполнения только часть данного задания.

Программа имеет гибкий алгоритм ускорения процесса контроля и уточнения знаний. Каждый вопрос и задание имеет свою вероятность постановки (в начале 100%). В ходе решения контрольного примера при постановке вопроса студенту вероятность его дальнейшего появления уменьшается. Если студент не смог ответить правильно на поставленный вопрос с первой попытки, вероятность его появления увеличивается, т.е. программы устанавливают, носит ли ошибка случайный характер. Интерфейс программ в режиме контроля практически идентичен интерфейсу в режиме обучения за исключением того, что вместо теоретических сведений по текущему шагу алгоритма отображается задание для выполнения.

После решения задачи в любом из трех режимов можно распечатать ее условие, ход решения и его результаты. Кроме того, при выходе из контролирующего режима есть возможность распечатать протокол контроля для предъявления преподавателю.

Разработанный в ходе научной работы комплекс программного обеспечения в данное время успешно применяется в БГТУ при выполнении лабораторных работ по дисциплине "системный анализ и исследование операций".

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С БАЗИСНЫМ СОБОЛЕВСКИМ ВЕЙВЛЕТОМ

Дейцева А.Г., ГрГУ, г. Гродно

Вейвлет-анализ представляет собой гибкий и весьма мощный инструмент временного и спектрального анализа и широко используется для выявления особенностей сигналов. Фундаментальную роль при этом играет непрерывное

вейвлет-преобразование, которое переводит исследуемую функцию $f(x) \in L_2(R)$ в набор вейвлет-коэффициентов $W_\psi(a, b)$ по правилу:

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (1)$$

где a и b — параметры, определяющие соответственно масштаб и смещение функции $\psi(x) \in L_2(R)$, называемой базисным вейвлетом. Практически единственным ограничением, накладываемым на $\psi(x)$ является условие допустимости

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

В качестве базисного вейвлета $\psi(x)$ предлагается рассмотреть вторую производную функции Соболева $\omega(x) =$

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{x^2-1}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Назовем его соболевским вейвлетом. Можно показать, что $\psi(x) =$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{6x^4 - 2}{(x^2 - 1)^4} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

удовлетворяет условию допустимости.

Соболевский вейвлет является четной бесконечно-дифференцируемой финитной функцией, имеющей неограниченное число нулевых моментов. Выше-

указанные свойства делают его более предпочтительным при анализе некоторых сигналов, поскольку компактный носитель обеспечивает конечность интеграла (1), а наличие неограниченного числа нулевых моментов позволяет вейвлет-преобразованию лучше дифференцировать особенности сигнала [1]. Кроме того, соболевский вейвлет обеспечивает частотно-временное окно конечной площади, т. к. обе функции ψ и $\hat{\psi}$ являются функциями-окнами, следовательно, непрерывное вейвлет-преобразование дает локальную информацию об анализируемом сигнале [2].

Непосредственное вычисление прямого вейвлет-преобразования требует

больших затрат памяти и процессорного времени. Свойства соболевского вейвлета позволяют оптимизировать процесс нахождения вейвлет-коэффициентов и построить алгоритм быстрого вычисления вейвлет-преобразования.

Рассматриваются дискретные значения масштаба $a_i > 0$ и смещения b_j .

Сигнал также подвергается дискретизации. Полагаем $h(x) = h_k = f(x_{k-1})$ на интервалах $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, N}$. Таким образом, вейвлет-коэффициенты вычисляются на сетке, определяемой начальным значением масштаба a_0 и смещения b_0 :

$$(W_\psi h)(a_i, b_j) = \sqrt{a_i} \left[h_1 v \left(\frac{x_0 - b_j}{a_i} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} (h_{k+1} - h_k) v \left(\frac{x_k - b_j}{a_i} \right) - h_N v \left(\frac{x_N - b_j}{a_i} \right) \right], \quad (2)$$

где $v(x) = \frac{d}{dx} \omega(x)$. Ясно, что если мы имеем дело с дискретным сигналом, то

формула (2) дает нам точное значение вейвлет-коэффициентов.

Для ускорения процесса вычисления коэффициентов полагаем

$$x_k = x_0 + k\Delta x, \quad \Delta b = m\Delta x, \quad m \in N, \quad a_i = (a_0)^i, \quad b_j = b_0 + j\Delta b, \quad (3)$$

Δx - некоторое фиксированное число. Итак, для вычисления строки вейвлет спектра (значений вейвлет-преобразования на масштабе a_i) необходимо получить величины

$$v \left(\frac{x_k - b_j}{a_i} \right) \quad (4)$$

при всевозможных сочетаниях индексов i, j и k . Представление (3) обеспечивает конечное количество значений аргумента функции $v(x)$, а компактный носитель вейвлета дает нам лишь конечное количество ненулевых величин (4).

Предложенный алгоритм может быть запрограммирован и использован для построения вейвлет-спектрограммы, визуализирующей значения вейвлет-коэффициентов.

Литература. 1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. // Успехи физических наук, 1996. Т.166. №11 - с. 1145-1170. 2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. С англ.-М.: Мир, 2001.-412с.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дуванова В.С., Савчук В.Ф., БрГУ, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве решается уравнение 1 рода

$$Ax = y_\delta, \quad (1)$$

где $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и A — ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A , т.е. задача некорректна. Для отыскания решения уравнения (1) предлагается итеративный метод

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^3 x_{n,\delta} + 3\alpha y_\delta - 3\alpha^2 A y_\delta + \alpha^3 A^2 y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (2)$$

Доказана сходимость метода (2). Получены оценки погрешности метода при точной правой части, при приближенной правой части и погрешность в счете. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$ сходится,

если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 2. Если выполняется условие $x = A^s z$, $s > 0$ и $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$, то

общая оценка погрешности для метода (2) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s (3n\alpha e)^{-s} \|z\| + 3n\alpha\delta.$$

Теорема 3. Оптимальная оценка погрешности для метода (2) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{opt}} \leq (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|_{\frac{1}{s+1}}$$

и достигается при

$$n_{\text{opt}} = s(3\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|_{\frac{1}{s+1}}.$$

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α , но n_{opt} от него зависит. Поэтому для уменьшения числа шагов n и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α как можно большим, из условия $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$.

С учетом погрешности округлений оценка погрешности метода (2) примет вид

$$\|x - z_n\| \leq s^s (3n\alpha e)^{-s} \|z\| + 3n\alpha\delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1.$$

ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ ДЛЯ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матыськ О.В., Засим В.В., БрГУ, г. Брест

Рассматривается в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A ; для которого нуль не является собственным значением. Предположим, что при точной правой части y решение x существует (единственное). Будем искать его с помощью итеративного процесса вида

$$x_{n,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n-1,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (2)$$

в случае приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$.

Используется следующее правило останова по невязке. Задается уровень останова ε и момент останова m итерационного процесса (2) определяется условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (3)$$

Справедлива

Теорема. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$; и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в

методе (2) выбран по правилу (3), тогда $m(\delta)\delta \rightarrow 0, x_{m,\delta} \rightarrow x, \delta \rightarrow 0$. Если при этом $x = A^{-s}z, s > 0$, то справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{s+1}$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s+1} \|z\|^{s+1} + 2\alpha \left[1 + \frac{s+1}{2\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{s+1} \right] \delta. \quad (4)$$

Замечание 1. Порядок оценки (4) есть $O\left(\delta^{s+1}\right)$ и, он оптимален в классе

решений $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы предположение порядка $s > 0$, истокорпредставимости точного решения не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближенного решения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ СИМУЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Захаров А.В., ГТТУ, г. Гомель

В последнее время, благодаря существенному увеличению быстродействия средств персональной вычислительной техники, получило широкое распространение программное обеспечение, т.н. симуляторы, позволяющее моделировать различные процессы и устройства на ЭВМ. Причем точность воспроизводства симуляторами параметров прототипов может достигать сотых долей процента.

Однако очень часто возникают проблемы с наличием программного обеспечения (ПО) узко прикладного характера. В частности для исследований, проводимых автором возникла необходимость в ПО для моделирования динамики в гидравлических системах управления. В виду отсутствия в нашем распоряжении необходимых программных средств, было принято решение воспользоваться одним из симуляторов электрических схем и элементов, основанное на широко известном положении теории автоматического управления об идентичности математических описаний типовых динамических звеньев различной физической природы [1].

Рассмотрим процесс электрического моделирования динамической системы на примере системы управления гидравлическим питанием с обратной связью по давлению (рис.1)[2,3].

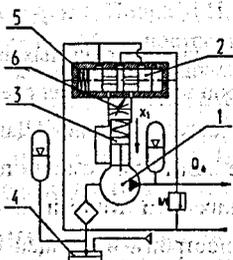


Рис.1. Система управления гидротитанием с обратной связью по давлению: 1-насос; 2-управляющий золотник; 3-поршень цилиндра механизма регулирования подачи насоса; 4-гидробак; 5-эталонная пружина; 6-регулируемый линейный дроссель.

В работе [2] описывается построение структурной схемы (рис.2), описание изображений передаточных функций и коэффициентов данной системы управления.

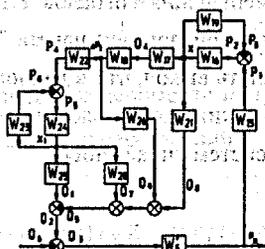


Рис.2. Структурная схема системы управления гидротитанием с обратной связью по давлению

При выводе передаточных функций элементов системы использовались следующие обозначения [1,2,3]: S —оператор дифференцирования, $1/c$; Q_1 —теоретический расход насоса, m^3/c ; Q_2 —расход через золотник, m^3/c ; Q_3 —потери расхода на утечки, сжимаемость в гидравлической нагрузке, m^3/c ; X_2 —перемещение золотника, m ; X_1 —перемещение управляющего органа насоса, m ; P_1 —сила, действующая на золотник от регулируемого давления, H ; P_2 —результатирующая сила, действующая на управляющий золотник, H ; P_3 —сила поджатия пружины, H ; Q_4 —расход в управляющем органе насоса, m^3/c ; Q_5 —потери расхода на управление насосом, m^3/c ; P_4 —сила, действующая на управляющий орган подачи насоса от регулируемого давления, H ; P_5 —результатирующая сила, действующая на управляющий орган подачи насоса, H ; P_6 —сила поджатия пружины управляющего органа подачи насоса, H ; Q_6 —расход, потребляемый рабочим гидроцилиндром, m^3/c ; Q_7 —потери расхода на перемещение управляющего золотника системы управления насосом, m^3/c ; Q_8 —потери расхода на перемещение управляющего органа подачи насоса, m^3/c ; Q_9 —расход жидкости через линейный дроссель, m^3/c ; Δp_1 —перепад давление в

Литература. 1. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. Москва, "Машиностроение", 1987. 2. Шагинян А.С., Захаров А.В. Анализ динамики привода гидравлического питания вибрационных источников сейсмических волн.//Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-техн. навук.-1999.-№2.- С.109-114. 3. Льюис Э., Стерн Х. Гидравлические системы управления. Москва, "МИР", 1966. 4. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: справочное руководство. Пер. с нем.-М.:Мир, 1982.-512 с., ил.

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРОЦЕССА С БЕРНУЛЛИЕВСКИМИ ПРОПУСКАМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Илюкевич Т. И., БГУ, Минск

Рассмотрим стационарный в широком смысле случайный процесс

$X(t), t \in Z$ с математическим ожиданием $m^X = 0$, ковариационной функцией $R^X(\tau), \tau \in Z$ и спектральной плотностью $f^X(\lambda), \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$. Пусть в результате некоторого эксперимента получено T последовательных, через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1) \quad (1)$$

за процессом $Y(t), t \in Z$, который связан с процессом $X(t), t \in Z$ следующим образом:

$$Y(t) = X(t)d(t), \quad (2)$$

$t \in Z$, где $d(t), t \in Z$ - бернуллиевская последовательность, для которой

$$d(t) = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } t \text{ } X(t) \text{ наблюдаем} \\ 0, & \text{если в момент } t \text{ } X(t) \text{ не наблюдаем} \end{cases} \quad (3)$$

причём $P\{d(t)=1\} = p > 0, P\{d(t)=0\} = q, t \in Z, p + q = 1$.

Предположим, что $d(t), t \in Z$ последовательность независимых случайных величин и $d(t), t \in Z$ не зависит от процесса $X(t), t \in Z$. Возникает задача по наблюдениям за процессом $Y(t), t \in Z$, построить оценку спектральной плотности процесса $X(t), t \in Z$ и исследовать её статистические свойства.

В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику

$$\hat{I}^T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \frac{Y^2(t)}{p} + \sum_{\substack{t=0 \\ s \neq t}}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \frac{Y(t)Y(s)}{p^2} e^{-i\lambda(t-s)} \right], \lambda \in \Pi. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть семинвариантная спектральная плотность четвертого порядка $f^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ непрерывна на Π^3 и спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π , тогда статистика $I^T(\lambda)$, задаваемая равенством (4), является асимптотически несмещенной оценкой для $f^X(\lambda)$ и

$$\text{cov} \left\{ I^T(\lambda_1), I^T(\lambda_2) \right\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi} \\ f^X(\lambda_1) f^X(\lambda_2), & \lambda_1 \pm \lambda_2 = 0 \pmod{2\pi}, \lambda_1, \lambda_2 \in \Pi. \end{cases}$$

Доказательство. Найдём математическое ожидание $I^T(\lambda)$. Имеем

$$M \hat{I}^T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \frac{MX^2(t)Md^2(t)}{p} + \sum_{\substack{t=0 \\ s \neq t}}^{T-1} \frac{MX(t)X(s)Md(t)d(s)}{p^2} e^{-i\lambda(t-s)} \right] = \\ = \frac{1}{2\pi T} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} R^X(t-s) e^{-i\lambda(t-s)} \right] = \frac{1}{2\pi T} \int_{\Pi} f^X(z) \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} e^{i(t-s)(z-\lambda)} dz = \int_{\Pi} f^X(z+\lambda) \Phi_T(z) dz,$$

где $\Phi_T(z)$, $z \in \Pi$, - ядро Фейера. Учитывая непрерывность спектральной плотности и свойства ядра Фейера, получим требуемое.

Докажем второе соотношение, используя определение ковариации, свойства математического ожидания, определение смешанных моментов четвертого и второго порядков и связывающие соотношения между смешанными моментами и смешанными семинвариантами.

$$\begin{aligned} \text{cov} \left\{ \hat{I}^T(\lambda_1), \hat{I}^T(\lambda_2) \right\} &= M \hat{I}^T(\lambda_1) \hat{I}^T(\lambda_2) - M \hat{I}^T(\lambda_1) M \hat{I}^T(\lambda_2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi T)^2} \left[\sum_{t,s=0}^{T-1} \sum_{j,k=0}^{T-1} MX(t)X(s)X(j)X(k) e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)} - \right. \\ &\quad \left. \sum_{t,s=0}^{T-1} \sum_{j,k=0}^{T-1} MX(t)X(s)MX(j)X(k) e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi T)^2} \left[\sum_{t,s=0}^{T-1} \sum_{j,k=0}^{T-1} m_4^X(t,s,j,k) e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)} - \sum_{t,s=0}^{T-1} R^X(t-s) e^{-i\lambda_1(t-s)} \sum_{j,k=0}^{T-1} R^X(j-k) e^{i\lambda_2(j-k)} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi T)^2} \left[\sum_{t,s=0}^{T-1} \sum_{j,k=0}^{T-1} (c_4^X(t-k, s-k, j-k) + R^X(t-j)R^X(s-k) + R^X(t-k)R^X(s-j)) e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)} \right] \end{aligned}$$

Подставляя вместо ковариационной функции и смешанного семинварианта их выражения через спектральную плотность и семинвариантную спектральную плотность четвёртого порядка и используя представление функции $\Phi_T(y_1, \dots, y_n)$, $n = 2, 3, \dots$ [2, стр. 86] получим

$$\begin{aligned} \text{cov} \left\{ \hat{I}^T(\lambda_1), \hat{I}^T(\lambda_2) \right\} = & \frac{2\pi}{T} \iiint_{\Pi'} f_4^X(y_1 + \lambda_1, y_2 - \lambda_1, y_3 - \lambda_2) \Phi_T(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 + \\ & + \int_{\Pi} f^X(x_1) \Phi_T(x_1 - \lambda_1; x_1 - \lambda_2) dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2) \Phi_T(x_2 + \lambda_1; x_2 + \lambda_2) dx_2 + \\ & + \int_{\Pi} f^X(x_1) \Phi_T(x_1 - \lambda_1; x_1 + \lambda_2) dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2) \Phi_T(x_2 + \lambda_1; x_2 - \lambda_2) dx_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим предел при $T \rightarrow \infty$, учитывая непрерывность $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ на

Π^3 и $f^X(\lambda)$ на Π .

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{T} \iiint_{\Pi'} f_4^X(y_1 + \lambda_1, y_2 - \lambda_1, y_3 - \lambda_2) \Phi_T(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \\ & \int_{\Pi} f^X(x_1) \Phi_T(x_1 - \lambda_1; x_1 - \lambda_2) dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2) \Phi_T(x_2 + \lambda_1; x_2 + \lambda_2) dx_2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \\ & \quad \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi} \\ f^X(\lambda_1) f^X(\lambda_2), & \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \\ & \int_{\Pi} f^X(x_1) \Phi_T(x_1 - \lambda_1; x_1 + \lambda_2) dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2) \Phi_T(x_2 + \lambda_1; x_2 - \lambda_2) dx_2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \\ & \quad \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi} \\ f^X(\lambda_1) f^X(\lambda_2), & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом, построенная оценка взаимной спектральной плотности не состоятельная. Для состоятельности оценки, сгладим её спектральными окнами ([2], стр.72).

$$\hat{f}_s^T(\lambda_s) = \sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k) \hat{I}_s^T(\lambda_s + k), \quad \lambda_s = \frac{2\pi s}{T}, \quad -\left[\frac{T}{2}\right] + 1 \leq s \leq \left[\frac{T}{2}\right]. \quad (5)$$

Теорема 2. Если семинвариантная спектральная плотность четвёртого

порядка $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ непрерывна на Π^3 , спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π и $\sum_{k=-\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} [\varphi^T(k)]^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, то статистика $\hat{f}^T(\lambda_s)$, задаваемая равенством (5) является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Доказательство. Найдём дисперсию оценки $\hat{f}^T(\lambda_s)$.

$$D \hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k_1=-\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} \sum_{k_2=-\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} \varphi^T(k_1) \varphi^T(k_2) \text{cov} \left\{ \hat{I}^T(\lambda_{s+k_1}), \hat{I}^T(\lambda_{s+k_2}) \right\}.$$

Если $k_1 \neq k_2$, то $D \hat{f}^T(\lambda_s) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ по теореме 1.

$$\text{Если } k_1 = k_2, \text{ то } D \hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k=-\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} [\varphi^T(k)]^2 \times$$

$$\times \left[\frac{2\pi}{T} \iiint_{\Pi^3} f_4^X(y_1 + \lambda_{s+k}, y_2 - \lambda_{s+k}, y_3 - \lambda_{s+k}) \Phi_T(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 + \right. \\ \left. + \int_{\Pi} f^X(x_1) \Phi_T(x_1 - \lambda_{s+k}; x_1 - \lambda_{s+k}) dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2) \Phi_T(x_2 + \lambda_{s+k}; x_2 + \lambda_{s+k}) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_{\Pi} f^X(x_1) \Phi_T(x_1 - \lambda_{s+k}; x_1 + \lambda_{s+k}) dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2) \Phi_T(x_2 + \lambda_{s+k}; x_2 - \lambda_{s+k}) dx_2 \right].$$

Из условия теоремы следует, что $D \hat{f}^T(\lambda_s) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$. Теорема доказана.

Литература. 1. Hideaki Sakai, Takashi Soeda and Hidekatsu Tokumaru. «On the relation between fitting autoregression and periodogram with application», The Annals of Statistics, 1979, Vol.7, No 1, 96-107. 2. Труш Н. Н. «Асимптотические методы статистического анализа временных рядов», Мн.:БГУ, 1999.

АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВНОЙ ПЛОТНОСТИ ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ БЕЗРИСКОВОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Казанцева О.Г., БГУ, г. Минск

В работе предложена аппроксимация условной плотности вероятностей двумерного процесса, используемого в двухфакторной модели безрисковой процентной ставки.

Рассмотрим двухфакторную модель безрисковой процентной ставки $r(t)$, представленной в виде пары стохастических дифференциальных уравнений (1)

$$\begin{cases} dr(t) = k_1(r(t) - l(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r} dW_1(t), \\ dl(t) = k_2(l(t) - \theta)dt + \sigma_2 \sqrt{l} dW_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Средние, дисперсии процессов и ковариация $r(t)$ и $l(t)$:

$$E[r(t) | r(v), l(v)] = \frac{\theta}{k_1 - k_2} [k_1(1 - e^{-k_2(t-v)}) - k_2(1 - e^{-k_1(t-v)})] + r(v)e^{-k_1(t-v)} + l(v) \frac{k_1}{k_1 - k_2} (e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}), \quad (2)$$

$$E[l(t) | l(v)] = \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + l(v)e^{-k_2(t-v)} \quad (3)$$

$$D[r(t) | r(v), l(v)] = \left(\frac{k_2 \theta}{(k_1 - k_2)k_1} + \frac{r(v)}{k_1} - \frac{l(v)}{k_1 - k_2} \right) \sigma_1^2 e^{-2k_1(t-v)} + \frac{\theta \sigma_1^2}{2k_1} + \left(\frac{1}{2} \frac{k_2 \theta}{k_1(2k_1 - k_2)} - \frac{r(v)}{k_1} + \frac{l(v)}{2k_1 - k_2} \right) \sigma_1^2 e^{-2k_1(t-v)} + \frac{k_1 \sigma_1^2 (l(v) - \theta) e^{-k_2(t-v)}}{(k_1 - k_2)(2k_1 - k_2)} + 2\sigma_2^2 \frac{k_1^2 (l(v) - \theta) e^{-k_2(t-v)}}{(k_1 - k_2)(2k_1 - k_2)k_2} + 2k_1^2 \sigma_2^2 \left(\frac{\theta}{k_1 + k_2} + \frac{r(v)}{k_2} - \frac{l(v)}{k_2} \right) \frac{e^{-(k_1 + k_2)(t-v)}}{(k_1 - k_2)^2} + \quad (4)$$

$$+ k_1^3 \sigma_2^2 \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{k_2 r(v)}{k_1} - l(v) \right) \frac{e^{-2k_2(t-v)}}{(-2k_2 + k_1)k_2(k_1 - k_2)^2} + \frac{k_1 \theta \sigma_2^2}{2k_2(k_1 + k_2)} +$$

$$+ \left(\frac{k_1 l(v)}{k_2(k_1 - k_2)} - \frac{\theta}{k_1 - k_2} - \frac{r(v)}{k_2} \right) \frac{2k_1 \sigma_2^2 e^{-k_1(t-v)}}{-2k_2 + k_1} +$$

$$+ \left(\frac{k_1 l(v)}{2k_1 - k_2} - \frac{1}{2} \frac{k_2 \theta}{2k_1 - k_2} - \frac{r(v)}{k_2} \right) \frac{\sigma_2^2 k_1 e^{-2k_1(t-v)}}{(k_1 - k_2)^2}.$$

$$D[l(t) | r(v), l(v)] = \sigma_2^2 \frac{k_1 (l(v) - \theta) e^{-k_2(t-v)}}{(k_1 - k_2)k_2} + \frac{\theta \sigma_2^2}{2k_2} + \quad (5)$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2} k_1 \theta + k_2 r(v) - k_1 l(v) \right) \sigma_2^2 e^{-2k_2(t-v)}}{k_2(-2k_2 + k_1)} + \left(-\frac{k_2 \theta}{k_1 - k_2} - \frac{r(v)}{k_1 - k_2} + \frac{k_1 l(v)}{k_1 - k_2} \right) \frac{\sigma_2^2 e^{-k_1(t-v)}}{-2k_2 + k_1}$$

Условная плотность вероятности $p(t, r, l | v, r(v), l(v))$ удовлетворяет прямо-

му уравнению Колмогорова (2):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k_1 \frac{\partial}{\partial r} [(r-l)p] + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rp] + k_2 \frac{\partial}{\partial l} [(l-\theta)p] + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} [lp], \quad (6)$$

с начальным условием $\lim_{t \downarrow v} p(t, r, l | v, r(v), l(v)) = \delta(r-r(v))\delta(l-l(v))$, $v < t$.

К сожалению, решение этого эллиптического уравнения в частных производных с переменными коэффициентами в аналитическом виде получить не удастся. Поэтому попытаемся получить аппроксимацию этого решения.

Для получения идеи о том, как может выглядеть решение, сначала зафиксируем переменную l . Тогда производные по l в уравнении (6) исчезают, и в оставшемся уравнении величина l рассматривается как параметр, т.е. получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (штрих обозначает производную по r)

$$p_r = k_1 [(r-l)p]' + (\sigma_1^2/2k_1)[rp]'', \quad (7)$$

его решением является плотность нецентрального χ^2 распределения с $2(q+1)$ степенями свободы и параметром нецентральность $2u$:

$$p_r(t, r | v, r(v)) = c e^{-u} (s/u)^{q/2} I_q(2\sqrt{us}), \quad (8)$$

где $u = cr(v)e^{-k_1(t-v)}$, $s = cr$, $c = 2k_1(1 - e^{-k_1(t-v)})^{-1}/\sigma_1^2$, $q = 2k_1 l/\sigma_1^2 - 1$. Здесь $I_q(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q .

Теперь в уравнении (6) зафиксируем переменную r , рассматривая ее как параметр. Производные по r в (6) исчезнут, и мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p_l = k_2 [(l-\theta)p]' + (\sigma_2^2/2k_2)p'', \quad (9)$$

Решением этого уравнения является плотность нормального распределения

$$p_l(t, l | v, l(v)) = \frac{\sqrt{k_2}}{\sigma_2 \sqrt{\pi r} \sqrt{1 - e^{-2k_2(t-v)}}} \exp\left(-k_2 \frac{(l-\theta - (l(v)-\theta)e^{-k_2(t-v)})^2}{\sigma_2^2 r (1 - e^{-2k_2(t-v)})}\right). \quad (10)$$

На основе этих рассуждений в качестве аппроксимации решения уравнения (6) можно попробовать взять произведение функций (8) и (10).

Однако интеграл от произведения ни по одной из двух переменных в ана-

литическом виде не вычисляется и существование интеграла по обеим переменным не очевидно.

Поведенный анализ позволяет предположить, что решение $p(r, l)$ уравнения (6) можно аппроксимировать произведением функций, одна из которых (от переменной l) имела бы вид нормальной плотности с дисперсией, пропорциональной переменной r , а другая – такая, чтобы после интегрирования $p(r, l)$ по l получалась плотность вероятностей нецентрального χ^2 распределения, аппроксимация будет тем лучше, чем больше числовых характеристик аппроксимации будет совпадать с точными их значениями, определяемыми формулами (2)–(5).

Имея это в виду, выбираем в качестве аппроксимации решения уравнения (6) функцию

$$p(t, r, l | r(v), l(v)) = \frac{ce^{-\lambda s}}{\sqrt{2\pi r \beta^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(l - \theta - (l(v) - \theta)e^{-k_1(l-v)})^2}{\beta^2 r}\right) \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{\lambda s}), \quad (11)$$

где $\beta^2(t | v, r(v), l(v)) = \frac{D[l(t) | r(v), l(v)]}{E[r(t) | r(v), l(v)]}$, $\lambda(t | v, r(v), l(v)) = (E[r(t) | v, r(v), l(v)] - \theta)/2$,

$$q = \theta/2 - 1, \quad c(t | v) = \frac{2k_1}{\sigma_1^2(1 - e^{-k_1(l-v)})}, \quad s(t | v) = c(t | v)r.$$

Подставим (11) в уравнение (6), чтобы оценить насколько оно отличается от точного решения.

$$Nev = -\frac{\partial p}{\partial t} + k_1 \frac{\partial}{\partial r} [(r-l)p] + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rp] + k_2 \frac{\partial}{\partial l} [(l-\theta)p] + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} [rp].$$

Получается величина, пропорциональная плотности (11).

$$Nev = p(t, r, l | v, r(v), l(v)) * hnev(t, r, l | v, r(v), l(v)),$$

где

$$hnev(t, r, l | v, r(v), l(v)) = \left(\frac{1}{2} \sigma_1^2 c^2 + \frac{\partial c}{\partial t} - k_1 c\right) r + kl \left(\frac{1}{2} + q + lc\right) + \frac{1}{2} c \sigma_1^2 (\lambda - 2q - 1) + k_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{(q+1)}{c} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2} \frac{\partial \beta^2}{\partial t} + \frac{k_1(1-2q)}{2r} + \frac{\sigma_1^2(4q^2-1)}{-8r} + \frac{\sigma_1^2(l-a)^4}{\beta^4 r^3} + \frac{(l-a)}{2r\beta^2} (2k_2(\theta-l) - 2\frac{\partial a}{\partial t}) + \frac{(l-a)^2}{2r\beta^2} \left(k_1 + \sigma_1^2 c + \frac{1}{\beta^2} (\sigma_2^2 - \frac{\partial \beta^2}{\partial t}) + \frac{\sigma_1^2(q-1/2) - k_1 l}{r}\right) +$$

$$+ \frac{I_{q+1}(2\sqrt{r\lambda c})}{I_q(2\sqrt{r\lambda c})} \sqrt{r\lambda c} \left(k_1 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \sigma_1^2 c - \frac{1}{\lambda c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial t} c \right) + \frac{\sigma_1^2 q}{2r} + \frac{\sigma_1^2 (l-a)^2}{2\beta^2 r^2} \right),$$

где $a(t | v, l(v)) = E[l(t) | l(v)]$, и для краткости аргументы функций $\lambda(t | v, r(v), l(v))$, $c(t | v)$, $\beta^2(t | v, r(v), l(v))$, $a(t | v, l(v))$ опущены.

Литература. 1. Казанцева О.Г. Оценки параметров двухфакторной модели процентных ставок. Математические методы в финансах и эконометрика: Материалы конференции. Минск, 2002, стр. 46-51. 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов, М. 1965г., стр.478-486.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВМАР/G/1 СО СКЛАДОМ С РАЗЛИЧНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ПРОИЗВОДСТВА ЗАГОТОВОК

Казимирский А.В., БГУ, г. Минск

1. Введение

Зачастую при разработке информационных систем, исследовании производственных процессов и т.д. можно встретить с ситуацией, когда технологическую последовательность обработки требования можно разделить на несколько независимых частей. При этом в ряде случаев некоторые из них могут быть выполнены предварительно. Результаты предварительно выполненных частей обслуживания в системах вышеизложенного типа будем называть *заготовками*. Предполагается, что заготовки до их использования хранятся на *складе* заготовок, и если обслуживание начинается при непустом складе заготовок, то оно зависит от числа заготовок на складе и после обслуживания требования со склада исчезает и заготовка.

Очевидно, что может существовать ряд стратегий подготовки заготовок. В данной работе мы исследуем систему со следующей: как только очередь заявок оказывается пустой, обслуживающий прибор начинает производить группу заготовок; размер которой задан заранее и является константой.

2. Математическая модель

Рассмотрим модель так называемой однолинейной системы со складом заготовок. Данная система функционирует следующим образом. В систему поступает поток требований, которые помещаются в бесконечный буфер. Время

обслуживания требований зависит от текущего количества заготовок на складе. Прибор начинает производство группы заготовок, когда очередь становится пустой. Если за время производства группы заготовок не пришло требований, то начинается производство еще одной группы заготовок. В противном случае, система немедленно приступает к обслуживанию пришедших требований. Произведенные заготовки помещаются на склад заготовок, который может хранить до K единиц заготовок. Когда склад оказывается заполнен, прибор прекращает производство заготовок и ожидает прихода требования.

В данной работе рассматривается система $ВМАР/G/1$ со складом заготовок.

В систему поступает групповой марковский поток требований (ВМАР), согласно [1] характеризуемый при помощи матричной производящей функции $D(z)$, $|z| < 1$ интенсивностей переходов управляющей цепи Маркова.

Время обслуживания требований зависит от текущего количества заготовок на складе и имеет функцию распределения $B^{(j)}(t)$, $j=0,1,\dots,K$ с математическим ожиданием $b_j^{(j)}$. Время производства заготовок также зависит от текущего количества заготовок на складе и имеет функцию распределения $C^{(j)}(t)$, $j=0,1,\dots,K$ с математическим ожиданием $c_j^{(j)}$. Размер группы заготовок также зависит от текущего количества заготовок на складе и равен $n^{(j)} = 0,1,\dots,j+n^{(j)} \leq K$, $j=0,1,\dots,K$. Соответственно введём функцию распределения времени производства группы заготовок $H^{(j)}(t)$, $j=0,1,\dots,K$ как свёртку функций распределения с $B^{(j)}(t)$ по $B^{(j+n^{(j)}-1)}(t)$.

Мы будем исследовать процесс с непрерывным временем $\xi_r = (i_r, j_r, v_r)$, $t \geq 0$, где $i_r = 0,1,\dots$ – количество требований в очереди, $j_r = 0,1,\dots,K$ – число заготовок на складе, $v_r = 0,1,\dots,W$ – состояние управляющего процесса ВМАР-потока в момент времени t .

Для исследования данного процесса построим вложенную цепь Маркова с дискретным временем $\xi_n = (i_n, j_n, v_n)$, $n = 1,2,\dots$ в следующие моменты времени $t_n + 0$, $n=1,2,\dots$: (1) начало обслуживания требования, (2) начало производства

группы заготовок.

Обозначим одношаговые переходные вероятности вложенной цепи Маркова и введём матрицы переходных вероятностей

$$P((i, j, v) \rightarrow (i', j', v')) = P\{i_{n+1}=i', j_{n+1}=j', v_{n+1}=v' \mid i_n=i, j_n=j, v_n=v\}, n=1, 2, \dots$$

$$P((i, j) \rightarrow (i', j')) \triangleq \| P((i, j, v) \rightarrow (i', j', v)) \|_{v, v'=0, 1, \dots, M},$$

$$P((i) \rightarrow (i')) = \| P((i, j) \rightarrow (i', j')) \|_{j, j'=0, 1, \dots, K},$$

Лемма 1. Матрицы переходных вероятностей цепи Маркова ξ_n определяются следующим образом:

$$P((0) \rightarrow (i')) = V_i, i'=0, 1, \dots,$$

$$P((i) \rightarrow (i')) = Y_{i+1}, i+1 \geq i=1, 2, \dots,$$

$$V_i = \| V_i(j, j') \|_{j, j'=0, 1, \dots, K}, Y_i = \| Y_i(j, j') \|_{j, j'=0, 1, \dots, K}, i=0, 1, \dots,$$

$$n^0 = 0: V_0(j, j+1) = R^0, V_i(j, j) = D_0^{-1}(R^0 - I)D_i, i=1, 2, \dots,$$

$$n^0 = 1, 2, \dots: V_i(j, j+n^0) = G_i^0, i=0, 1, \dots,$$

$$Y_i(0, 0) = F_i^0, Y_i(j, j-1) = F_i^0, j=1, 2, \dots, K,$$

$$R^0 = \int_0^\infty \exp\{D_0 t\} dC^0(t),$$

$$F^0(z) = \sum_{i=0}^\infty F_i^0 z^i = \int_0^\infty \exp\{D(z)t\} dB^0(t),$$

$$G^0(z) = \sum_{i=0}^\infty G_i^0 z^i = \int_0^\infty \exp\{D(z)t\} dH^0(t), j=0, 1, \dots, K, |z| \leq 1.$$

В результате применения аналитического (см. [2]) и матрично-аналитического подходов (см. [3]) удалось найти стационарное распределение вложенной цепи Маркова. При помощи ключевой теоремы марковского восстановления (см. [2]) удалось найти стационарное распределение введённого выше процесса с непрерывным временем $\xi_n, t \geq 0$.

3. Численный пример

В данном примере мы оптимизируем систему ВМАР/G/1 со складом заготовок по размеру склада заготовок K с экономическим функционалом

$$I(K) = 15K + 30L + 20N + 100p_s(0) + 1000 \sum_{j=1}^K p_s(j) + 500 \sum_{j=0}^{K-1} p_l(j),$$

где K — размер склада заготовок, L — средняя длина очереди в системе, N — среднее число используемых мест на складе, $p_s(j)$ ($p_l(j)$) — доли времени исполь-

зования j -ого режима обслуживания (производства заготовок).

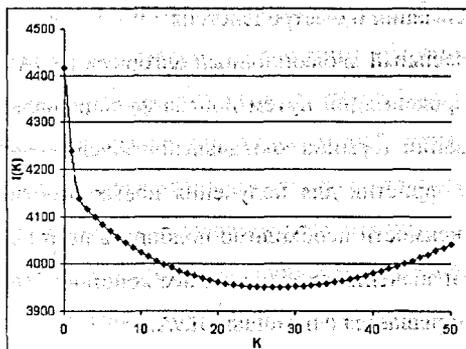
ВМАР-поток задан следующими матрицами интенсивностей переходов (построчно):

$$D_0 = ((-3,335593; 0,00038786); 0,00038786; -0,10666141));$$

$$D_1 = D_2 = ((1,6484036; 0,01919905); 0,0038786; 0,04925818)).$$

Время производства заготовки, время обслуживания требования имеют вырожденное распределение со следующими математическими ожиданиями:

$$c_1^{(0,1,\dots,K)} = 0,1; b_1^{(0)} = 0,6; b_1^{(1,2,\dots,K)} = 0,2; n^{(0,1,\dots,K)} = 0.$$



В результате численного эксперимента было найдено (см. рисунок слева), что функционал качества достигает минимального значения при $K=27$.

Литература. 1. Lucantoni D. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stochastic Models*, 7, 1-46, 1991. 2. А.Н. Дудин, В.И. Клименок. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000. 3. Neuts, M. F. Structured stochastic matrices of M[G]1 type and their applications. Marcel Dekker: New York, USA, 1989.

ЛОКАЛЬНЫЙ ЭВОЛЮЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ

Киришин Е.А., Юганов А.В., ПГУ, Новополюцк

В настоящее время с развитием вычислительной техники все большее значение приобретает задача аппроксимации, которая представляет собой нахождение функциональной зависимости между входными и выходными переменными на основании известных замеров – наборов значений входных и соответствующих им выходных переменных. С помощью аппроксимации решаются задачи распознавания, прогнозирования, нахождения корней уравнений, решения систем уравнений и др.

В настоящее время существует множество методов решения задачи аппроксимации. Среди них — нейронные сети, генетические (эволюционные) алгоритмы, полиномиальная регрессия, аппроксимация сплайнами, полиномы Чебышева и др. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Основным недостатком большинства алгоритмов является их неуниверсальный характер, то есть каждый из них даёт удовлетворительные результаты только при определённых типах аппроксимируемой поверхности или требует модификации в соответствии с ней. Кроме универсальности, к алгоритмам предъявляются также требования точности аппроксимации и быстродействия.

В данной работе представлен локальный эволюционный алгоритм (ЛЭА), обеспечивающий решение задачи аппроксимации путём поиска функциональной зависимости. Присутствие в названии термина «локальный» обусловлено локальным характером применяемых эвристик для получения новых особей. Для нахождения функциональной зависимости необходимо подбирать не только тип функции, т.е. её структуру, но и значения входящих в неё констант. Эта чрезвычайно сложная задача с успехом решается с помощью ЛЭА.

Для реализации ЛЭА требуется:

1. Определить способ кодирования функциональной зависимости и набор математических операций, используемых в её представлении.
2. Определить набор используемых эвристик.
3. Разработать способ организации особей в популяции.
4. Выбрать способ оценки качества аппроксимации особей-функций.

Как и в традиционных генетических алгоритмах, в данном ЛЭА присутствует популяция, хранящая в себе текущие найденные функции в виде хромосом, объединённых в группы - подпопуляции. Объединение в группы производится по типу функций. Считается, что функции имеют одинаковый тип, если они отличаются только значениями констант. Подпопуляции необходимы для поддержания в популяции определённого числа функций одного типа и предотвращения вхождения поиска констант в локальный оптимум.

В отличие от традиционного генетического алгоритма, в данном ЛЭА делается отступление от представления хромосомы как набора генов, т.е.; если рассматривать программную реализацию, в виде некоторой последовательности битов. Функции представляются в виде деревьев, узлы которых – операторы, переменные либо константы. Такое представление функций обеспечивает быструю реализацию алгоритма, т.к. делает более простым осуществление над хромосомами некоторых необходимых эвристик (Grow, Crossover, Mutation – см. далее).

Функции состоят из операций, выбираемых из определенного набора. Этот набор представлен следующими операциями: сложение, вычитание, умножение, деление, экспонента, десятичный логарифм, синус, квадратный корень.

Для оценки пригодности найденных функций создана фитнес-функция, вычисляющая величину качества аппроксимации Q . Q вычисляется как среднее квадратичное отклонение рассчитанных значений функции в точках замеров от заданных значений функции в точках замеров.

Замеры – это входные данные для алгоритма. Они представляют собой набор значений аргументов и соответствующих им значений функций.

Для ускорения нахождения аппроксимации разработана и внедрена в алгоритм операция сдвига функции (ShiftFunc). Математически можно показать, что среднее квадратичное отклонение минимально, когда среднее отклонение равно нулю. Равенство нулю среднего отклонения можно обеспечить, сдвигая функцию вдоль ее оси на значение среднего отклонения с обратным знаком. Для такого сдвига при каждой функции имеется добавочная константа Const. Т.е. функции имеют следующий вид: $F = f + \text{Const}$, где f – значение, посчитанное по дереву; F – результирующее (выходное) значение.

Одним из важнейших компонентов генетического алгоритма является набор применяемых для получения новых особей эвристик. В данном алгоритме применяются следующие эвристики:

- Мутация узлов и констант (Mutation).

Применяется мутация двух типов: локальная (изменяет только один узел/константу) и глобальная (изменяется сразу несколько констант).

- Дорастивание (Grow).

Данная эвристика изменяет произвольно выбранное поддерево

- Скрещивание (Crossover).

Произвольным образом выбираются 2 особи из текущей популяции, затем осуществляется обмен их произвольных поддеревьев; находящихся на одном уровне.

- Рандомная генерация.

Создание функции случайным образом.

Как и генетические алгоритмы в целом, данный эволюционный алгоритм производит итерационное улучшение текущей популяции. На каждой итерации применяются эвристики для получения новых особей и, в зависимости от оценки Q , выданной фитнес-функцией, производится добавление новой особи в популяцию. В алгоритме имеется множество динамически изменяемых параметров. Например, диапазон изменения констант, критерий добавления особей в популяцию, размер популяции и др.

Исследование ЛЭА производилось в сравнении с нейронными сетями, методом полиномиальной регрессии и визуально – по графику аппроксимирующей поверхности.

В таблице 1 приведены результаты сравнения с нейронной сетью с алгоритмом обратного распространения ошибки, реализованной в программе Delta. В обоих алгоритмах использовались одинаковые методы оценки – среднее квадратичное отклонение.

Таблица 1. Результаты сравнения LGA и Delta

Функция	Q (Delta)	Худшее Q (LGA)	Лучшее Q (LGA)	Среднее Q (LGA)
$55.3 * X_1 + 2.365 * X_2 + 0.58 * X_3$	20526498	4155	$1,2 * 10^{-8}$	2065
$X_3 * X_3 - (X_2 + X_4) + \lg(X_4 - X_1)$	13895	0,16	0,05	0,07
$X_3 - X_2 * (\lg(X_1))$	18966	500	$4,01 * 10^{-26}$	228

В результате исследования обнаружено, что во многих случаях ЛЭА дает лучшее решение в сравнении с другими методами. Таким образом, можно сказать, что ЛЭА является универсальным методом аппроксимации.

Литература. 1. Г.К. Вороновский, К.В. Махотило, С.Н. Петрашев, С.А. Сергеев. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. 2. Ф. Уоссермен, Нейрокомпьютерная техника, М., Мир, 1992. 3. S. Grossberg. 1974. Classical and instrumental learning by neural networks. Progress in theoretical biology. 4. И.А. Минаков. 1999. Сравнительный анализ некоторых методов случайного поиска и оптимизации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, №2, 1999. 5. Е.Н. Зайцева, Ю.А. Станкевич. Некоторые современные методы решения оптимизационных задач, Материалы Второй международной конференции «Новые информационные технологии в образовании», 1996.

РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ КОШИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ РОБЕРТСОНА

Кондратюк А.П., БрГУ, Брест

Модель ROBER, описывающая реакцию Робертсона имеет вид:

$$y_1' = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3,$$

$$y_2' = 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2,$$

$$y_3' = 3 \cdot 10^7 y_2^2,$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0, x_{\text{con}} = 1, 10, 10^2, 10^3, \dots, 10^{11}.$$

ROBER — один из наиболее известных примеров жестких задач. Эта задача решалась методом Энрайта третьего порядка [1]. Пусть дана задача Коши следующего вида:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Рассмотрим эту задачу на отрезке $[x_0; x_{\text{con}}]$. Разобьем отрезок точками с одинаковым шагом h . Метод Энрайта третьего порядка имеет следующий вид:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{2}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n \right) - \frac{1}{6} h^2 g_{n+1},$$

где g определяется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'' = f_x + f_y \cdot f = g(x, y).$$

Таким образом, в общем случае, зная y_n , можно найти y_{n+1} . Но так как метод Энрайта — неявный метод, то для нахождения очередного y_{n+1} нужно решать систему нелинейных уравнений. Система нелинейных уравнений решалась следующим методом [2]:

$$(\alpha E \|f(x_n)\|^2 + f'(x_n) f'(x_n)) \Delta x_n = -f'(x_n) f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n,$$

где $\beta_n = \min(1, \frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_n)\|} \beta_0)$, а также $\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|} \beta_n)$, где $\gamma \approx 10^3 + 10^4$, $\beta_0 \in [10^{-7}, 10^{-4}]$ на первом шаге и β_n — произвольное значение на последующих шагах.

При решении системы нелинейных уравнений на текущем шаге вследствие того, что задача является жесткой, может возникнуть следующая проблема: функция y может резко измениться. Это приведет к тому что метод решения нелинейной системы будет долго сходиться на каждом шаге, а может вообще не сойтись. В связи с этим необходимо в случае увеличения числа итераций уменьшить шаг и решать нелинейную систему с меньшим шагом. Если функция слабо меняется при сравнительно небольшом h то, с целью экономии машинного времени можно увеличить шаг. Существует и другая проблема. При увеличении h растет погрешность вычислений, так как точность рассмотренного выше метода Энрайта имеет порядок $O(h^3)$. Таким образом, нужно задать максимально эффективный шаг h для данного алгоритма, который, как показывает практика, находится в промежутке $h \in [10^{-2}, 10^{-4}]$. В данной работе предусматривается возможность восстановления полученного решения с помощью полиномов Чебышева. Для того, чтобы использовать такую аппроксимацию, нужно знать значения искомых функций в узлах полиномов Чебышева. Для этого нужно согласовать шаг при решении задачи со значениями корней полинома Чебышева.

В связи с тем, что задача Робертсона жесткая, приходится брать шаг h достаточно маленьким, что приводит к необходимости решать большое число нелинейных задач. Поэтому процесс решения требует, вообще говоря, немалых вычислительных затрат.

Вычислительный эксперимент показал эффективность предложенных подходов при решении задачи Робертсона. Невязка на полученном приближенном решении была порядка 10^{-4} , что хорошо согласуется с невязками для жестких задач.

Литература. 1. Хайрер Э. Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. Мир, 1999. 2. Мадорский В.М. О некоторых подходах к построению нелокальных итерационных процессов. // Труды международной научной конференции «Статистический и прикладной анализ временных рядов»(SAATS-97). 1997.С.257.

ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ В АНАЛИЗЕ ПОТОКА СВОБОДНЫХ ДЕНЕЖНЫХ СРЕДСТВ

Коростелева Л.Ю., БГТУ, г.Брест

Предположим, что есть эксперт, задача которого заключается в оценке перспектив движения денежных средств. Если у него запросить прогноз относительно некоей исчисляемой величины на последующий период, можно с уверенностью сказать, что ответ не будет точным числом. Т. к. в лучшем случае эксперт даст три числа, его оценки можно перевести в область нечетких расчетов, представив их, например, нечеткими треугольными числами. Например, эксперт оценивает, что закупки для производственных целей за наличный расчет составят не менее 450, не превысят 485, наиболее вероятным представляется, что они составят 470. Тогда треугольное нечеткое число будет иметь вид $(450, 470, 485)$. Если при составлении оценок о "продажах, связанных с производством, за наличный расчет" эксперт указывает, что они будут не менее 450; не более 500, но полагает, что они составят 460, то он тем самым определил нечеткое треугольное число:

$$\tilde{V} = (450, 460, 500)$$

При таком подходе уровень предположительности α о нижней и верхней границах, естественно, считается равным 0, а уровень предположительности наиболее вероятного значения равным 1.

Зная НТЧ как тройку чисел $\tilde{V} = (450, 460, 500)$, путем несложных вычислений можно преобразовать его в НТЧ в форме α -срезов. Для нахождения

нижней границы НТЧ в форме α -срезов; необходимо найти уравнение прямой, проходящей через точку, представляющую минимальное значение, относящуюся к НТЧ, и точку максимальной предположительности. Тогда уравнение прямой будет иметь вид $\frac{\alpha-0}{1-0} = \frac{v-450}{460-450}$. Отсюда: $v = 450 + 10\alpha$ - нижняя граница

НТЧ в форме α -срезов. Аналогично для верхней границы, уравнение прямой будет иметь вид $\frac{\alpha-1}{0-1} = \frac{v-460}{500-460}$. Отсюда $v = 500 - 40\alpha$ - верхняя граница НТЧ в

форме α -срезов. Таким образом можно перейти от выражения НТЧ как тройки чисел (450, 460, 500) к другому выражению того же НТЧ, но в форме α -срезов, т. е. в виде интервала $V = [450 + 10\alpha, 500 - 40\alpha]$ для $0 \leq \alpha \leq 1$. Аналогично суждение эксперта о показателе "покупки за наличный расчет" в форме α -срезов будет иметь вид $C_a = [450 + 20\alpha, 485 - 15\alpha]$

Чистое изменение денежных средств также может быть найдено в виде НТЧ с помощью операции (-):

$$\tilde{T} = (450, 460, 500)(-)(450, 470, 485) = (-35, -10, 50).$$

В форме α -срезов будем иметь

$$\begin{aligned} T_a &= v_a(-)C_a = [450 + 10\alpha, 500 - 40\alpha](-)[450 + 20\alpha, 485 - 15\alpha] = \\ &= [450 + 10\alpha - 485 + 15\alpha, 500 - 40\alpha - 450 - 20\alpha] = [-35 + 25\alpha, 50 - 60\alpha] \end{aligned}$$

Рассмотрим пример, где привлечено несколько экспертов с тем, чтобы они дали свои оценки показателям, определяющим чистое колебание денежных средств предприятия. Будем считать, что имеется только один источник поступлений и одно направление использования денежных средств. Мнения экспертов в виде НТЧ о будущих поступлениях денежных средств и их расходовании приведены в Таблице 1. Колебания нетто денежных средств вычислены с помощью операции (-). Обозначим через \tilde{V}_i оценку поступлений экспертом i , \tilde{C}_i - оценку расходования тем же экспертом. Разница между этими значениями выражена \tilde{T}_i , где $i = 1, 2, \dots, 10$, и отражает колебания нетто денежных средств по мнению эксперта i .

Таблица 1. Оценки экспертов

Эксперты	Поступления	Расходы	Чистое колебание денежных средств
1	(450, 460, 500)	(450, 470, 485)	(-35, -10, 50)
2	(460, 490, 520)	(440, 460, 470)	(-10, 30, 80)
3	(400, 440, 460)	(420, 430, 455)	(-55, 10, 40)
4	(425, 440, 480)	(380, 400, 420)	(5, 40, 100)
5	(440, 445, 510)	(400, 420, 430)	(10, 25, 110)
6	(390, 465, 490)	(340, 470, 490)	(-100, -5, 150)
7	(415, 450, 470)	(360, 380, 420)	(-5, 70, 110)
8	(470, 490, 530)	(400, 440, 445)	(25, 50, 130)
9	(420, 440, 480)	(370, 400, 420)	(0, 40, 110)
10	(440, 470, 490)	(400, 420, 435)	(5, 50, 90)

Для получения с помощью нечеткого числа представления об обобщенном мнении экспертов перейдем к получению соответствующих средних нечетких чисел.

Как известно, если имеется n нечетких чисел $\tilde{A}_\alpha^{(i)} = [a_1^{(i)}(\alpha), a_2^{(i)}(\alpha)]$, $i = 1, 2, \dots, n$, выражающих \tilde{A} в форме α -срезов, среднее нечеткое число будет

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^m(\alpha), a_2^m(\alpha)], \text{ где } a_1^m(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_1^{(i)}(\alpha), \quad a_2^m(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_2^{(i)}(\alpha). \quad (1)$$

В предположении о НТЧ можно использовать для простоты трехкомпонентную форму. В рассмотренном примере имеем:

$$\tilde{V} = \frac{1}{n} \sum (a, b, c) = \frac{1}{10} (-)(4310, 4590, 4930) = (431, 459, 493).$$

$$\text{Таким же образом получаем } \tilde{C} = \frac{1}{10} (-)(3960, 4290, 4470) = (396, 429, 447).$$

$$\text{Наконец } \tilde{T} = \frac{1}{10} (-)(-160, 300, 970) = (-16, 30, 97).$$

Итак, если считать, что набор нечетких чисел — это эффективное средство формализации суждений экспертов и принять в качестве представления их обобщенного мнения среднее нечеткое число, то в результате оказывается, что за рассматриваемый период величина изменения денежных средств колеблется между сокращением на 16 и ростом на 97. Прогнозируется, что наиболее вероятен рост на 30 единиц.

Литература. 1. А. Кофман «Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями» - Мн., 1992. 2. А.М. Хил Лафуренте «Финансовый анализ в условиях неопределенности» - Мн., 1998.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Кулеш Е.Е., ГрГУ, Гродно

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с рациональной правой частью

$$y_x(y_{xxx} - 18yy_{xx} - 9y_x^2 + 24y^3 + F)_x = y, \quad (1)$$

где $F = Ay_{xxx} + By_{xx} + Cy_x + Dy_x + Ey^2 + Gy + H$, коэффициенты A, \dots, H — аналитические в некоторой области функции от x, t . Исследуем уравнение (1) на наличие свойства Пенлеве. Чтобы уравнение (1) имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы соответствующее ему уравнение

$$y_{xxx} - 18yy_{xx} - 9y_x^2 + 24y^3 + F = 0 \quad (2)$$

обладало этим свойством. В связи с этим исследуем вначале уравнение (2). Отметим, что уравнение (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, где t параметр. Выполним замену

$$y = f_x^2 v(\xi, t) + \beta(x, t), \quad \xi = f(x, t).$$

В результате получим уравнение вида (2) с новыми коэффициентами $\tilde{A}, \dots, \tilde{H}$ соответственно. Функции $f(x; t)$ и $\beta(x, t)$ подберем таким образом, чтобы имели место равенства

$$Af_x + 14f_{xx} = 0, \quad 16f_x f_{xxx} + 39f_x^2 + 9Af_x f_{xx} + Bf_x^2 - 18\beta f_x^2 = 0.$$

Тогда получим $\tilde{A} = 0$ и $\tilde{B} = 0$. В старых обозначениях уравнение (2) примет вид

$$y_{xxx} - 18yy_{xx} - 9y_x^2 + 24y^3 + Cy_x + Dy_x + Ey^2 + Gy + H = 0. \quad (3)$$

Если искать решение уравнения (3) в виде ряда

$$y = (x - x_0)^2 + q(x - x_0)^{-1} + p_0 + p_1(x - x_0) + \dots + p_{k-2}(x - x_0)^{-k+2} + \dots, \quad (4)$$

где $q = q(t), p_k = p_k(t), k = 0, 1, 2, \dots, x_0 = x_0(t)$, то для определения r получим уравнение $r^4 - 14r^3 + 53r^2 - 28r - 96 = 0$, откуда $r = -1, 3, 4, 8$. Значит, коэффициенты p_1, p_2, p_0 и x_0 должны быть произвольными функциями от t . Разложим

функции C, \dots, H по целым неотрицательным степеням $x - x_0$, например

$$C = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + \dots, \text{ где } C_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k C(x_0, t)}{\partial x^k}$$

Подставляя ряд (4) в уравнение (3), и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, получим

$$q = -\frac{1}{42} C_0, \quad p_0 = \frac{17}{7056} C_0^2 - \frac{1}{18} C_1 + \frac{1}{36} E_0.$$

Из первого резонансного условия найдем

$$D_0 = \frac{41}{252} C_0 C_1 - \frac{1}{168} C_0^2 - \frac{11}{126} C_0 E_0 - C_2 + \frac{1}{2} E_1 \quad (5)$$

Для выполнения второго резонансного условия необходимо требовать

$$C_0 = 0, \quad G_0 = E_2 - \frac{1}{9} E_0^2 \quad (6)$$

Поскольку $C_0 = C(x_0, t)$, а $x_0(t)$ — произвольная функция, то $C = 0$. Рассуждая аналогично, из условий (5), (6) получим

$$D = \frac{1}{2} E_x, \quad C = 0, \quad G = \frac{1}{2} E_x - \frac{1}{9} E^2 \quad (7)$$

Далее найдем

$$p_3 = \frac{1}{6} E_0 p_1 - \frac{1}{216} E_0 E_1 + \frac{1}{36} E_x,$$

$$p_4 = \frac{5}{168} E_1 p_1 + \frac{5}{84} E_0 p_2 + \frac{3}{4} p_1^2 - \frac{1}{46656} E_0^3 - \frac{5}{3024} E_0 E_2 - \frac{1}{756} E_x^2 + \frac{1}{28} E_x + \frac{1}{84} H_0,$$

$$p_5 = \left(\frac{1}{192} E_0^2 + \frac{1}{24} E_2 \right) p_1 + \frac{1}{32} E_1 p_2 + \frac{3}{4} p_1 p_2 + \frac{1}{16} E_x^2 + \frac{1}{96} H_x -$$

$$- \frac{25}{124416} E_1 E_0^2 - \frac{1}{432} E_1 E_x.$$

Третье резонансное условие выполнено, если $E_2 = 0, E_1 = 0, H_2 = 0$, т. е. если $E_x = 0$ и $H_x = 0$. Пусть $E = 3a, H = bx + c$, где a, b, c — функции от t . Условия (7) при этом примут вид

$$D = 0, \quad C = 0, \quad G = -a^2.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$y_{xxx} - 18yy_{xx} - 9y_x^2 + 24y^3 + 3ay^2 - a^2y + bx + c = 0.$$

Значит, вместо (1) будем рассматривать уравнение

$$y_x(y_{xxx} - 18yy_{xx} - 9y_x^2 + 24y^3 + 3ay^2 - a^2y + bx)_x = y_x. \quad (8)$$

где a и b – функции от t . Проверим выполнение необходимого условия наличия свойства Пенлеве для уравнения (8). С этой целью будем искать решение уравнения (8) в виде ряда

$$y = \varphi^{-2} + q\varphi^{-1} + p_0 + p_1\varphi + p_2\varphi^2 + \dots + p_{r-2}\varphi^{r-2} + \dots, \quad (9)$$

где $q = q(t)$, $p_k = p_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varphi = \varphi(x, t)$, $\varphi_x = 1$, т. е. $\varphi = x - \psi(t)$. Причем к резонансным числам, что были указаны ранее добавится еще $r = 6$. Подставляя (9) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ , непосредственно убеждаемся, что p_1, p_2, p_4, p_6 и q , действительно являются произвольными независимыми между собой функциями от t .

Проверим далее выполнение необходимого условия наличия свойства Пенлеве для уравнения (8), если считать $\varphi_x \neq 1$. Будем искать решение уравнения (8) в виде ряда

$$y = q_2\varphi^{-2} + q_1\varphi^{-1} + p_0 + p_1\varphi + p_2\varphi^2 + \dots + p_{r-2}\varphi^{r-2} + \dots, \quad (10)$$

где, $q_1 = q_1(x, t)$, $q_2 = q_2(x, t)$, $p_k = p_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varphi = \varphi(x, t)$, $\varphi_x \neq 1$, $\varphi_x \varphi_t \neq 0$. Подставляя (10) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ , убедимся, что резонансные условия выполняются.

Теорема 1. Чтобы уравнение (1) имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы оно приводилось к виду (8).

Выполним преобразование

$$y = \varphi^{-2}(1 + u_k); \quad \frac{\partial^k y}{\partial x^k} = \varphi^{-2-k} \left((-1)^k \frac{(2+k-1)!}{(k-1)!} + u_{k+1} \right), \quad k = \overline{1, 4}, \quad (11)$$

где $u_k = u_k(x, t)$, $k = \overline{1, 5}$. С учетом формул (11) из уравнения (8) получим для u_k систему типа Брио и Буке

$$\begin{aligned} \varphi(u_k)_x &= (k+1)u_k + u_{k+1}, \quad k = \overline{1, 4}, \\ \varphi(u_5)_x &= -14u_1 + 144u_2 - 72u_3 + 18u_4 + 6u_5 + \Phi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, (u_1)_t), \end{aligned} \quad (12)$$

где Φ – нелинейная функция своих аргументов. Резонансные числа системы (12) найдем из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-r & 1 & 0 \\ -144 & 144 & -72 & 18 & 6 & -r \end{vmatrix} = 0.$$

Получим $r = -1, 3, 4, 6, 8$, то есть резонансные числа системы (12) совпадают с резонансными числами уравнения (8). Тогда формальный ряд (9), представляющий решение уравнения (8) сходится в силу теоремы, доказанной в работе [1].

Литература. 1. Кулеш Е.Е. О сходимости полярных разложений решений нелинейных уравнений в частных производных // *Вестник ГрДУ. Сер. 2.* – 2003. – №1(19). – С.11–15.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Курочка О.Н., Юдов А.А., БрГУ, г. Брест

Пусть заданы два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) пространства M .

Определение. Два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G -пространства M называются эквивалентными (или G -эквивалентными), если существует элемент $a \in G$ такой, что

$$g(x_0) = T_a(f(x_0)), \quad \forall x_0 \in D_0. \quad (1)$$

Определение. Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

Классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

Теорема 1. Два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G -пространства $M=G/H$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, r$, где ω^i – базисные левоинвариантные формы на группе Ли G (т. е. базис в \bar{G}^*), а \hat{f} и \hat{g} – канонические лифты подмногообразий (D_0, f) и (D_0, g) .

Следствие 1. Подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G -пространства M тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны (в группе G) их канонические лифты.

Теорема 2. Для того, чтобы подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ на D_0 , такой, что $\widehat{d f(V_i)}^* = \widehat{d g(V_i)}^*$ и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах $\widehat{d f(V_i)}^*$ и $\widehat{d g(V_i)}^*$ совпадают.

Теорема 3. Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы H на множестве канонических лифтов n -мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H -эквивалентность соответствующих подмногообразий. Эквивалентность относительно присоединенной группы $\text{Ad}H$ на множестве всех канонических вложений n -мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H -эквивалентность соответствующих подмногообразий.

М. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Кучмиенко И.А., БГУ, Минск

Рассмотрим начальную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$u'(x) = f(x, u(x)); u(t) = y, \quad x \in [t; t + \tau], \quad u \in G \subset R^n \quad (1)$$

При построении методов, численно решающих эту задачу, будем отталкиваться, как и в [1], от интегрального соотношения

$$u(t + \tau\beta) = y + \tau \int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \varphi(\alpha) = f(t + \alpha\tau, u(t + \alpha\tau)), \quad \beta = \frac{x-t}{\tau} \quad (2)$$

Общая схема построения предлагаемых методов заключается в нахождении аналитического приближения правой части (2) по значениям $u(\alpha)$ лишь на конечном наборе точек α_k , $k = 0, m$, зависящем от параметра m , с последующим переходом от уравнения (2) к аппроксимирующей его системе нелинейных уравнений относительно значений $u(\alpha_k)$.

Рассмотрим два конкретных подхода к построению методов такого типа.

1. Проинтерполируем подынтегральное выражение $\varphi(\alpha)$ из (2) с помощью функций $q_k(\alpha)$, $k = \overline{0, m}$, по узлам α_i , $i = \overline{0, m}$. Интегрируя точно полученное интерполяционное представление, имеем желаемое аналитическое приближение интеграла в правой части (2):

$$u(t + \tau\beta) \approx y + \tau \sum_{k=0}^m c_k \int_0^\beta q_k(\alpha) d\alpha. \quad (3)$$

Коэффициенты c_k находятся из условий

$$\varphi(\alpha_j) = \sum_{k=0}^m c_k q_k(\alpha_j), \quad j = \overline{0, m}$$

Положив в выражении (3) последовательно $\beta = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, будем иметь для приближенных значений $y_i \approx u(t + \alpha_i \tau)$ систему равенств

$$y_i = y + \tau \sum_{k=0}^m c_k \int_0^{\alpha_i} q_k(\alpha) d\alpha, \quad i = \overline{0, m}, \quad f(t + \tau\alpha_j, y_j) = \sum_{k=0}^m c_k q_k(\alpha_j), \quad j = \overline{0, m}.$$

Перепишем эти равенства с использованием обозначений

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y \end{bmatrix}, \quad F(Y) = \begin{bmatrix} f(t + \alpha_0 \tau, y_0) \\ f(t + \alpha_1 \tau, y_1) \\ \vdots \\ f(t + \alpha_m \tau, y_m) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \int_0^{\alpha_i} q_k(\alpha) d\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{i,k}, \quad R = \begin{bmatrix} q_k(\alpha_j) \end{bmatrix}_{j,k}$$

(Q, R – квадратные матрицы размерности $(m+1) \times (m+1)$):

$$Y = Y_0 + \tau Q C, \quad F(Y) = R C;$$

или (в случае невырожденности матрицы R)

$$Y = Y_0 + \tau Q R^{-1} F(Y).$$

Отметим, что квадратная матрица $Q R^{-1}$ не зависит от параметров исходной задачи (1) и определяется исключительно способом выбора функций $q_k(\alpha)$ и узлов α_i .

2. Разложим $\varphi(\alpha)$ из (2) в ряд Фурье по некоторой полной ортонормированной в $L^2[0, 1]$ системе функций $e_j(\alpha)$, $j = 0, 1, \dots$ и возьмем конечное число первых $p+1$ членов этого ряда, а коэффициенты разложения будем вычислять приближенно с помощью некоторого квадратурного правила с узлами α_k и весами A_k , $k = \overline{0, m}$. Получим следующее приближенное представление:

$$\varphi(\alpha) \approx \sum_{j=0}^p e_j(\alpha) \sum_{k=0}^m A_k e_j(\alpha_k) \varphi(\alpha_k). \quad (4)$$

Используя в (2) вместо функции $\varphi(\alpha)$ её приближение (4), можно, как и в интерполяционном подходе, получить систему уравнений для приближений $y_i \approx u(t + \alpha_i \tau)$. Если же в интеграле из (2) предварительно провести замену переменной $\alpha = g(\xi)$, а затем аппроксимировать новое подынтегральное выражение с помощью описанного подхода, получим следующую систему для $y_i \approx u(t + \tau g(\alpha_i))$:

$$Y = Y_0 + \tau E W F(Y),$$

$$E = \left[\int_0^{\alpha_j} e_j(\xi) d\xi \right]_{i,j}, \quad W = \left[A_k e_j(\alpha_k) g'(\alpha_k) \right]_{j,k}, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, m}.$$

Приведем два примера систем такого вида. В обоих случаях $e_j(\alpha) = \sin j\pi\alpha$ и используется составная квадратурная формула трапеций, но во втором случае в интеграле производится, как и в [2], замена $\alpha = \sin^2 \frac{\pi\xi}{2}$:

$$Y = Y_0 + \tau \frac{2}{m} \left[\frac{2}{j\pi} \sin^2 \frac{ij\pi}{2m} \right]_{i,j} \times \left[\sin \frac{jk\pi}{m} \right]_{j,k} F(Y),$$

$$y_i \approx u\left(t + \tau \frac{i}{m}\right), \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{0, m};$$

$$Y = Y_0 + \tau \frac{2}{m} \left[\frac{1}{j} \sin^2 \frac{ij\pi}{2m} \right]_{i,j} \times \left[\sin \frac{jk\pi}{m} \sin \frac{k\pi}{m} \right]_{j,k} F(Y), \quad (5)$$

$$y_i \approx u\left(t + \tau \sin^2 \frac{\pi i}{2m}\right), \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{0, m}.$$

Проиллюстрируем работу метода (5) для случая линейной системы с постоянной матрицей, крайние собственные значения которой равны -30 и -10^{-14} , используя следующую величину, характеризующую ошибку по каждой из компонент решения:

$$r_q = \frac{\max_{i=1,m} |u^q(t + \tau \alpha_i) - y_i^q|}{\max |u^q(x)| - \min |u^q(x)|}, \quad x \in [0, 1].$$

Укажем значения r_q для метода (5), а также для метода Рунге-Кутты 4-го порядка (РК4) с шагом дискретизации h :

	Метод (5)	РК4, $h = 1/16$	РК4, $h = 1/18$	РК4, $h = 1/20$
$r_1 (\lambda = -30)$	0.009	0.302	0.173	0.105
$r_2 (\lambda = -10^{-14})$	0.000	0.067	0.200	0.333

Литература. 1. Кучмиенко И. А. К вопросу численной реализации метода последовательных приближений Пикара // Сборник статей VII Республиканской конференции студентов и аспирантов Беларуси "НИРС-2002" / УО "ВГТУ". - Витебск, 2002. С. 46-48. **2.** Бобков В. В., Кучмиенко И. А., Фалейчик Б. В. Дискретный аналог метода Пикара // Вестн. Белорус: ун-та. Сер. 1. 2002. №3. С. 68-71.

ЛОКАЛЬНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Леоненко Д.В., БГУТ, г. Гомель

Трехслойные элементы в настоящее время широко используются в различных областях техники, таких, как судостроение, авиастроение, строительство. Поэтому возникает необходимость в разработке методов расчета этих конструкций.

Колебания трехслойных элементов, в том числе упругопластических, рассмотрены в работах [1 – 4]. Динамические нагрузки упругого стержня сосредоточенной силой и моментом исследованы в [5]. Здесь рассматриваются малые поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем под действием локальных, импульсных и резонансных нагрузок.

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа, в жестком

заполнители справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена к внешней плоскости первого слоя. Искомыми считаем прогибы и продольные перемещения несущих слоев $w_1(x)$, $w_2(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$.

Уравнения движения следуют из вариационного принципа

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (1)$$

где δA , δW , δA_I – вариации работы внешних сил, внутренних сил упругости и работы сил инерции соответственно.

После подстановки в (1) вариаций работ получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 &= p; \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_3 w_{1,x} - a_2 w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 &= 0; \\ a_{10} u_{1,x} - a_{17} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} &= q + \frac{1}{2} p_x h_1; \\ -a_{18} u_{1,x} + a_{19} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\ - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь запятая в нижнем индексе указывает на операцию дифференцирования по следующей за ней координате, две точки над искомыми перемещениями обозначают вторую производную по времени.

Принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в сечениях $x = 0$; l (l – длина стержня) в перемещениях имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

Искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузку $q(x, t)$ ($p(x, t) = 0$)

представляем в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющей принятым граничным условиям (3)

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \quad u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \quad w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t);$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t); \quad q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} q_m(t). \quad (4)$$

Подстановка выражений (4) в (2), приводит к системе уравнений для определения функций времени $T_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Функции $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right),$$

где δ_{mki} — амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \quad (5)$$

где ω_{mi} — частоты собственных колебаний.

Общее решение дифференциального уравнения (5) можно принять в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t - \tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau.$$

В качестве примера рассматриваются колебания трехслойного стержня под действием различного вида локальных нагрузок, приложенных к внешней плоскости первого слоя:

1. На стержень действует локальная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная до сечения $x = b \leq 1$. Ее можно представить в аналитическом виде с помощью функции Хевисайда $H_0(x)$.

2. На стержень действует локальная импульсная нагрузка, равномерно распределенная до сечения $x = b \leq 1$. Для ее записи воспользуемся дельта-функцией Дирака $\delta(x)$.

3. На стержень действует локальная резонансная поверхностная нагрузка,

равномерно распределенная до сечения $x = b \leq 1$.

Проведен численный анализ полученных решений. Исследованы условия появления ложного резонанса.

Литература. 1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с. 2. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Колебания круглых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок различных форм // Проблемы прочности. – 2003. – № 4. – С. 32–39. 3. Леоненко Д. В. Локальные динамические нагрузки круговых трехслойных пластин // Материалы, технологии, инструменты. – 2002. – Т. 7, № 4. – С. 8–13. 4. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин под действием резонансных поверхностных нагрузок // Вестн. НАНБ. Сер. физ.-техн. наук. – 2003. – № 3. – С. 111–116. 5. Леоненко Д. В. Локальные динамические нагрузки упругого трехслойного стержня // BEM & FEM – 2003. Труды XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». Т. 1 (Тезисы докладов). – СПб.: 24–26 сентября, 2003. – С. 120–122.

ВЕРоятность РАЗОРЕНИЯ ЗА БЕСКОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА С АРИФМЕТИЧЕСКИМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ.

Лис А. В., БГУ, Минск

Пусть $U(t)$ - случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , $t \in R$, $t \geq 0$, допускающий представление

$$U(t) = u + V(t) - S(t), \quad (1)$$

в частности, для $t \geq 0$ пусть $U(t)$ обозначает размер активов страховой компании в момент времени t . В классической модели предполагается, что премии поступают непрерывно с постоянной интенсивностью $c > 0$. Пусть $N(t)$ - процесс количества исков, X_i - величина иска, тогда $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ - общий размер

выплат к моменту времени t . Предполагается, что $N(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ , а X_i - независимые одинаково распределенные величины с производящей функцией моментов $M_X(r)$. Если $U(0) = u$ - размер активов компании в момент времени 0, то в классической модели (1)

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t). \quad (2)$$

В данной статье предполагается, что процесс поступления премий пред-

ставим в виде $V(t) = c \cdot t + B(t)$, где $B(t)$ - броуновское движение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 \cdot t$. Предположим, что процессы $N(t), B(t)$ и случайные величины X_i являются независимыми. Таким образом, в нашей модели величина активов

$$U(t) = u + c \cdot t + B(t) - S(t). \quad (3)$$

Определим

$$T = \min\{t; t \geq 0, U(t) < 0\} \quad (4)$$

как момент разорения, полагая, что $T = \infty$ означает, что разорение не происходит. Далее будем обозначать $\psi(u) = P(T < \infty)$ - вероятность разорения, зависящую от начального размера активов u . Для классической модели известен результат ([1], [2]):

$$\psi(u) = \frac{e^{-R \cdot u}}{E[e^{-R \cdot U(T)} | T < \infty]}, \quad (5)$$

где R - согласующий коэффициент, определяющийся как положительное решение уравнения $\lambda + c \cdot r = \lambda \cdot M_X(r)$.

Обратимся к рассмотрению нашей модели, и вычислим $E[e^{-r \cdot U(t)}]$:

$$U(t) = u + V(t) - S(t)$$

$$E[e^{-r \cdot U(t)}] = E[e^{-r \cdot u - r \cdot V(t) + r \cdot S(t)}] = e^{-r \cdot u} \cdot E[e^{-r \cdot V(t)}] \cdot E[e^{r \cdot S(t)}] = e^{-r \cdot u} \cdot M_V(-r) \cdot M_S(r)$$

где $M_V(\cdot), M_S(\cdot)$ - производящие функции моментов процессов $V(t)$ и $S(t)$ соответственно:

$$M_V(r) = E[e^{r \cdot V(t)}] = E[e^{r \cdot c \cdot t + r \cdot B(t)}] = \exp\left\{r \cdot c \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot r^2}{2}\right\},$$

$$M_S(r) = M_N(\ln M_X(r)) = e^{\lambda \cdot t \cdot (M_X(r) - 1)},$$

таким образом

$$E[e^{-r \cdot U(t)}] = \exp\left\{-r \cdot u - r \cdot c \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot r^2}{2} + \lambda \cdot t \cdot (M_X(r) - 1)\right\}$$

С другой стороны

$$E[e^{-r \cdot U(t)}] = E[e^{-r \cdot U(t)} | T \leq t] \cdot P(T \leq t) + E[e^{-r \cdot U(t)} | T > t] \cdot P(T > t) \quad (6)$$

Рассмотрим математическое ожидание в первом слагаемом правой части.

Для этого представим $U(t)$ в виде

$$U(t) = U(T) + U(t) - U(T) = U(T) + [V(t) - V(T)] - [S(t) - S(T)] = \\ = U(T) + c \cdot (t - T) + [B(t) - B(T)] - [S(t) - S(T)]$$

Заметим, что $B(t) - B(T) = B(t - T)$, а $S(t) - S(T)$ имеет составное пуассоновское распределение с параметром $\lambda \cdot (t - T)$, в силу чего искомое математическое ожидание может быть представлено в виде

$$E[e^{-tU(t)} | T \leq t] = E \left[\exp \left\{ -r \cdot U(T) - r \cdot c \cdot (t - T) + \frac{\sigma^2 \cdot (t - T) \cdot r^2}{2} + \lambda \cdot (t - T) \cdot (M_X(r) - 1) \right\} | T \leq t \right]$$

Пусть \bar{R} является положительным решением уравнения

$$-r \cdot c + \frac{\sigma^2 \cdot r^2}{2} + \lambda \cdot (M_X(r) - 1) = 0$$

тогда выражение (6) упрощается:

$$e^{-\bar{R}u} = E[e^{-\bar{R}U(t)} | T \leq t] \cdot P(T \leq t) + E[e^{-\bar{R}U(t)} | T > t] \cdot P(T > t).$$

При $t \rightarrow \infty$ слева имеем $e^{-\bar{R}u}$, а первое слагаемое правой части стремится к $E[e^{-\bar{R}U(t)} | T < \infty] \cdot \psi(u)$. Покажем, что второе слагаемое стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$.

Из (3) имеем:

$$E[U(t)] = u + c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot \mu_X,$$

$$Var[U(t)] = Var[B(t)] + Var[S(t)] = \sigma^2 \cdot t + \lambda \cdot t \cdot p_X^2$$

где $\mu_X = E[X_i]$, $p_X^2 = E[X_i^2]$.

Тогда

$$E[e^{-\bar{R}U(t)} | T > t] \cdot P(T > t) = \\ = E \left[e^{-\bar{R}U(t)} | T > t, 0 \leq U(t) \leq u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3} \right] \cdot P(T > t, 0 \leq U(t) \leq u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3}) + \\ + E \left[e^{-\bar{R}U(t)} | T > t, U(t) > u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3} \right] \cdot P(T > t, U(t) > u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3}) \leq \\ \leq P(U(t) \leq u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3}) + \exp \left\{ -\bar{R} \cdot \left(u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3} \right) \right\} \leq \\ \leq t^{-1/3} + \exp \left\{ -\bar{R} \cdot \left(u + (c - \lambda \cdot \mu_X) \cdot t - \sqrt{\sigma^2 + \lambda \cdot p_X^2} \cdot t^{2/3} \right) \right\}$$

где последнее неравенство следует из неравенства Чебышева. Отсюда следует, что если $c - \lambda \cdot \mu_X > 0$, то $E[e^{-\bar{R}U(t)} | T > t] \cdot P(T > t) \rightarrow 0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если размер активов страховой компании представим в виде

$$U(t) = u + c \cdot t + B(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

где u - начальный капитал компании, $B(t)$ - броуновское движение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 \cdot t$, $N(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ , X_i - независимые одинаково распределенные величины, имеющие второй момент, причем процессы $B(t)$, $N(t)$ и случайные величины X_i являются независимыми и выполнено соотношение $c - \lambda \cdot E[X_i] > 0$, а \bar{r} является положительным решением уравнения

$$-r \cdot c + \frac{\sigma^2 \cdot r^2}{2} + \lambda \cdot (M_X(r) - 1) = 0,$$

где $M_X(r)$ - производящая функция моментов случайной величины X_i , то вероятность разорения выражается следующим соотношением

$$\psi(u) = \frac{e^{-\bar{r}u}}{E[e^{-\bar{r}U(r)} | r < \infty]}.$$

Литература. 1. Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. Actuarial Mathematics. Schaumburg: Society of Actuaries, 1997. 2. Panjer H., Willmot G. Insurance Risk Models. Schaumburg: Society of Actuaries, 1992.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО СРАВНЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Макевич П.В., БГУ, г.Минск

Работа посвящена исследованию возможности эффективного применения метода Кармаркара для решения задачи линейного программирования:

$$c \cdot x \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b, \quad (1)$$

где c - n -вектор, b - m -вектор, A - $m \times n$ матрица, причем $m \geq n$ и $c \neq 0$.

Идея метода Кармаркара решения задачи (1) основана на построении последовательности проекций градиентов целевой функции на множество планов. В основе метода лежит специальный проективный алгоритм Кармаркара [1, 2].

Пусть задана текущая внутренняя точка x^k . Получение следующей внутренней точки зависит от заранее определенного коэффициента безопасности γ ,

$0 < \gamma < 1$.

$$x^{k+1} := x^k + \alpha h_x$$

$$\alpha = \gamma \cdot \min \{ -v_i^k / (h_v)_i \mid (h_v)_i < 0, i = 1..m \}.$$

$$h_x = (A^T D^{-2} A)^{-1} c$$

$$h_v = -Ah_x$$

где $v_i^k \geq 0$ – вектор искусственных переменных, $Ax^k + v^k = b$,

$$D = \text{diag}(v_1^k, v_2^k, v_3^k, \dots, v_m^k)$$

Указанный выше алгоритм был реализован на языке C++ в среде разработки VC++ 6.0 на ПК с CPU - Celeron-800, RAM - 128М.

Приведем таблицу, содержащую результаты сравнения метода Кармаркара и адаптивного двойственного алгоритма [3]:

М	п	двойственный		Кармаркара	
		количество итераций	время работы(мин)	количество итераций	время работы(мин)
100	2000	970	1:27	20	3:02
100	2000	1087	1:31	20	3:26
100	2000	1057	1:29	17	3:17
200	4000	1922	2:52	21	6:42
2	10	4	0:11	9	0:57
2	10	3	0:09	7	0:40

По результатам численных экспериментов можно сделать вывод о том, что имеет смысл разработка эффективного метода решения задачи линейного программирования, объединяющего достоинства опорных методов и метода Кармаркара.

Литература. 1. I.Adler, N. Karmarkar, M. G.C. Resende, G. Veiga, «An implementation of karmarkar's algorithm for linear programming». Mathematical Programming 44 (1989), 297–335. 2. А.Схрейвер, «Теория линейного целочисленного программирования», Т.1, М., «Мир», 1991. 3. Р.Габасов; Ф.М.Кирилова «Методы линейного программирования», Минск, БГУ, 1978

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР АПОСТОЛА В ПРИМЕРАХ И ПРИЛОЖЕНИЯХ

Мартон М. В., БГУ, Минск

Работа посвящена изучению некоторых свойств устойчивости существенного спектра Апостола оператора взвешенного сдвига в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(l)$.

Рассмотрим ограниченный линейный оператор взвешенного сдвига T , задаваемый следующей формулой:

где $T(x_1, x_2, \dots) := (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$, $x = (x_k) \in I_1$, (1)

где (a_k) – последовательность весов такая, что $a_k \in \mathbb{C}$, $\sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Обозначим через $R^\infty(T) := \bigcap_{n=1}^{\infty} R(T^n)$ – обобщенную область значений, где $R(T)$ – область значений оператора T ; $N^\infty(T) := \bigcup_{n=1}^{\infty} N(T^n)$ – обобщенное ядро оператора T , где $N(T) = \{x : Tx=0\}$. Оператор $T \in B(I_1)$ называется *полурегулярным* если $R(T)$ – замкнуто и $N(T) \subset R^\infty(T)$. Заметим, что если область значений $R(T)$ замкнута, то последнее включение эквивалентно следующим: $N^\infty(T) \subset R(T)$ или $N^\infty(T) \subset R^\infty(T)$ [1]. Оператор $T \in B(I_1)$ называется *существенно полурегулярным* если $R(T)$ – замкнуто и существует конечномерное подпространство $M \subset I_1$ такое, что $N(T) \subset R^\infty(T) + M$. Заметим, что при замкнутости $R(T)$ последнее включение эквивалентно: $N^\infty(T) \subset R(T) + M$ или $N^\infty(T) \subset R^\infty(T) + M$ для соответствующих конечномерных M .

Рассмотрим подмножества комплексной плоскости \mathbb{C} , определяемые следующими характеристиками оператора $T - \lambda I$: $G(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\}$ – область нормальной разрешимости оператора T , $\Phi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I), \text{nul}(T - \lambda I) < \infty, \text{def}(T - \lambda I) < \infty\}$ – область фредгольмовости оператора T , где $\text{nul}(T) := \dim N(T)$, $\text{def}(T) := \dim I_1 / R(T)$.

Существенным спектром Голдберга оператора T , обозначается через $\sigma_{eg}(T)$, существенным спектром Фредгольма $\sigma_{ef}(T)$ и следуя V. Kordula спектром Апостола $\sigma_\lambda(T)$ и существенным спектром Апостола $\sigma_{e\lambda}(T)$ называются подмножества, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{eg}(T) := \mathbb{C} \setminus G(T), \sigma_{ef}(T) := \mathbb{C} \setminus \Phi(T),$$

$$\sigma_\lambda(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ не является полурегулярным}\},$$

$$\sigma_{e\lambda}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ не является существенно полурегулярным}\}.$$

Спектры Апостола – это непустые компактные подмножества комплексной плоскости \mathbb{C} . Для этих спектров очевидны включения: $\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{ef}(T) \subset \sigma(T)$,

$\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_\chi(T)$. Кроме того из [1] следует, что $\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{e\chi}(T) \subset \sigma_e(T)$, а также $\partial\sigma(T) \subset \sigma_\chi(T)$ и $\partial\sigma_e(T) \subset \sigma_{e\chi}(T)$, где $\partial\sigma(T)$ – граница спектра, а $\partial\sigma_e(T)$ – граница существенного спектра Фредгольма.

Для исследования спектра оператора взвешенного сдвига T целесообразно рассмотреть следующую классификацию, в зависимости от последовательности весов a_k : а) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf|a_k| > 0$; б) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf|a_k| = 0$; в) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k конечно; д) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Известно, что спектр оператора взвешенного сдвига T из $B(l_1)$ есть замкнутый круг, т.е. $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где спектральный радиус r_σ , вычисляемый так же как в случае гильбертова пространства l_2 , равен:

$$r_\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|T^k\|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq 1} |a_m \dots a_{m+k-1}|)^{1/k}. \quad (2)$$

Для представления существенных спектров Голдберга и Фредгольма следуя [3] можно сформулировать следующие леммы.

Лемма 1. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условиям б) и д), тогда для существенного спектра Голдберга и Фредгольма справедливо равенство $\sigma_{eg}(T) = \sigma_e(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$.

Лемма 2. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Пусть веса a_k удовлетворяют условию в), тогда для существенного спектра Голдберга и Фредгольма справедливы следующие равенства: если $\inf\{|a_n| : n \geq k+1\} > 0$, где a_k – последний нулевой вес, то $\sigma_{eg}(T) = \sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а если $\inf\{|a_n| : n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{eg}(T) = \sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\}$, где

$$r_2 = \sup_{n \geq 1} (\inf_{m \geq j+2} |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n}, \quad (3)$$

$a_j = \max\{k \geq 1 : a_k = 0\}$.

Лемма 3. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию а), то тогда существенный спектр Голдберга и Фредгольма равны

$$\sigma_{eg}(T) = \sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2' \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}, \text{ где}$$

$$r_2' = \sup_{n \geq 1, m \geq 2} (\inf |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n} \quad (4)$$

Лемма 4. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условиям b) и d), то тогда спектр Апостола и существенный спектр Апостола равны

$$\sigma_{\sigma}(T) = \sigma_{\chi}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_{\sigma}\}.$$

Лемма 5. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию a), то тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливо равенство:

$$\sigma_{\sigma}(T) = \sigma_{\chi}(T) = \{\lambda \in C: r_2' \leq |\lambda| \leq r_{\sigma}\}, \text{ где}$$

$$r_2' = \sup_{n \geq 1, m \geq 2} (\inf |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n}.$$

Лемма 6. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию c), тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливо следующее представление: $\sigma_{\sigma}(T) = \sigma_{\chi}(T) = \{\lambda \in C: r_2 \leq |\lambda| \leq r_{\sigma}\} \cup \{0\}$, где

$$r_2 = \sup_{n \geq 1, m \geq j+2} (\inf |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n}$$

а $j = \max\{k \geq 1: a_k = 0\}$.

Отметим, что из [1] для комплексного банахова пространства X и $B(X)$ – алгебры всех ограниченных операторов следует следующая теорема об отображении для (существенного) спектра Апостола.

Теорема 1. Пусть $T \in B(X)$, f аналитическая функция в окрестности спектра $\sigma(T)$. Тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливо равенства вида:

$$\sigma_{\chi}(f(T)) = f(\sigma_{\chi}(T)) \text{ и } \sigma_{\sigma}(f(T)) = f(\sigma_{\sigma}(T)).$$

– С помощью примера 2.5 работы [1] можно показать, что спектр Апостола $\sigma_{\chi}(T)$ и существенный спектр Апостола $\sigma_{\sigma}(T)$ неустойчивы относительно компактных возмущений. Однако в работе [2] доказана теорема об устойчивости существенного спектра Апостола относительно возмущений операторами конечного ранга:

Теорема 2. Пусть $T, F \in B(X)$, и пусть F – оператор конечного ранга. Тогда

для существенного спектра Апостола справедливо равенство:

$$\sigma_{\sigma}(T+F) = \sigma_{\sigma}(T).$$

Кроме того $\sigma_{\sigma}(T)$ устойчив относительно компактных коммутирующих операторов, хотя $\sigma_{\sigma}(T)$ неустойчив ни относительно операторов конечного ранга, ни относительно коммутирующих компактных операторов.

Заметим, что в работе [4] для $\sigma_{\sigma}(T)$, $\sigma_{\sigma}(T)$ доказана:

Теорема 3. Пусть $T, A \in B(X)$, $TA=AT$, и A – квазинильпотентный оператор. Тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливы следующие равенства:

$$\sigma_{\sigma}(T+A) = \sigma_{\sigma}(T) \text{ и } \sigma_{\sigma}(T+A) = \sigma_{\sigma}(T).$$

В заключение отметим, что наиболее интересными для приложений является следующая характеристика существенного спектра Апостола [5]:

Теорема 4: Справедливо следующее равенство:

$$\sigma_{\sigma}(T) = \bigcap \{ \sigma_{\sigma}(T+S) : TS=ST, S \in R(X) \},$$

где $R(X)$ – множество операторов конечного ранга, множество компактных операторов или множество операторов Рисса.

Литература. 1. Müller V. On the regular spectrum // J.Oper.Theory: – 1994, Vol.31, P.363–380. 2. Kordula V. The essential Apostol spectrum and finite-dimensional perturbations // Proc.R.Ir.Acad.: – 1996, Vol.96A, P.105–109. 3. Мартон М.В. Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига // Вестник БГУ – 2003, №1, С.61–66. 4. Kordula V., Müller V. The distance from the Apostol spectrum // Proc.Amer.Soc. – 1996, Vol.124, P.3055–3061. 5. Rakočević V. Generalized spectrum and commuting compact perturbations // Proc.Edin.Math.Soc. – 1993, Vol.36, P.197–209.

СЛУЧАЙ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысук О.В., БрГУ, г. Брест

Рассматривается в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A ; для которого нуль является собственным значением (случай неединственности решения уравнения (1)).

Для отыскания решения используется итерационный процесс

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0, \quad (2)$$

который в случае приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$ примет вид

$$x_{n+1}\delta = (E - \alpha A^2)x_n\delta + \alpha Ay\delta, \quad x_0\delta = 0.$$

Ранее изучен случай единственности решения и в предположении, что точное решение уравнения (1) истокорпредставимо, доказана сходимость метода (2) и получены оценки погрешности.

Покажем, что метод (2) пригоден для решения линейных уравнений и тогда, когда его решение неединственно.

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A) = H - N(A)$, т.е. $M(A)$ — ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H .

Пусть $P(A)x$ — проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ — проекция $x \in H$ на $M(A)$.

Справедлива

Теорема. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|^2}$. тогда для итеративного процесса

(2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$,

б) (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо.

В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + \bar{x}$, где \bar{x} — минимальное решение уравнения (1).

Замечание. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow \bar{x}$, т.е. процесс (2) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.

О КРИТЕРИИ ПОИСКА НАБОРА "ШАБЛОНОВ" ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ БИНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Милованова И.С., БГУ, г. Минск

1. Введение

В настоящее время в информационных системах для защиты информации широко начали использоваться криптографические алгоритмы. Надежность криптографических алгоритмов определяется качеством бинарных последова-

тельность, используемых для создания ключей алгоритмов: бинарные последовательности должны быть порождены моделью независимых симметричных испытаний Бернулли.

Общепринятым подходом к анализу качества бинарных последовательностей является применение набора статистических критериев [1, 2]. Одним из популярных критериев является критерий серий, построенный по пересекающимся отрезкам [1].

При применении большого количества критериев возникает проблема принятия итогового решения о качестве последовательности. Поэтому было предложено несколько методик принятия решения: методы Бонферрони, Симса и др. [4], однако их нельзя считать эффективными при использовании "зависимых" критериев.

В данной статье вместо критерия серий предлагается использовать "ближкий" критерий поиска шаблона [2, 3]. Для учета зависимости между критериями было исследовано совместное распределение статистик критерия поиска шаблона, что позволило построить критерий, использующий множество различных шаблонов.

2. Критерий поиска набора "шаблонов"

В качестве математической модели для анализа бинарных последовательностей $\{X_i\}$ будем использовать симметричную модель Бернулли:

$$H_0: \{X_i\} - \text{независимые одинаково распределенные с.в.,} \quad (1) \\ P\{X_i = 1\} = P\{X_i = 0\} = 0.5.$$

Пусть наблюдается выборка $X = (x_1, \dots, x_n)$ объема n , $x_i \in \{0, 1\}$

Рассмотрим задачу проверки гипотезы (1) для выборки X с использованием частот "шаблонов". Пусть $H = (h_1, \dots, h_m)$ — заданный бинарный вектор-строка длины m , который будем называть шаблоном. Обозначим $W(H)$ — число появлений шаблона H в выборке X :

$$W(H) = \sum_{i=1}^{n-m+1} I\{x_{i+k-1} = h_k, k = \overline{1, m}\}.$$

Обозначим $A_{H_1 H_2}(Z) = \sum_{k \in H_1 H_2} 2^{k-m_1} Z^{m_1-k}$ — корреляционный полином, где $H_1 H_2$ — множество натуральных чисел k таких, что суффикс длины k шаблона H_1 равен префиксу длины k шаблона H_2 . В случае $H_1 = H_2$ корреляционный полином называется автокорреляционным полиномом.

В [3] было найдено распределение статистики $W(H)$.

Теорема 1. [3] *Если верна гипотеза H_0 , то в асимптотике $n \rightarrow \infty$ статистика $W(H)$ имеет асимптотически нормальное распределение:*

$$L\{W(H) - \mu(H) / \sigma(H)\} \rightarrow N(0,1),$$

$$\mu(H) = \frac{n-m+1}{2^m}, \quad \sigma^2(H) = \frac{n}{2^m} \left(1 - \frac{2m-1}{2^m} + \frac{A_{HH}(1)-1}{2} \right) + O(1).$$

Для тестирования бинарных последовательностей следует использовать не один шаблон, а набор шаблонов. Поэтому исследуем совместное распределение частот различных шаблонов. Сначала рассмотрим случай двух шаблонов.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для двух различных шаблонов H_1 и H_2 длины m_1 и m_2 ($m_1 \geq m_2$) вектор частот $W = (W(H_1), W(H_2))'$ имеет асимптотически нормальное распределение с вектором математического ожидания $\mu = (\mu(H_1), \mu(H_2))$ и ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij})$:*

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{-n(m_1 + m_2 - 1)}{2^{m_1+m_2}} + \frac{nA_{H_1 H_2}(1)}{2^{m_1}} + \frac{nA_{H_2 H_1}(1)}{2^{m_2}} + \frac{nB(H_1, H_2)}{2^{\max(m_1, m_2)}} + O(1),$$

$$\text{где } \sigma_{ii} = \sigma^2(H_i) \quad (i=1,2), \quad B(H_1, H_2) = \left| \{i, i = 2, m_1 - m_2 \mid h_i^1 = h_i^2, \dots, h_{i+m_2}^1 = h_i^2\} \right|.$$

Замечание. Результаты теоремы 2 легко обобщаются на случай любого количества шаблонов.

Применим утверждение теоремы 2 для построения статистического критерия проверки гипотезы (1).

Теорема 3. *Для выборки X и набора различных шаблонов H_1, \dots, H_M принимается гипотеза H_0 , если*

$$S(H_1, \dots, H_M) \leq \Delta(\alpha) \tag{2}$$

где $S(H_1, \dots, H_M) = (W - \mu)' \Sigma^{-1} (W - \mu)$, $W = (W(H_1), \dots, W(H_M))'$ — вектор

частот шаблонов, Δ — $(1-\alpha)$ квантиль распределения χ^2 с M степенями свободы, α — уровень значимости, μ , Σ определены в теореме 2.

3. Вычислительный эксперимент

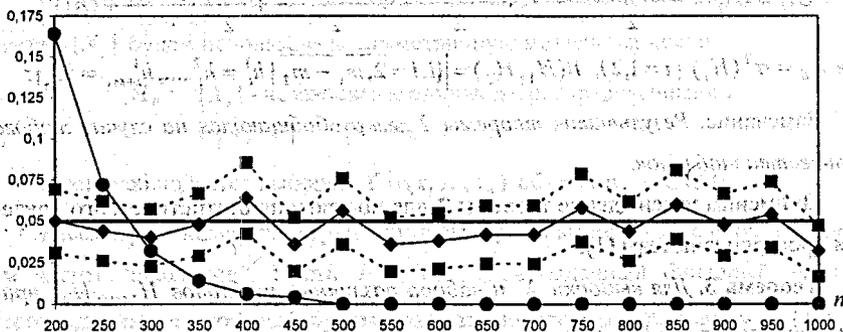
Для анализа свойств критерия (2) была проведена серия вычислительных экспериментов по оцениванию вероятностей ошибок первого и второго рода.

Для построения критерия (2) использовалось $M=15$ шаблонов различных длин: {010111, 10, 00, 100, 0011, 11000, 0101, 01101, 1110100, 00101, 0110, 001101, 10111, 010, 1110} и $\alpha=0.05$.

Оценка вероятности ошибки первого рода с 95%-доверительным интервалом вычислялась следующим образом:

$$\hat{\alpha} = N_1/N, \quad \hat{\alpha}_{\pm} = \hat{\alpha} \pm \Phi^{-1}((1+\gamma)/2) \sqrt{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})/N},$$

где N_1 — число отклонений гипотезы (1) при тестировании N выборок из равномерного бинарного распределения, $\gamma=0.95$. На рисунке приведены значения оценки вероятности ошибки первого рода $\hat{\alpha}$ (обозначение \blacklozenge), доверительного интервала $\hat{\alpha}_{\pm}$ (обозначение \blacksquare) для различных объемов выборок n . На рисунке также представлена оценка вероятности ошибки второго рода при генерации выборки из несимметричного распределения Бернулли: $P\{X_i = 1\} = 0.65$, $P\{X_i = 0\} = 0.35$ (обозначение \bullet).



Можно видеть, что теоретическое значение уровня значимости $\alpha=0.05$ падает в 95%-доверительный интервал для оценки вероятности ошибки первого

го рода, а оценка вероятности ошибки второго рода при увеличении длины выборки стремится к нулю.

Литература. 1. Кнут Д. Искусство программирования. Т.2. Получисленные алгоритмы. 3-е изд. – Вильямс, 2000. 2. NIST Special Publication 800-22. A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications, 2000. 3. Régnier M., Szpankowski W. On The Approximate Pattern Occurrences In A Text // 1997, <http://citeseer.nj.nec.com/34237.html> 4. Tamhane A. C. Multiple Comparisons / Handbook of Statistics — New York: Elsevier Science, 1996.

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Панцыр В.М., Савчук В.Ф., БрГУ, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве решается уравнение 1 рода

$$Ax = y_\delta, \quad (1)$$

где $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A , т.е. задача некорректна. Для отыскания решения уравнения (1) предлагается итеративный метод

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (2)$$

Доказана сходимость метода (2). Получены оценки погрешности метода при точной правой части, при приближенной части и погрешность в счете. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$ сходится, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, что $n(\delta)\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 2. Если выполняется условие $x = A^s z, s > 0$ и $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, то общая оценка погрешности для метода (2) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Теорема 3. Оптимальная оценка погрешности для метода (2) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{opt}} \leq (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}} \|z\| \frac{1}{s+1} \delta^{\frac{s}{s+1}} \text{ и достигается при}$$

$$n_{opt} = \frac{1}{2} s \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \|z\| \frac{1}{s+1} \delta^{-\frac{1}{s+1}}.$$

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от α , но n_{opt} от него зависит. Поэтому для уменьшения числа шагов n и, значит, объема вычислительной работы следует выбирать α как можно большим из условия $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$.

С учетом погрешности округлений оценка погрешности метода (2) примет вид

$$\|x - z_n\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta + n\alpha\gamma, \text{ где } n \geq 1.$$

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Прожерин И.Г., БГТУ, Брест

В развитии вычислительных алгоритмов решения трудных задач комбинаторной оптимизации и, конечно, в первую очередь задачи коммивояжера в последние годы четко обозначилась тенденция к использованию эвристических алгоритмов. Они являются основным инструментом решения практических задач. Появление эвристик обусловлено, в первую очередь, излишней чувствительностью точных алгоритмов по отношению к специфике задачи и наличию дополнительных условий [1,2,3].

Рассмотрим граф, для которого необходимо решить задачу коммивояжера, и его матрицу смежности. Попробуем решить для нее задачу о назначениях. Для примера возьмем граф на рис.1. Для его матрицы смежности задача о назначениях выделит следующие элементы (рис.1) [4]:

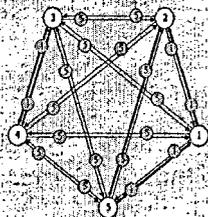


Рис.1. Граф с отмеченным решением задачи о назначении

На рис.1 видно следующее: если сопоставить выделенным элементам ребра графа, то получится, что из каждой вершины графа выходит и входит ровно одно ребро. То есть граф разобьется на непересекающиеся циклы, следовательно, задача о назначениях решает задачу несколько схожую с задачей коммивояжера. Если задача коммивояжера разбивает граф на один цикл так, чтобы суммарный вес ребер этого цикла был минимален, то задача о назначениях разбивает граф на несколько циклов с выполнением того же условия.

Общая схема решения задачи коммивояжера точным алгоритмом, используя решение задачи о назначении [1,4]:

1) возьмем исходный граф или граф из стека. Если стек пуст, переходим к шагу 6;

2) первоначальная проверка на существование разбиения графа на циклы. Проверим, есть ли вершины, из которых не выходит ни одно ребро или не входит ни одного ребра. Если есть, то этот граф больше не рассматриваем, т.е. переходим к шагу 1;

3) решим задачу о назначениях для матрицы графа;

4) если решение задачи о назначении является решением задачи коммивояжера, то запоминаем найденный путь и переходим к шагу 1. Если нет, то в случае, когда суммарная длина найденных циклов превышает длину уже найденного пути, переходим к шагу 1, в противном же случае переходим к шагу 5.

5) по отдельности выкидываем из графа ребра одного из циклов, кладем получившиеся графы в стек; переходим к шагу 1;

6) конец алгоритма. Выводим длину минимального найденного пути, или сообщаем, что такой не найден.

Рассмотренный алгоритм можно изменить для получения приближенного алгоритма. Приближенный алгоритм, отличается от точного лишь тем, что не нужно делать перебор по всем ребрам каждого цикла, необходимо выбрать в

каждом цикле одно ребро с максимальным весом и удалить его, а затем пересчитать задачу о назначении.

Общая схема решения задачи коммивояжера приближенным алгоритмом, используя решение задачи о назначении:

1) решается задача о назначении, в результате чего в графе выделяются замкнутые циклы;

2) если кол-во циклов равно 1 то решение задачи окончено, иначе переходим к шагу 3);

3) в каждом полученном замкнутом цикле необходимо найти ребро с максимальным весом и удалить его;

4) переходим к шагу 1).

Для решения задачи коммивояжера можно предложить еще один алгоритм корреляционно-регрессионного анализа.

Рассмотрим алгоритм построения гамильтонова контура с использованием линии регрессии:

1) определяем коэффициенты линии регрессии по координатам точек;

2) преобразуем координаты точек в систему, поворнутую на угол наклона линии регрессии, причём чтобы значения ординаты были положительными;

3) разбиваем плоскость линиями параллельными оси абсцисс на уровни;

4) формируем частичные пути в каждом уровне;

5) объединяем частичные пути между собой таким образом, что конец пути полученного на первом уровне соединяется с концом пути полученном на втором уровне, а начало пути полученного на втором уровне соединяется с началом пути полученном на третьем уровне и т.д., а затем крайние точки полученного пути замыкаются между собой.

В результате выполнения алгоритма получим путь движения коммивояжера.

Определение параметров эффективности алгоритма — одна из важнейших задач. Для начала необходимо выбрать критерии оценки алгоритмов. Основны-

ми критериями являются трудоемкость, использование памяти, качество решения. Поэтому сравнение алгоритмов будем рассматривать в разрезе этих критериев [5,6].

Таблица 1. Сравнение алгоритмов

Алгоритм	Трудоёмкость	Память	Отклонение от оптимального значения, %
Ветвей и границ	$O(\sim 7n^2)$	$\sim (2n^3)$	0
Метод решения задачи коммивояжера, используя решение задачи о назначении (точный)	$O(\sim 10n^2)$	$\sim (2n^3)$	0
Метод решения задачи коммивояжера, используя решение задачи о назначении (приближенный)	$O(\sim n^2)$	$\sim (2n^2)$	10
Корреляционно-регрессионного анализа	$\sim O(n)$	$n^2 + 3n$	15

Анализируя данные в табл.1. видно, что алгоритмы предложенные ранее (ветвей и границ и точный алгоритм решения задачи коммивояжера, используя решение задачи о назначении), либо требуют использования большого объёма памяти порядка $\sim (2n^3)$ [5], либо имеют трудоёмкость большую в 7-10 раз.

При оценке алгоритмов по взаимоисключающим критериям не трудно понять, что идеального варианта быть не может.

Литература. 1. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., Задача коммивояжера. Точные методы // Автоматика и телемеханика. – М.: Наука, 1989. №10. с.3-29. 2. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. – М.: Наука, 1989. №11. с.3-26. 3. Гимади Э. Х., Перепелица В. А., Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера, Сб. «Управляемые системы», Новосибирск, вып. 12, 1974, 35-45. 4. Кристофидес Н., "Теория графов. Алгоритмический подход", М.: Мир; 1978. 5. Гэри М., Джонсон Д., "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи" :пер. с англ. – М.:Мир, 1982.; ил. 6. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С КРАТНЫМИ ЯДРАМИ КОШИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

Пятицуккий В. Ю., БГУ, Минск

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi^3} \iiint_D \frac{\varphi(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3}{(t_1 - x_1)(t_2 - x_2)(t_3 - x_3)} + \dots$$

$$\frac{1}{\pi^3} \iiint_{D^3} k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \varphi(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = f(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

где $D^3 = [-1, 1]^3$, $(x_1, x_2, x_3) \in D^3$, $f(x_1, x_2, x_3)$ и $k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ – заданные, $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ – искомая функции класса Гельдера по каждой переменной.

Как и в одномерном случае [1], решение уравнения (1) зависит от класса функций, в котором оно разыскивается. Пусть решение уравнения (1) принадлежит классу ограниченных в D^3 функций. Сделаем замену искомой функции:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)} u(x_1, x_2, x_3), \text{ где } u(x_1, x_2, x_3) \text{ – новая неизвестная функция.}$$

Тогда уравнение (1) эквивалентно в смысле разрешимости уравнению Фредгольма

$$u(x_1, x_2, x_3) + \iiint_{D^3} N(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) u(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = F(x_1, x_2, x_3), \quad (2)$$

с присоединенными к нему необходимыми и достаточными условиями разрешимости: $(1 \leq k \leq 3)$

$$\int \left[f(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{\pi^3} \iiint_{D^3} k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \varphi(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \right] \frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}} = 0, \quad (3)$$

где функции $N(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ и $F(x_1, x_2, x_3)$ известным образом [2] выражаются через заданные функции $k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ и $f(x_1, x_2, x_3)$.

Построим алгоритм численного решения задачи (1), отличный от предложенного в [2], когда неизвестная функция $u(x_1, x_2, x_3)$ заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа. Известно, что если требуется получить приближенное решение с высокой степенью точности, то целесообразно искать его в виде линейной комбинации ортогональных многочленов, например, многочленов Чебышева.

Воспользуемся спектральным соотношением [3]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} U_n(t)}{t-x} dt = -T_{n+1}(x), \quad n=0,1,2,\dots, \quad (4)$$

где $T_{n+1}(x)$ и $U_n(x)$ — многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Заменяем заданные в (1) функции их интерполяционными многочленами специального вида, полученными на основании формул приближения функции одной переменной многочленами Чебышева, приведенной в [4]:

$$f(x_1, x_2, x_3) \approx f_N(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \sum_{i_3=0}^N T_{i_1}(x_1) T_{i_2}(x_2) T_{i_3}(x_3) f_{i_1, i_2, i_3}^* \quad (5)$$

$$f_{i_1, i_2, i_3}^* = \frac{\delta_{i_1} \delta_{i_2} \delta_{i_3}}{(N+1)^3} \sum_{p_1=0}^N \sum_{p_2=0}^N \sum_{p_3=0}^N T_{i_1}(\tau_{p_1}) T_{i_2}(\tau_{p_2}) T_{i_3}(\tau_{p_3}) f(\tau_{p_1}, \tau_{p_2}, \tau_{p_3}),$$

$$k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \approx k_{N, N-1}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \sum_{i_3=0}^N \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{N-1} T_{i_1}(x_1) \times$$

$$\times T_{i_2}(x_2) T_{i_3}(x_3) T_{j_1}(t_1) T_{j_2}(t_2) T_{j_3}(t_3) k_{i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3}^* \quad (6)$$

$$k_{i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3}^* = \frac{\delta_{i_1} \delta_{i_2} \delta_{i_3} \delta_{j_1} \delta_{j_2} \delta_{j_3}}{(N+1)^6} \sum_{p_1=0}^N \sum_{p_2=0}^N \sum_{p_3=0}^N \sum_{q_1=0}^{N-1} \sum_{q_2=0}^{N-1} \sum_{q_3=0}^{N-1} T_{i_1}(\tau_{p_1}) \times$$

$$\times T_{i_2}(\tau_{p_2}) T_{i_3}(\tau_{p_3}) T_{j_1}(\theta_{q_1}) T_{j_2}(\theta_{q_2}) T_{j_3}(\theta_{q_3}) k(\tau_{p_1}, \tau_{p_2}, \tau_{p_3}, \theta_{q_1}, \theta_{q_2}, \theta_{q_3}),$$

где $\delta_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 2, & k \neq 0 \end{cases}$, $\tau_p = \cos \frac{2p_r - 1}{2(N+1)} \pi$, $p_r = 1, 2, \dots, N+1$, $\theta_{q_r} = \cos \frac{2p_r - 1}{2N} \pi$,

$q_r = 1, 2, \dots, N$, $r = 1, 2, 3$.

После замены входящих в уравнение (1) функций их интерполяционными многочленами (5) и (6), учитывая представление $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, получим некоторое приближенное уравнение, которое, вообще говоря, может быть и неразрешимым. Поэтому приближенную задачу запишем в виде:

$$\frac{1}{\pi^3} \iiint_{D^3} \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)} u_{N-1}(x_1, x_2, x_3) dt_1 dt_2 dt_3 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \iiint_{D^3} k_{N, N-1}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)} \times \quad (7)$$

$$u_{N-1}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = f_N(x_1, x_2, x_3) + Q_1(x_3, x_3) + Q_2(x_1, x_3) + Q_3(x_1, x_2),$$

где $u_{N-1}(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \sum_{i_3=0}^{N-1} c_{i_1, i_2, i_3} U_{i_1}(x_1) U_{i_2}(x_2) U_{i_3}(x_3)$,

c_{i_1, i_2, i_3} — коэффициенты, подлежащие определению, а Q_1, Q_2, Q_3 — некоторые

функции, обеспечивающие разрешимость уравнения (7): ($1 \leq k \leq 3$)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[f_N(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{\pi^3} \iiint_{D^3} k_{N, N-1}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)} \times \right. \\ \left. u_N(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + Q_1(x_3, x_3) + Q_2(x_1, x_3) + Q_3(x_1, x_2) \right] \frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k}} = 0. \quad (8)$$

Из (8) вытекает, что $Q_1(x_3, x_3) + Q_2(x_1, x_3) + Q_3(x_1, x_2) =$

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_N(x_1, x_2, x_i) dx_i}{\sqrt{1-x_i^2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g_N(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}} + \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g_N(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}} \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g_N(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} - \frac{1}{\pi^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g_N(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}},$$

где $g_N(x_1, x_2, x_3) = f_N(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{\pi^3} \iiint_{D^3} k_{N, N-1}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) \times$

$$\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)} u_N(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Учитывая (5), (6), (8), (9) и используя (4), все интегралы в (7) вычислим в явном виде. Приравнявая коэффициенты при одинаковых комбинациях многочленов $T_l(x)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относи-

тельно неизвестных коэффициентов c_{i_1, i_2, i_3} .

Укажем порядковые оценки погрешностей построенных приближенных решений. С этой целью введем класс функций $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$. Будем говорить, что функция нескольких переменных принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$, если по каждой переменной она имеет частные производные до порядка $r > 1$ и r -я производная из класса H^μ , $0 < \mu \leq 1$.

Теорема: Пусть уравнение (1) удовлетворяет следующим условиям: 1) решение $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ разыскивается в классе ограниченных в D^3 функций; 2) функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и $k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ принадлежат классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$; 3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x_1, x_2, x_3)$ и $k(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ взяты соответственно многочлены

$f_N(x_1, x_2, x_3)$ и $k_{N, N-1}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$, определяемые соответственно (5)-(6); 4) однородное уравнение (2) неразрешимо.

Тогда при достаточно больших N система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная задаче (7), разрешима и имеет место оценка:

$$\left\| \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}(u(x_1, x_2, x_3) - u_N(x_1, x_2, x_3)) \right\|_{\infty} = O\left(\frac{\ln^6 N}{N^{r+\mu-3}}\right), \quad r+\mu-3 > 0,$$

Литература. 1. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. 2. Шешко М.А., Расолько Г.А. О точных и приближенных формулах обращения кратного интеграла с ядрами Коши // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №5. С. 911-915. 3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М., 1966. 4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ СКАЧКООБРАЗНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Розин Е.Б., БГУ, г. Минск

Настоящая работа посвящена исследованию ассоциированных решений системы стохастических дифференциальных уравнений. Отметим, что в частном случае, когда в качестве скачкообразного процесса брался случайный процесс Пуассона, задача исследовалась в работах [1,2]. Для случая конечного числа скачков задача исследовалась в работе [3].

Пусть для $\forall t \in T = [0, a]$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < h_n < 2 \cdot h_n < \dots < m \cdot h_n \leq t \leq (m+1)h_n$ – разбиение отрезка $[0, t]$.

В работе исследуются ассоциированные решения системы уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, которая на уровне представителей в алгебре обобщенных случайных процессов запишется следующим образом

$$\begin{cases} X_1^n(t+h_n) - X_1^n(t) = f_1^n(X_1^n(t), X_2^n(t)) [L_1^n(t+h_n) - L_1^n(t)] \\ X_1^n(t)|_{t \in [0, h_n]} = X_1^{n,0}(t), t \in [0, a], a \in \mathbb{R} \\ X_2^n(t+h_n) - X_2^n(t) = f_2^n(X_1^n(t), X_2^n(t)) [L_2^n(t+h_n) - L_2^n(t)] \\ X_2^n(t)|_{t \in [0, h_n]} = X_2^{n,0}(t), t \in [0, a], a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь L_1, L_2 – скачкообразные случайные процессы, т.е. непрерывные спра-

ва и имеющие конечные пределы слева процессы со стационарными независимыми приращениями, $L_1, L_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, такие, что вариации L_1, L_2 ограничены. Функции $f_1, f_2 \in C_b^1(\mathbb{R})$, а L_1^*, L_2^* и f_1^*, f_2^* — свертки процессов L_1, L_2 и функций f_1, f_2 со стандартными "шапочками" ρ_1^*, ρ_2^* : $\rho_1^* = n \cdot \rho_1(n \cdot t)$, $\rho_2^* = \varphi(n) \cdot \rho_2(\varphi(n) \cdot t)$, $\rho_1, \rho_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, $\text{supp } \rho_1 \subset [0, 1]$, $\text{supp } \rho_2 \subset [0, 1]$, $\int_0^1 \rho_1(s) ds = 1$, $\int_0^1 \rho_2(s) ds = 1$ соответственно.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X_1(s) = x_1^0 + (I) \int_0^s f_1(X_1(s), X_2(s)) dL_1(s), & t \in [0, a] \\ X_2(s) = x_2^0 + (S) \int_0^s f_2(X_1(s), X_2(s)) dL_2(s), & t \in [0, a] \end{cases} \quad (2)$$

Решение второго уравнения в этой системе по определению понимается так:

$$X_2(t) = x_2^0 + \sum_{s=0}^t [\varphi(1, \Delta L_2(s), X_1(s-), X_2(s-)) - \varphi(0, \Delta L_2(s), X_1(s-), X_2(s-))] \quad (3)$$

где $\varphi(v, \mu, x_1, x_2)$ решение уравнения

$$\varphi(v, \mu, x_1, x_2) = x_2 + \mu \int_0^v f_2(x_1, \varphi(u, \mu, x_1, x_2)) du \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть для всех n справедливы неравенства

$$X_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n B_k \cdot X_k$$

где $A, A_k, B_k > 0$, X_k $k = 1, \dots, n$ — некоторые константы > 0 . Тогда верно неравенство

$$X_{n+1} \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) e^{\sum_{k=1}^n B_k}$$

Лемма 2. Для всех $t \in T$ $S^2 L_2^*(t) \rightarrow 0$ если $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ и $h_n = o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$.

Теорема. Пусть функции $f_1, f_2 \in C_b^1(\mathbb{R})$. Тогда при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что

$\frac{1}{n} = o(h_n)$, $h_n = o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$ для всех $t \in T$ и почти всех $\omega \in \Omega$ решение системы (1) по-

координатно сходится к решению системы (2) если $\sup_{t \in [0, h_n]} |X_1^{n,0}(t) - x_1^0| \rightarrow 0$,

$\sup_{t \in [0, h_n]} |X_2^{n,0}(t) - x_2^0| \rightarrow 0$.

Литература. 1. В. Э. Лесневский. // Докл. НАН Беларуси. 44-4 (2000), с.34-36. 2. N. Lazakovich, V. Lesnevski, S. Stashulenok. // J. Electrotechn. Math. Vol. 6, No. 1, (2001), 1-28. 3. Е. Б. Розин. Тез. докл. международн. мат. конф. "Еругинские чтения-IX." Витебск, 2003. с.125-126

**ПРИМЕНЕНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С
ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ В ОЧЕРЕДЯХ ПРИ
РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СТРАХОВАНИЯ**

Романюк Т.В., ГрГУ, г. Гродно

Пусть страховая компания, состоящая из $n-1$ отдела и центрального отделения, в котором производится расчет, заключила со страхователями K разнотипных договоров страхования: K_i договоров i -о типа, $i = \overline{1, n-1}$, $\sum_{i=1}^{n-1} K_i = K$.

Иск при предъявлении проходит две стадии обработки – стадию оценки в соответствующем типе иска отделе и стадию выплаты в центральном отделении. Оценкой исков в i -м отделе занимаются m_i сотрудников компании (оценщиков), $i = \overline{1, n-1}$; выплатой – m_n сотрудников. Предположим, что вероятность предъявления иска типа i в i -й отдел на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ равна $\mu_{oi}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, где $\mu_{oi}(t)$ – кусочно-постоянная функция времени с двумя интервалами постоянства, характеризующая интенсивность поступления исков:

$$\mu_{oi}(t) = \begin{cases} \mu_{oi}, & t \in [0, T/2], \\ \mu_{oi}^*, & t \in (T/2, T]. \end{cases}$$

Времена обработки исков оценщиками в i -м отделе и времена их обработки сотрудниками в центральном отделении распределены по показательному закону со средним значением μ_i^{-1} , $i = \overline{1, n-1}$, и μ_n^{-1} соответственно. В некоторых случаях оценка исков типа i может быть осуществлена в одном из $n-2$ -х непрофильных отделов, например при наличии очереди в i -м отделе некоторые из страхователей могут предъявить иски для оценки в менее нагруженные отделы, осуществляющие оценку исков смежного типа. Поэтому предположим, что суммарное время пребывания страхователя, подающего иск, в очереди i -о отдела и время, необходимое ему для обращения в другой отдел, распределено также по показательному закону с параметром ν_i , т.е. страхователь не дож-

давшись обслуживанию в i -м отделе с вероятностью q_j предъявляет иск в j -й отдел, $i, j = 1, n-1$.

Состояние компании в момент времени t можно описать вектором $k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$, где $k_i(t)$ и $k_n(t)$ — число исков, находящихся соответственно в i -м отделе, $i = 1, n-1$, и центральном отделении. Качество функционирования компании (средние затраты компании на интервалах времени $[0, T/2]$ и $(T/2, T]$ соответственно) можно описать функционалом

$$W(T) = W(T, m_1, \dots, m_n) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[K \sum_{i=1}^n (d_i n_i(t) + E_i I_i) \right] dt, \quad (1)$$

где d_i, E_i — стоимостные коэффициенты; $n_i(t) = M \left\{ \frac{k_i(t)}{K} \right\}$, $I_i = \frac{m_i}{K}$, $i = 1, n$. Нас будет интересовать задача определения числа оценщиков исков на интервалах времени $[0, T/2]$ и $(T/2, T]$, минимизирующего средние затраты (1) при ограничениях на среднее число исков, находящихся на стадиях обработки.

Вероятностной моделью процесса обработки исков может служить замкнутая сеть МО с ограниченным временем ожидания заявок (исков) в очередях [1], состоящая из центральной СМО S_n (центральное отделение), $n-1$ периферийной СМО S_1, S_2, \dots, S_{n-1} (отделы оценки) и системы S_0 , соответствующей внешней среде (источник поступления исков), $m_0 = K$. Вероятности переходов заявок между СМО следующие: $p_{0i} = 1$ для заявок типа i , $p_{in} = p_{n0} = 1$, $i = 1, n-1$, $p_{ij} = 0$ в остальных случаях; $q_j \neq 0$, $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{n-1} q_j = 1$, $i, j = 1, n-1$, $q_j = 0$ в иных случаях. Доказано следующее утверждение.

Теорема. Плотность распределения вероятностей вектора относитель-

ных переменных $\xi(t) = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_n(t)}{K} \right)$ удовлетворяет с точностью $O(\varepsilon^2)$,

где $\varepsilon = \frac{1}{K}$, уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j(x)p(x,t)) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (B_j(x)p(x,t)), \quad (2)$$

$$\text{где } A_i(x) = \sum_{j=1}^n [\mu_j p_{ji}^* \min(l_j, x_j) + (x_j - l_j) \nu_j q_{ji}^* u(x_j - l_j)] + \mu_{oi}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right), \quad (3)$$

$$p_{ji}^* = \begin{cases} -1 + p_{ij}, & i = j, i, j = \overline{1, n}, \\ 1, & i \neq j, i = n, \\ 0, & i \neq j, i = \overline{1, n-1}; \end{cases} \quad q_{ji}^* = \begin{cases} -1 + q_{ij}, & i = j, j \neq n \\ q_{jn}, & i \neq j, i, j \neq n, \\ 0, & i = n \text{ или } j = n; \end{cases}$$

$$B_{ii}(x) = \sum_{j=1}^n [\mu_j p_{ji}^* \min(l_j, x_j) + (x_j - l_j) \nu_j q_{ji}^* u(x_j - l_j)] + \mu_{oi}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right),$$

$$B_{ij}(x) = -2\mu_i p_{ij} \min(l_i, x_i) - 2(x_i - l_i) \nu_i q_{ij} u(x_i - l_i).$$

Из уравнения (2), как показано в [3], следует, что математические ожидания компонент вектора $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_n(t))$ с той же точностью определяются из системы уравнений

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = A_i(n(t)) = \sum_{j=0}^n [\mu_j p_{ji}^* \min(l_j, n_j(t)) + (n_j(t) - l_j) \nu_j q_{ji}^* u(n_j(t) - l_j)] + \mu_{oi}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n n_k(t)\right), \quad (4)$$

$i = \overline{1, n}$. Правые части уравнений (4) являются кусочно-разрывными функциями.

С помощью разбиения фазового пространства можно определить явную форму системы (4) в областях непрерывности ее правой части:

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{j \in \Omega_0(t)} [\mu_j p_{ji}^* l_j + (n_j(t) - l_j) \nu_j q_{ji}^*] + \sum_{j \in \Omega_1(t)} \mu_j p_{ji}^* n_j(t) + \mu_{oi}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n n_k(t)\right), \quad (5)$$

где $\sum_{j \in \Omega_0(t)} = \sum_{j \in \Omega_0(t)} \dots$, $\sum_{j \in \Omega_1(t)} = \sum_{j \in \Omega_1(t)} \dots$, $\Omega_0(t) = \{j : l_j < n_j(t) \leq 1\}$, $\Omega_1(t) = \{j : 0 \leq n_j(t) \leq l_j\}$ — непересекающиеся множества индексов компонент вектора $n(t)$.

Например, при $n=3$ в области $A_1 : \Omega_0(t) = \{1, 2\}$, $\Omega_1(t) = \{3\}$, $t \in [0, T]$ общее решение системы (5) на полуинтервале $[0, T/2]$ имеет вид $\sum_{j=0}^4 \alpha_{ij} t^j e^{-\alpha_{ij} t}$, где $\alpha_{ij} = 0$, $l_0 = 1$. Таким образом, поставленная выше задача определения числа оценщиков при существовании очередей в отделах по оценке на интервале вре-

мени $[0, T/2]$ может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} W_1(T, m_1, m_2, m_3) = \frac{-2}{T} \int_0^{T/2} \left[K \sum_{i=1}^n (d_i n_i(t) + E_i l_i) \right] dt \rightarrow \min_{m_1, m_2, m_3}, \\ \frac{2}{T} \int_0^{T/2} K n_i(t) dt > m_i, \quad i = 1, 2, \\ \frac{2}{T} \int_0^{T/2} K n_3(t) dt \leq m_3, \quad t \in [0, T/2], \end{cases}$$

Функционал $W_1(T, m_1, m_2, m_3)$ представляет собой линейную функцию от $m_i = K l_i$, $i = \overline{1, 3}$, т.е. $W_1(T, m_1, m_2, m_3) = \sum_{j=0}^4 g_j m_j$. Ограничения оптимизационных

задач в свою очередь могут быть представлены в виде $\sum_{q,j=0}^4 a_{jq} m_q > 0$, $i = \overline{1, 3}$. На

втором полуинтервале $(T/2, T]$ результаты имеют аналогичный вид. Таким образом, на каждом из рассматриваемых интервалов времени получаем задачу линейного программирования.

Литература. 1. Ковалев Е.А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях//Автоматика и вычислительная техника.—1985.—№2.— С. 50-55. 2. Матальцкий М.А., Романюк Т.В. Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения. Монография. — Гродно: ГрГУ, 2003. —200 с. 3. М е д е в е в Г. А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация// Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1978. — №6. — С. 199-203.

АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЯ.

Русина Т.И., БГТУ, Брест

Проблемы теории стохастических дифференциальных уравнений связаны с проблемой умножения обобщенных функций. Такие уравнения содержат произведение обобщенных на недостаточно гладкие функции. В сообщении [1] анонсирована конструкция алгебры обобщенных случайных процессов, которая позволила с единых позиций исследовать решения стохастических уравнений различных классов (см. напр.[2, 3]) с помощью решений соответствующих уравнений в дифференциалах в этой алгебре. При этом исследование ассоциированных решений уравнений в дифференциалах сводится к исследованию

предельного поведения конечных сумм с осреднением следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{m-1} f_n(L_n(t_k))(L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)) \quad (1)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$, $t \in T = [0, a] \subset \mathbb{R}$, а f_n и L_n — соответственно свертки функции f и случайного процесса L с δ -образной последовательностью. В статьях [3, 4] показано, что пределы подобных сумм в случае когда $L(t)$ стандартный процесс броуновского движения [5] полностью описываются стохастическими θ -интегралами [6] вида $(\theta) \int f(L(s)) dL(s)$, $t \in T$ в зависимости от связи диаметра разбиения и δ -образной последовательностью.

В алгебре обобщенных случайных процессов рассматривается предельное поведение сумм вида (1) в случае, когда $L(t)$ — многомерный стандартный процесс броуновского движения, а функция f зависит еще и от времени $t \in T$, т.е. $f = f(t, x)$.

Пусть (Ω, A, P) — полное вероятностное пространство, $\bar{B}(t) = (B^1(t), B^2(t), \dots, B^r(t))$ — r -мерный стандартный процесс броуновского движения [3].

Напомним некоторые понятия из работ [7], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 1. Расширенной прямой \bar{R} называется следующее фактор-множество $\bar{R} = \bar{R} / M$, где $\bar{R} = \{(x_n) : \forall n \in \mathbb{N} x_n \in \mathbb{R}\}$ и $M = \{(x_n) \in \bar{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 x_n = 0\}$.

Аналогичным образом определяется $\bar{T} = \bar{T} / M$, где $t \in T = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\bar{T} = \{(x_n) : \forall n \in \mathbb{N} x_n \in T\}$.

Рассмотрим множество последовательностей функций $f_n(t, \omega) : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- $f_n(t, \cdot)$ является случайной величиной на (Ω, A, P) для всех $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$;
- $f_n(\cdot, \omega) \in C^\infty(T)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и почти всех $\omega \in \Omega$.

Будем говорить, что элементы $F = (f_n(t, \omega))$ и $G = (g_n(t, \omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0 , что для любых $t \in T$ и почти всех $\omega \in \Omega$

$f_n(t, \omega) = g_n(t, \omega)$ при $n > n_0$:

(1) Через $G(T, \Omega)$ обозначим множество классов эквивалентности исходного множества. Очевидно, что $G(T, \Omega)$ образует алгебру с покомпонентным сложением и умножением.

Определение 2. Класс эквивалентности вида $\bar{F}(\bar{t}; \omega) = [(f_n(t_n, \omega))]$, $\bar{t} = [(t_n)] \in \bar{T}$, $[(f_n(t_n, \omega))] \in G(T, \Omega)$ называется обобщенным случайным процессом.

Множество обобщенных случайных процессов обозначим через $G(\bar{T}, \Omega)$; оно является алгеброй с покомпонентными операциями сложения и умножения.

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $\bar{F}(\bar{t}, \omega) = [(f_n(t_n, \omega))] \in G(\bar{T}, \Omega)$ ассоциирует классический случайный процесс с непрерывными, интегрируемыми и т.д. траекториями, если $f_n(t, \omega)$ при $n \rightarrow \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$ или в $L^2(\Omega, A, P)$ сходится к данному процессу в соответствующем пространстве непрерывных, интегрируемых и т.д. функций.

Пусть $\{\Phi_t\}_{t \in T}$ — стандартный поток σ -алгебр, $\Phi_a \subset A$; $B(t), t \in T$ — одномерный стандартный процесс Φ_t -броуновского движения.

Определение 3. Обобщенным случайным процессом броуновского движения называется элемент алгебры $G(\bar{T}, \Omega)$, ассоциирующий $B(t)$.

Рассмотрим произвольную последовательность $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Для любой фиксированной точки t отрезка T имеет место представление: $t = \tau + m_1 h_n$, $h_n > 0$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in [0, h_n)$, $m_1 \in \mathbb{N}$.

Вводят следующие обозначения:

$$S_n f(t, \bar{B}(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} f_n(t, \bar{B}_n(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^i(\tau_i + kh_n) - B_n^i(\tau_i + (k-1)h_n)],$$

где $B_n^i(t) = \int_0^t B^i(t+s) \rho_n^i(s) ds$, $\rho_n^i(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\rho_n^i(t) \geq 0$, $\text{supp } \rho_n^i(t) \subset [0, 1/n]$,

$$\int_0^{1/n} \rho_n^i(s) ds = 1, i = 1, r, \bar{B}_n(t) = (B_n^1(t), B_n^2(t), \dots, B_n^r(t)),$$

$$f_n(t, t_1, t_2, \dots, t_r) = \int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} f(t + s_1 + s_2 + \dots + s_r) \rho_n(s_1, s_2, \dots, s_r) ds_1 ds_2 \dots ds_r,$$

$\bar{\rho}_n$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0, 1/n]^{r+1}$ и $\int_0^1 \dots \int_0^1 \bar{\rho}_n(s, s_1, s_2, \dots, s_r) ds ds_1 \dots ds_r = 1$.

$$K_i(n, h_n) = \iint_{\substack{0 < s, \tau < 1/n \\ |s - \tau| < h_n}} (1 - |s - \tau| h_n^{-1}) \rho_i^n(s) \rho_i^n(\tau) ds d\tau.$$

Доказана теорема, которая является необходимым и достаточным условием сходимости суммы $S_n f(t, \bar{B}(t))$.

Теорема 1. Пусть $f \in C_B^2(\mathbb{R}^2)$ и последовательность $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем $1/n^2 = o(h_n)$. Конечная сумма $S_n f(t, \bar{B}(t))$ сходится в $L^2(\Omega, A; P)$ и равномерно по $t \in T$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности $K_i(n, h_n)$, $i = 1, r$ сходятся при $n \rightarrow \infty$, $0, h_n \rightarrow 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $K_i(n, h_n) \rightarrow (1 - 2\theta_i)$, $\theta_i \in [0, 1/2]$, $i = \overline{1, r}$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, причем $1/n^2 = o(h_n)$,

$$\sup_{t \in T} E \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^r f_n(\tau, (k-1)h_n, \bar{B}_n(\tau, (k-1)h_n)) [B_n^l(\tau, kh_n) - B_n^l(\tau, (k-1)h_n)] - \sum_{l=1}^r (\theta_l) \int_0^t f(s, \bar{B}(s)) dB_l(s) \right)^2 \rightarrow 0.$$

Литература. 1. Лазакевич Н.В. // Доклады АН Беларуси. — 1995 — Т.39 № 3 — С. 20-22. 2. Лазакевич Н.В., Сташуленок С.П. // Теория вероятности и ее применение. — 1996. — Т.41, № 4 — С. 785-809. 3. Лазакевич Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. // Литовский математический сборник. — 1999. — Т.39, № 2 — С. 248-256. 4. Яблонский О.Л. // Доклады АН Беларуси. — 2000 — Т.44 №2 — С.22-26. 5. Ватанабэ С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузные процессы*. М.: Наука, 1986, 448с. 6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*. М.: Наука, 1990, 630с. 7. Лазакевич Н.В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Доклады АН Беларуси. — 1994. — Т.38, № 5. — С. 23-27.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ SM/MSP/1 С МАР-ПОТОКОМ СБОЕВ*Семенова О.В., БГУ, Минск*

Модели управляемых систем массового обслуживания с потоком катастрофических сбоев позволяют учесть особенности потоков информации в современных информационных сетях: разноприоритетность и потребность обеспечения высокого качества обработки приоритетных потоков; ненадежность работы сети и возможность потери части информации при сбоях в системе. Частный случай таких систем есть системы с несколькими режимами работы [1-2]. Выбор режима работы происходит в соответствии с некоторой стратегией (например, одно-, многопороговой или гистерезисной) с целью минимизации экономического критерия качества, оценивающего эффективность работы системы.

Сбои, происходящие в реальных системах массового обслуживания, в том числе и сетях связи, нарушают их работу и, в частности, приводят к потере нескольких или всех запросов. Сбои, вызывающие потерю всех запросов в системе, (disasters) являются важным частным случаем так называемого отрицательного запроса, понятие которого в 1991 году ввел Э. Геленбе [3]. Список работ по исследованию систем с отрицательными запросами и со сбоями можно найти в [3-6].

Марковский процесс обслуживания (MSP) является обобщением обслуживания фазового типа. Система G/MSP/1 с конечным и бесконечным буфером исследована в [7].

Математическая модель

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченным буфером и потоком катастрофических сбоев.

Система имеет n режимов работы, $n \geq 2$. Работа системы в k -м режиме определяется следующим образом. Процесс поступления запросов – SM (Semi-Markovian), задаваемый полумарковским процессом $v, t \geq 0$ с пространством

состояний $\{1, \dots, W\}$ и полумарковским ядром $A^{(k)}(t) = \|A_{v,w}^{(k)}(t)\|_{v,w \in \overline{1,W}}$. Моменты поступления запросов в систему есть моменты изменения состояний процесса $v, t \geq 0$.

Процесс поступления сбоев – МАР-поток (Markov Arrival Process), задаваемый цепью Маркова $\eta, t \geq 0$ с непрерывным временем, пространством состояний $\{0, \dots, N\}$ и матричной производящей функцией $F^{(k)}(z) = F_0^{(k)} + zF_1^{(k)}, |z| \leq 1$.

Подробное описание МАР-потока, как частного случая ВМАР-потока, дано в работе Лукантони [8]. Полагаем, что приход сбоя в систему вызывает немедленный уход из системы всех запросов, включая обслуживаемый запрос.

Процесс обслуживания запросов – MSP (Markovian Service Process). Он управляется цепью Маркова $m, t \geq 0$ с непрерывным временем, пространством состояний $\{0, \dots, M\}$ и матричной производящей функцией $B^{(k)}(z) = B_0^{(k)} + B_1^{(k)}z, k = \overline{1, n}$. Описание MSP-процесса обслуживания запросов приведено в [7].

Поток запросов может изменять свой режим только в моменты поступления запросов. Для управления входящим потоком используется многопороговая стратегия, определяемая следующим образом. Фиксируется набор порогов $(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$, причем $-1 = j_0 < j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{n-1} < j_n = \infty$. Если число запросов в системе в данный момент прихода запроса удовлетворяет неравенству $j_{k-1} + 1 \leq i \leq j_k$, запросы будут поступать в соответствии с k -м режимом, $k = \overline{1, n}$.

Распределение времени ожидания в системе

Пусть $(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ – фиксированный набор порогов. Будем рассматривать поведение системы в моменты поступления запросов в систему. Обозначим через $\vec{\pi}$ вектор стационарных вероятностей того, что в данный момент поступления в системе находится i запросов, $i \geq 0$.

Обозначим через $dW_i^{(k)}(x)$ матрицу, элементы которой имеют следующий вероятностный смысл: время обслуживания i запросов, находящихся в системе

в данный момент поступления запроса будет лежать в интервале $(x, x + dx)$, при условии, что в этот момент в системе находится k запросов, $1 \leq i \leq k + 1$. Пусть

$$\tilde{W}_i^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dW_i^{(k)}(x), \operatorname{Res} > 0.$$

Теорема. Преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения времени ожидания в системе $T(s)$ определяется следующим образом:

$$T(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\pi}_l \tilde{W}_1^{(l)}(s), \operatorname{Res} > 0,$$

где $\tilde{W}_l^{(l)}(s)$, $l \geq 1$ есть компоненты векторов $\tilde{W}_l(s) = (\tilde{W}_1^{(l)}(s), \tilde{W}_2^{(l)}(s), \dots)^T$, $l \geq 1$, определяемых из рекуррентных соотношений

$$\tilde{W}_1(s) = \Delta_0(s) u_0(s),$$

$$\tilde{W}_{i+1}(s) = \Delta_i(s) \left[\sum_{k=1}^i G_{i-k+1}^{(i)}(s) \tilde{W}_k(s) + u_i(s) \right], i \geq 1,$$

$$\Delta_i(s) = \begin{pmatrix} I & \Delta_{12}^{(i)}(s) & \Delta_{13}^{(i)}(s) & \Delta_{14}^{(i)}(s) & \dots \\ O & I & \Delta_{23}^{(i)}(s) & \Delta_{24}^{(i)}(s) & \dots \\ O & O & I & \Delta_{34}^{(i)}(s) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$G_k^{(k)}(s) = \begin{pmatrix} I & -G_1^{(k,j)}(s) & O & O & \dots \\ O & I & -G_2^{(k,j)}(s) & O & \dots \\ O & O & I & -G_3^{(k,j)}(s) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, k \geq 1,$$

$$u_i(s) = (u_1^{(i)}(s), u_2^{(i)}(s), u_3^{(i)}(s), \dots)^T, i \geq 0,$$

элементы матриц $\Delta_i(s)$, $G_k^{(k)}(s)$, $k \geq 1$ и векторов $u_i(s)$, $i \geq 0$ задаются формулами

$$\Delta_{nm+k}^{(i)}(s) = \prod_{l=1}^k G_{m+l-1}^{(i,j)}(s), m, k \geq 1,$$

$$\begin{cases} G_l^{(k,j)}(s) = X_k^{(j)}(s), & u_l^{(i)}(s) = Q_i^{(j)}(s), & l = \overline{1, j_v - i}, \\ G_l^{(k,j)}(s) = X_k^{(j+1)}(s), & u_l^{(i)}(s) = Q_i^{(j+1)}(s), & l = \overline{j_v - i + 1, j_{v+1} - i}, \\ \dots & \dots & \dots \\ G_l^{(k,j)}(s) = X_k^{(j)}(s), & u_l^{(i)}(s) = Q_i^{(j)}(s), & l > j_{v-1} - i, \end{cases}$$

$k \geq 0, j_{v-1} + 1 \leq i \leq j_v,$

$$Q_i^{(j)}(s) = V_i^{(j)}(s) (B_{(j+1)w}^{(j)} \otimes I_{(n+1)w}) + \sum_{l=0}^i V_l^{(j)}(s) (I_{M+l} \otimes F_l^{(j)} \otimes I_w), i \geq 0, j = \overline{1, n},$$

а матрицы $X_i^{(v)}(s), Y_i^{(v)}(s), i \geq 0, v = \overline{1, n}$ — есть коэффициенты матричных разложений

$$\sum_{i=0}^{\infty} X_i^{(v)}(s) z^i = \int_0^{\infty} e^{s^{(v)}(x)t} \otimes e^{F_0^{(v)}t} e^{-st} \otimes (A^{(v)}(\infty) - A^{(v)}(t)) dt;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{(v)}(s) z^i = \int_0^{\infty} e^{s^{(v)}(x)t} \otimes e^{F_0^{(v)}t} e^{-st} \otimes dA^{(v)}(t), v = \overline{1, n}, \operatorname{Re} s > 0.$$

- Литература.** 1. Dudin A.N., Nishimura S., Optimal control for a BMAP/G/1 queue with two service modes // Math. Probl. Engin. — 1999. — Vol. 5. — P. 255–273. 2. Dudin A.N., Klimenok V.I., Optimal admission control in a queueing system with heterogeneous traffic // Operations Research Letters. — 2003. — Vol. 31. — P. 108–118. 3. Gelenbe E., Product form networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. — 1991. — Vol. 28. — P. 655–663. 4. Artalejo J., G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks // Eur. J. Oper. Res. — 2000. — Vol. 126. — P. 233–249. 5. Dudin A.N., Nishimura S., A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival of disasters // J. Appl. Prob. — 1999. — Vol. 36., № 3. — P. 868–881. 6. Dudin A.N., Karolik A.V., BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Performance Evaluation. — 2001. — V. 45. — P. 19–32. 7. Бочаров П.П., Д’Апиче Ч., Печинкин А.В., Салерно С. Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/1/r // Автоматика и телемеханика. — 2003. — №2. — С. 127 – 142. 8. Lucantoni D.M., New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Commun. Stat. Stochastic Models. — 1991. — Vol. 7. — P. 1–46.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ИНТЕРВАЛЫ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ВЫПЛАТ ИМЕЮТ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Семенчук Н.В., ГрГУ, Гродно.

Рассматривается задача нахождения вероятности разорения страховой компании в случае, когда интервалы между выплатами имеют показательные распределения, а величины выплат одинаково распределены, и имеют произвольное распределения. В качестве частного случая рассмотрен случай, когда величины выплат имеют показательное распределение. Для нахождения вероятности разорения страховой компании используются комбинаторные методы.

Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_i, \dots$ — размеры выплат в момент τ_i — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$, а $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$ — моменты наступления событий данного пуассоновского процесса. Случайные величины $\{\chi_i\}$ и $\{\tau_i\}$ независимы. Кроме того,

разности: $\tau_i - \tau_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots; \tau_0 = 0$), являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ для } x \geq 0; a = E\{\chi_i\}.$$

Тогда вероятность того, что разорение произойдет в интервале $(0, t)$,

равна

$$P\{\theta_x \leq t\} = 1 - P\{\sup_{0 \leq u \leq t} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leq x\},$$

а вероятность того, что разорение когда-нибудь произойдет равна

$$P\{\theta_x < \infty\} = 1 - P\{\sup_{0 \leq u < \infty} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leq x\}.$$

Если вероятности $P\{\theta_x < \infty\}$ и $P\{\theta_x \leq t\}$ известны, то можно принять меры предосторожности (увеличение премии, перестрахование и т. д.), позволяющие уменьшить вероятность разорения настолько, чтобы оно было практически невозможно.

Обозначим

$$W(t, x) = P\{\sup_{0 \leq u \leq t} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leq x\}$$

и заручившись тем, что

$$W(x) = P\{\sup_{0 \leq u < \infty} [\tilde{\chi}(u) - cu] \leq x\}.$$

Тогда

$$W(t, x) = P\{\sup_{0 \leq u \leq t} \xi(u) \leq x\}$$

и

$$W(x) = P\{\sup_{0 \leq u < \infty} \xi(u) \leq x\},$$

где $\xi(u) = \tilde{\chi}(u) - cu$ для $u \geq 0$.

Получены интегро-дифференциальные уравнения для $W(t, x)$ и $W(x)$.

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} = c \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} - \lambda W(t, x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} W(t, x - y) dH(y)$$

$$cW'(x) = \lambda \left[W(x) - \int_{-\infty}^{\infty} W(x - y) dH(y) \right]$$

В случае если величины выплат имеют показательное распределение:

$$H(x) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ (1 - \alpha)e^x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$.

Тогда при $c > 0$ и $c + \lambda(1 - 2\alpha) > 0$, для $x \geq 0$

$$W(x) = 1 - (1 + \gamma_2)e^{\gamma_2 x}.$$

При $c < 0$ и $c + \lambda(1 - 2\alpha) > 0$ для $x \geq 0$.

$$W(x) = 1 - \frac{(1 + \gamma_1)\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\gamma_1 x} - \frac{(1 + \gamma_2)\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{\gamma_2 x}$$

где $\gamma_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4c[c + \lambda(1 - 2\alpha)]}}{2c}$ и $\gamma_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4c[c + \lambda(1 - 2\alpha)]}}{2c}$.

Литература. 1. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. - М.: Издательство «Мир», 1971. - 264 с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Сидоревич М.П., БГТУ, г. Брест, Гучко И.М., БГУ, г. Минск

Следуя [1,2], будем называть продуктивную межотраслевую балансовую модель статической, если в ней все зависимости отнесены к одному моменту времени, т.е. все ее компоненты полагаются осредненными за некоторый временной промежуток. Такие модели характеризуют лишь состояние экономики на данный период времени и не позволяют установить взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития экономики. К тому же в них капиталовложения вынесены из сферы производства и включены в конечный продукт, что не дает возможности проанализировать распределение, использование и производственную эффективность этих вложений. В динамических моделях капиталовложения выделяются из состава конечного продукта, исследуется их структура и влияние на рост объема производства. Принципиальная схема динамического баланса может быть представлена следующей таблицей:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли											Конечный продукт	Валовой продукт	
	Межотраслевые потоки текущих затрат					Межотраслевые потоки капиталовложений					...			
	1	2	...	j	...	n	1	2	...	j				...
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	$\Delta\Phi_{11}$	$\Delta\Phi_{12}$...	$\Delta\Phi_{1j}$...	$\Delta\Phi_{1n}$	y'_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	$\Delta\Phi_{21}$	$\Delta\Phi_{22}$...	$\Delta\Phi_{2j}$...	$\Delta\Phi_{2n}$	y'_2	x_2
...
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	$\Delta\Phi_{i1}$	$\Delta\Phi_{i2}$...	$\Delta\Phi_{ij}$...	$\Delta\Phi_{in}$	y'_i	x_i
...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	$\Delta\Phi_{n1}$	$\Delta\Phi_{n2}$...	$\Delta\Phi_{nj}$...	$\Delta\Phi_{nn}$	y'_n	x_n

Здесь $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор валового выпуска, а $Y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ – вектор конечного продукта динамической модели.

Так как сумма потоков капиталовложений и конечного продукта динамической модели равна конечной продукции статического баланса, т.е.

$\sum_{j=1}^n \Delta\Phi_{ij} + y'_i = y_i, i = \overline{1, n}$, то распределение продукции вида $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, i = \overline{1, n}$ по

i -ой отрасли в динамическом балансе запишется следующим образом

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n \Delta\Phi_{ij} + y'_i. \quad (1)$$

Предположим, что капиталовложения обуславливают прирост продукции, причем прирост продукции текущего периода обусловлен вложениями, произведенными в этом же периоде. Следовательно, если текущий период обозначить через t , то прирост продукции Δx_i равен разности абсолютных уровней производства в период t и в предшествующий $(t-1)$ -й период: $\Delta x_i = x_i^{(t)} - x_i^{(t-1)}$.

Считаем также, что прирост продукции пропорционален приросту производственных фондов, т.е.

$$\Delta\Phi_{ij} = \varphi_{ij} \Delta x_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Коэффициенты пропорциональности φ_{ij} называются коэффициентами вложений или коэффициентами приростной фондоемкости, а матрица Φ – матрицей коэффициентов приростной фондоемкости. Элемент φ_{ij} матрицы Φ показывает, какое количество продукции i -ой отрасли должно быть вложено в j -ую от-

расль для увеличения ее производственной мощности на единицу. Значит j -й столбец матрицы Φ характеризует для j -ой отрасли величину и структуру фондов, необходимых для увеличения на единицу ее объема выпуска (производственной мощности). Предполагается, что производственные мощности используются полностью и прирост продукции равен приросту мощности.

Если учесть, что по Леонтьеву $x_{ij} = a_{ij}x_j$, где a_{ij} – технологические коэффициенты, то с учетом (2) система уравнений (1) примет вид

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}\Delta x_j + y_i', \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Переходя от дискретных величин к непрерывным, из (3) получим динамическую модель баланса:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}\dot{x}_j + y_i', \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $\dot{x}_j = dx_j/dt$.

Соотношения (4) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Будем исследовать систему (4) на устойчивость по Ляпунову, считая числовые матрицы $A = (a_{ij})$ и $\Phi = (\varphi_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ заданными и продуктивными, причем $A \geq 0$ и $\Phi \geq 0$, $\det \Phi \neq 0$. Запишем систему (4) в виде

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{ij}\dot{x}_j = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - y_i', \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

или $\Phi \cdot X = (E - A) \cdot X - Y'$.

Положим в (5)

$$z_i = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - y_i', \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

В матричной форме система (7) запишется

$$(E - A) \cdot X = Z + Y', \quad (8)$$

где $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$. Так как матрица A продуктивна, то из (8) следует, что система (7) имеет единственное решение

$$X = (E - A)^{-1} \cdot (Z + Y'), \quad (9)$$

т.е.

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n A_{ij} z_j + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n A_{ij} y'_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Здесь $\Delta = \det(E-A)$, A_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы $E-A$. Дифференцируя равенства (10), будем иметь

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{z}_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Подставляя выражения для x_i и \dot{x}_i из (10) и (11) соответственно в равенства (5), получим систему, которая в матричной форме примет вид

$$\Phi(E-A)^{-1} \dot{Z} = Z. \quad (12)$$

По предположению матрица Φ продуктивна, значит она имеет единственную обратную матрицу Φ^{-1} . Следовательно, из (12) приходим к автономной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{Z} = ((E-A) \cdot \Phi^{-1}) Z. \quad (13)$$

Заметим следующее: из равенства (7) или (9) следует, что если движение устойчиво (неустойчиво) относительно переменного вектора Z , то оно будет устойчиво (неустойчиво) и относительно вектора X и наоборот.

Исследование системы (13) на устойчивость приведено, например, в [3,4]. В частности, если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы (13) отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Если среди корней характеристического уравнения системы (13) имеется хотя бы один корень, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво. Невозмущенное движение системы (13) будет устойчивым, но не асимптотически, в случае, если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители; в противном случае движение будет неустойчивым. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ собственные значения матрицы $B=(E-A)\Phi^{-1}$. Тогда от движения (8) не зависит характер движения (7) тогда и только тогда, когда:

- 1) Если все собственные значения λ_i матрицы B имеют отрицательные ве-

ществленные части, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, то точка покоя системы (13) асимптотически устойчива;

2) Если хотя бы один корень λ_i матрицы В имеет положительную вещественную часть, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то точка покоя системы (13) неустойчива;

3) Если собственные значения с нулевой вещественной частью являются простыми, а остальные собственные значения, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть, то точка покоя системы (13) устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

Литература. 1. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с. 2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с. 3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Наука и техника, 1972. – 664 с. 4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

О МЕРЕ ЗАВИСИМОСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ МНОГОМЕРНОГО УСТОЙЧИВОГО ПРОЦЕССА

Соболева Т. В., БГУ, Минск

Исследование свойств устойчивых процессов с характеристическим показателем α , $0 < \alpha < 2$, во временной области традиционными методами затруднено, так как у них существуют конечные моменты только порядка p , $0 < p < \alpha$. Для таких процессов ковариационная функция не определена.

В данной работе вводится в рассмотрение мера зависимости между составляющими многомерного устойчивого процесса с дискретным временем в виде некоторой функции, называемой, аналогично [1], динамической функцией.

Рассмотрим r -мерный симметричный стационарный α -устойчивый случайный процесс $x^r(t) = \{x_a(t), a = \overline{1, r}\}$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \dots\}$, $r > 1$ с независимыми приращениями.

В качестве функции, описывающей структуру зависимости составляющих $x_a(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1, r}$, процесса $x^r(t)$, $t \in Z$, $r > 1$, рассмотрим функцию $Rd_a(\tau)$, $\tau \in Z_+$, — которая имеет вид:

$$Rd_a(\tau) = E \exp\{i(x_a(t+\tau) - x_a(t))\}, \quad (1)$$

где $t \in Z$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \dots, X_a(T-1)$ — T последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $x_a(t)$, $t \in Z$, процесса $x^r(t)$, $t \in Z$. В качестве оценки функции $Rd_a(\tau)$, $\tau \in Z$, рассмотрим статистику вида

$$Rd_a^T(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \exp\{i(X_a(t+\tau) - X_a(t))\}, \quad (2)$$

$\tau = \overline{0, T-1}$, $a = \overline{1, r}$.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия статистики (2) имеют вид:

$$E(Rd_a^T(\tau)) = Rd_a(\tau),$$

$$D(Rd_a^T(\tau)) = \frac{1}{T-\tau} (Rd_a(\tau, 2) - (Rd_a(1))^{2\tau}) + (Rd_a(1))^{2\tau} - (Rd_a(\tau))^2,$$

где $Rd_a(\tau, 2) = E \exp\{i2(X_a(t+\tau) - X_a(t))\}$, $Rd_a(1) = E \exp\{i(X_a(t+1) - X_a(t))\}$.

Доказательство. Исследуем величину смещения оценки (2).

$$E(Rd_a^T(\tau)) = E \left[\frac{1}{T-\tau} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \exp\{i(X_a(t+\tau) - X_a(t))\} \right] = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} E \exp\{i(X_a(t+\tau) - X_a(t))\} = Rd_a(\tau),$$

т. е. оценка (2) является несмещённой. Вычислим дисперсию оценки (2). Рассмотрим $E(D\hat{F}^T(\tau))^2$.

$$\begin{aligned} E(D\hat{F}^T(\tau))^2 &= E \left(\frac{1}{T-\tau} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \exp\{i(X_a(t+\tau) - X_a(t))\} \right)^2 = \\ &= E \left(\frac{1}{(T-\tau)^2} \left(\sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} \exp\{i2(X_a(t_1+\tau) - X_a(t_1))\} + \sum_{\substack{t_1, t_2=0 \\ t_1 \neq t_2}}^{T-\tau-1} \exp\{i(X_a(t_1+\tau) - X_a(t_1) + X_a(t_2+\tau) - X_a(t_2))\} \right) \right). \end{aligned}$$

Далее в показателе степени суммы по $t_1 \neq t_2$ добавим и вычтем слагаемых вида $X_a(t_1+1), \dots, X_a(t_1+\tau-1)$ и $X_a(t_2+1), \dots, X_a(t_2+\tau-1)$.

Тогда получим

$$E(D\hat{F}^T(\tau))^2 = E \left(\frac{1}{(T-\tau)^2} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau-1} \exp\{i2(X_a(t+\tau) - X_a(t))\} + \right. \right.$$

$$+ \sum_{\substack{T-1 \\ i_1, i_2}} \exp \left\{ i \left(\sum_{j=1}^T (X_a(t_1+j) - X_a(t_1+(j-1)) + X_a(t_2+j) - X_a(t_2+(j-1))) \right) \right\}.$$

Сгруппировав попарно в показателе степени j -го слагаемого полученные разности, учитывая свойства математического ожидания, приходим к доказательству теоремы

Литература. 1. J. Nowicka, A. Weron Measures of dependence for ARMA models with stable innovations. Annales universitatis Mariae Curie. VOL. L I. 1.14. 1997. p. 133.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Старовойтов С. А., БГУТ, г. Гомель

Слоистые элементы относятся к классу технологичных, широко распространенных в промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение, строительство) деталей конструкций. Это обуславливает необходимость предварительного проектного расчета, создание методик, позволяющих исследовать НДС трехслойных элементов.

Рассматривается упругий несимметричный по толщине трехслойный стержень длины l , лежащий на упругом основании Винклера [1]. На внешние слои стержня действуют распределенная силовая нагрузка $q_0(x)$ и реакция упругого основания $q_f(x)$.

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Материалы всех слоев считаются несжимаемыми в поперечном направлении. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительноному сдвигу слоев.

В работах [2], [3] было исследовано напряженно-деформированное состояние трехслойного металлополимерного стержня, находящегося под комплексным термосиловым воздействием. В данной работе рассматривается напряжен-

но-деформированное состояние подобного стержня, лежащего на упругом основании, под действием распределенной нагрузки.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия получены с использованием вариационного метода Лагранжа:

$$\delta A + \delta W = 0, \quad (1)$$

где δA , δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений:

$$\delta A = \iint_S (p \delta u + q \delta w) dS = b \int_0^l (p \delta u + q \delta w) dx;$$

$$\delta W = - \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x^{(k)} \delta \epsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} \delta k_3) dz dS;$$

где δ_{k3} – символы Кронекера.

Внутренние силовые факторы, входящие в вариации работ, выражаются через три линейно независимые функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$ – тангенциальное перемещение, сдвиг и прогиб срединной плоскости заполнителя. В результате следует система линейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} = 0;$$

$$a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi = 0;$$

$$a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} + a_7 w_{,xxx} = q_0(x) + q_r, \quad (2)$$

где $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$ – искомые функции; a_1, \dots, a_7 – коэффициенты, зависящие от свойств материалов и геометрических параметров слоев стержня; q_r – реакция упругого основания (k – коэффициент постели): $q_r = -kw$.

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Принимаем граничные условия для стержня:

- заземленного с двух сторон: при $x = 0, l$ $w = w_{,x} = u = \psi = 0$;

- шарнирно опертого по краям: при $x = 0, l$ $M = w = u = \psi = 0$.

Из системы (2) получено дифференциальное уравнение для определения прогиба стержня:

$$\alpha_1 w_{,xxxxx} + \alpha_2 w_{,xxxx} + \alpha_3 w_{,xx} + \alpha_4 w = f(x), \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – коэффициенты, определяющиеся через a_1, \dots, a_7 ; $f(x)$ – функция, зависящая от вида внешней нагрузки.

Решение уравнения (3) можно представить в виде:

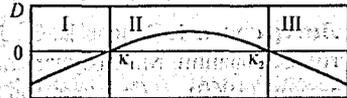
$$w(x) = w_0(x) + w_p(x). \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для каждого $w_0(x)$:

$$\alpha_1 \lambda^5 + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_4 = 0. \quad (5)$$

Если в качестве материала несущих слоев принять сплав Д16Т, а материал заполнителя – фторопласт [4], то получим, что дискриминант D уравнения (5)

два раза меняет знак в зависимости от значения коэффициента постели k



(рисунок 1). Границы областей решения при этих стандартных условиях разделены на три области:

Рисунок 1

I – при $0 < k < 3,1 \cdot 10^7$ Па/м – легкие основания;

II – при $k_1 = 3,1 \cdot 10^7$ Па/м $< k < k_2 = 6,4 \cdot 10^8$ Па/м – основания средней жесткости;

III – при $k > k_2 = 6,4 \cdot 10^8$ Па/м – жесткие основания.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (3), при $D < 0$ можно записать в виде:

$$w_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot x} + C_3 e^{\lambda_3 \cdot x} + C_4 e^{\lambda_4 \cdot x} + C_5 e^{\lambda_5 \cdot x} + C_6 e^{\lambda_6 \cdot x},$$

В случае $D > 0$ общее решение однородного уравнения принимаем в виде:

$$w_0(x) = C_1 e^{\lambda_{31} \cdot x} + C_2 e^{\lambda_{32} \cdot x} + C_3 e^{\lambda_{31} \cdot x} \cdot \cos(\lambda_{32} \cdot x) + C_4 e^{\lambda_{41} \cdot x} \cdot \sin(\lambda_{42} \cdot x) + C_5 e^{\lambda_{51} \cdot x} \cdot \cos(\lambda_{52} \cdot x) + C_6 e^{\lambda_{61} \cdot x} \cdot \cos(\lambda_{62} \cdot x),$$

где C_1, \dots, C_6 – константы интегрирования.

Частное решение уравнения (2) принимаем в зависимости от типа распределенной нагрузки:

- для равномерно распределенной нагрузки: $w_p = \frac{q_0}{k}$;

(1) - для линейно распределенной нагрузки: $w_p(x) = \frac{q_0 x}{k}$.

Выражения для $\psi(x)$, $u(x)$ следуют из системы (2). Деформации выражаются через полученные функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$; напряжения определяются из закона Гука. Константы интегрирования следуют из граничных условий.

Численная реализация полученного решения проведена для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т и трехслойного пакета с металлическими несущими слоями и наполнителем различной жесткости. Величина нагрузки и относительные толщины слоев принимались таким образом, чтобы не выйти за пределы упругих деформаций.

Литература. 1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Государственное издательство физико-математической литературы (1960). 2. Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Упругопластический изгиб трехслойного стержня // *Материалы, технологии, инструменты* (1997), № 2, 88-92. 3. Яровая А. В. Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня в условиях абляции // *Материалы, технологии, инструменты* (2000), № 3, 23-25. 4. Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель: БелГУТ (2001)

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ ГИБРИДНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

© Стельмах С.Н., БГУ, г. Минск

В работе рассматриваются системы трехточечных сеточных уравнений с разделенными граничными условиями вида:

$$G_0 y_0 + G_1 y_1 = \mu_0 \quad (1)$$

$$A_i^{(1)} y_{i-1} - C_i^{(1)} y_i + B_i^{(1)} y_{i+1} = -F_i^{(1)}, \quad i \in I_{(0,p)}^{(1)} \quad (2.1)$$

$$A_i^{(2)} y_{i-1} - C_i^{(2)} y_i + B_i^{(2)} y_{i+1} = -F_i^{(2)}, \quad i \in I_{(p,q)}^{(2)} \quad (2.2)$$

$$A_i^{(3)} y_{i-1} - C_i^{(3)} y_i + B_i^{(3)} y_{i+1} = -F_i^{(3)}, \quad i \in I_{(q,N)}^{(3)} \quad (2.3)$$

$$G_{N-1} y_{N-1} + G_N y_N = \mu_N \quad (3)$$

где $I_{(k,t)}^{(s)} = \{i | k \leq i \leq t\}$ – множество индексов ($k=0, p, q, t=p, q, N$); $A_i^{(s)}, C_i^{(s)}, B_i^{(s)}$,

H_k, G_k - заданные матрицы порядка M , $F_i^{(s)}, \mu_0, \mu_N$ - известные векторы порядка M . Предполагается, что $\det(A_i^{(s)}, B_i^{(s)}) \neq 0$, $\text{rang}[G_0 | G_1] = \text{rang}[H_{N-1} | H_N] = M$.

При этом на параметры исходной системы налагается ряд условий, соотношенных к соответствующим $I_{(k,t)}^{(s)}$; в частности, предполагается, что:

$C_i^{(1)} = C, B_i^{(1)} = A_i^{(1)} = E$ при $i \in I_{(0,p)}^{(1)}$, т.е. возможна реализация метода редукции на $I_{(0,p)}^{(1)}$; на $I_{(p,q)}^{(2)}$ подсистема (2.2) такова, что корректна реализация метода матричной прогонки; при $i \in I_{(q,N)}^{(3)}$ на (2.3) допускается эффективная реализация марш-алгоритма.

Обычно в случае однородных сред уравнения (2.1), (2.2), (2.3) по своим свойствам, т.е. по свойствам коэффициентов и правых частей на всем отрезке одинаковы. В случае неоднородных сред свойства коэффициентов $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$ на соответствующих подынтервалах могут существенно различаться. Чтобы наиболее эффективно использовать на каждом из подынтервалов соответствующие алгоритмы, необходимо решить проблему их конструктивного соединения, что является основным предметом исследований в этой работе и ниже приведено описание вычислительного алгоритма для решения системы (1), (2.s), (3), основанного на соединении вычислительных методов редукции, матричной прогонки и марш-алгоритма (РПМА) [1].

Для упрощения дальнейших выкладок выскажем следующие ограничения, в условиях (1), (3) положим $G_0 = H_N = E, G_1 = H_{N-1} = 0$.

Пусть как это должно быть в методе редукции $p = 2^m$. Рассмотрим уравнение в верхней точке прямого хода редукции после m -ого шага исключения [2]:

$$y_0 - S^{(m-1)} y_{p/2} + y_p = -T_p^{(m-1)} \quad (4)$$

где матрицы $S^{(m-1)}$ и векторы $T_p^{(m-1)}$ находятся из рекуррентных формул:

$$S^k = (S^{(k-1)})^2 - 2E, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad S^0 = C \quad (5)$$

$$T_i^k = T_i^{(k-1)} + S^{(k-1)} T_i^{(k-1)} + T_{i+2}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad T_i^0 = T_i \quad (6)$$

$$i = 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k$$

Т.к. y_p — неизвестно, то обратный шаг метода редукции осуществить нельзя. Игнорируя этот факт, фиктивно находим левое граничное условие для метода матричной прогонки для $i \in I_{(p,q)}^{(2)}$ используя рекурсионное соотношение:

$$y_{p-1} 2^{m-i} = L y_p + D_i, \quad i = m-2, \dots, 1, 0, \quad (7)$$

где

$$L_i = [S^{(i)}]^{-1} (L_{i+1} + E), \quad L_{m-1} = [S^{(m-1)}]^{-1},$$

$$D_i = [S^{(i)}]^{-1} (D_{i+1} + T_{i+1}^{(i)} y_{p-1} 2^{m-i}), \quad D_{m-1} = [S^{(m-1)}]^{-1} (\mu_0 + T_{p/2}^{(m-1)})$$

Из (7) при $i = 0$ имеем левое граничное условие метода матричной прогонки для $i \in I_{(p,q)}^{(2)}$ в классическом виде [2]:

$$-C_{p-1} y_{p-1} + B_{p-1} y_p = -F_{p-1} \quad (8)$$

где $C_{p-1} = -E, B_{p-1} = -L_0, F_{p-1} = -D_0$.

Далее переносим граничное условие (8) методом прогонки в точки $q, q+1$:

$$-C_q^{(*)} y_q + B_q^{(*)} y_{q+1} = -F_q^{(*)} \quad (9)$$

где $C_q^{(*)} = E, B_q^{(*)} = \alpha_{q+1}, F_q^{(*)} = \beta_{q+1}$, а $\alpha_{q+1}, \beta_{q+1}$ находятся из рекуррентных

формул [2]:

$$\alpha_{i+1} = (C_i^{(2)} - A_i^{(2)} \alpha_i)^{-1} B_i^{(2)}, \quad \alpha_p = [C_{p-1}]^{-1} B_{p-1} \quad (10)$$

$$\beta_{i+1} = (C_i^{(2)} - A_i^{(2)} \alpha_i)^{-1} (A_i^{(2)} \beta_i + F_i^{(2)}), \quad \beta_p = [C_{p-1}]^{-1} F_{p-1}, \quad i = p+1, \dots, q. \quad (11)$$

Модифицируем марш-алгоритм таким образом, чтобы стартовые значения

в нем генерировались внутри подынтервала $I_{(q,N)}^{(3)}$ и сеточное решение для $i \in I_{(q,N)}^{(3)}$ определим по формулам[3]:

$$y_{i-1} = P_i^{(j)} y_j + Q_i^{(j)} y_{j+1} + R_i^{(j)}, \quad i = j, j-1, \dots, q+2, q+1, \quad (12)$$

$$y_{i+1} = K_i^{(j)} y_j + L_i^{(j)} y_{j+1} + M_i^{(j)}, \quad i = j+1, j+2, \dots, N-1, \quad (13)$$

где матрицы $P_i^{(j)}, Q_i^{(j)}, K_i^{(j)}, L_i^{(j)}$ и вектора $R_i^{(j)}, M_i^{(j)}$, определяются в [3].

Положим в (12), $i = q+1, q+2$ и подставим получившиеся значения для y_q, y_{q+1} в (9). Положим также в (13) $i = N-1$ и подставим значение y_N в граничное условие (3). Таким образом, мы получим систему ЛАУ порядка $2M$ для определения векторов y_j и y_{j+1} :

$$a_{11}(j,q) y_j + a_{12}(j,q) y_{j+1} = b_1(j,q), \quad (14)$$

$$a_{21}(j,N) y_j + a_{22}(j,N) y_{j+1} = b_2(j,N), \quad (15)$$

где $a_{11}(j,q) = -C_q^{(*)} P_{q+1}^{(j)} + B_q^{(*)} P_{q+2}^{(j)}$, $a_{12}(j,q) = -C_q^{(*)} Q_{q+1}^{(j)} + B_q^{(*)} Q_{q+2}^{(j)}$,

$$b_1(j,N) = -F_q^{(*)} + C_q^{(*)} R_{q+1}^{(j)} - B_q^{(*)} R_{q+2}^{(j)}, \quad a_{21}(j,N) = K_{N-1}^{(j)}, \quad a_{22}(j,N) = L_{N-1}^{(j)},$$

$$b_2(j,N) = \mu_N - M_{N-1}^{(j)}.$$

Предположим, что $\det[(a_{ij})] \neq 0$, тогда система ЛАУ (14),(15) имеет единственное решение y_j, y_{j+1} , которое является решением задачи (1),(2,s),(3).

Далее по формулам (12),(13) находим решение для $i \in I_{(q,N)}^{(3)}$. Решение на $I_{(q,q)}^{(2)}$ находим по методу разностной прогонки по уже известным граничным условиям. Затем т.к. на подынтервале $I_{(q,p)}^{(1)}$ известны крайние условия

$y_0 = \mu_0, y_p = y_p^*$ (y_p^* найдено по методу прогонки) осуществляем обратный ход метода редукции и, таким образом, находим решение задачи (1), (2,s), (3).

Следует отметить, что описанный гибридный метод особенно эффективен в случае, когда $p \gg q - p \gg N - q$. Универсальность метода заключается в том, что процедуры, описанные в работе естественно индуцируются и на те случаи, когда число подынтервалов больше трех, а в случае неустойчивости классических схем методов редукции и матричной прогонки могут быть реализованы методы множественной редукции и множественного маршрута алгоритма [3].

Литература. 1: Монастырский П.И. Доклады АН Беларуси. 2000 Т 44, №1 – С. 35-38. 2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы – М.: Наука, 1989. 3. Монастырский П.И., Азаров А.И., Артюгин В.Г. Доклады АН Беларуси. 1991. Т. 35, № 12 – С. 1065-1068

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Стрилец Н. Н., БрГУ, Брест

Рассматривается периодическая краевая задача Дуффинга [1]:

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) + x^3(t) = 50 \cos t, \\ x(0) - x(2\pi) = 0, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0.$$

Достаточно популярным для решения такого типа задач является конечно-разностный метод.

Суть его заключается в том, что решение краевой задачи в результате дискретизации и замены производных их разностными аналогами (например, по методу неопределенных коэффициентов [2]) сводится к решению системы нелинейных уравнений. Полученную систему, как правило, решают одним из сверхлинейных квазиньютоновских итерационных методов 2-го порядка [3]. Однако здесь в процессе приближения к решению может наблюдаться разболтка. Поэтому на практике хорошо себя зарекомендовала следующая схема: просчет сначала ведут методом 2-го порядка до точности 10^{-2} , а затем подключают метод 3-го порядка [4].

Для оценки эффективности полученного из нелинейной системы сеточного решения его обычно восстанавливают в аналитическом виде с последующей подстановкой в исходную дифференциальную задачу. Всюду далее под эффективностью будем понимать малость нормы невязки на восстановленном приближенном решении. При этом эффективность оценки приближенного решения

часто существенно зависит от способа аппроксимации.

В настоящее время существует много различных методов аппроксимации функций. Среди них достаточно широкое применение в периодическом случае получили аппроксимация отрезком тригонометрического ряда Фурье и сплайнами. В данной работе были исследованы кубический сплайн, сплайн 5-ой и 7-ой степеней, естественные сплайны произвольной степени.

Естественные сплайны подробно описаны в работе [5].

Кубический сплайн детально разобран в работе [6].

Следуя идеям этой же работы, можно вывести аналогичные формулы и для сплайнов 5-ой [7] и 7-ой степеней. Приведем принципиальную схему построения сплайна 7-ой степени.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана равномерная сетка

$$\bar{\Delta}_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

с шагом h . Введем обозначения: $S_7(t)$ — сплайн 7-ой степени, $x(t_i) = x_i$, $S_7''(t_i) = A_i$, $S_7^{IV}(t_i) = B_i$, $S_7^{VI}(t_i) = C_i$, $i = \overline{0, n}$.

При этом предполагалось, что в случае периодического сплайна имеют место периодические краевые условия

$$S_7^{(k)}(a) = S_7^{(k)}(b), \quad k = \overline{0, 6},$$

а в случае непериодического сплайна — непериодические краевые условия

$$S_7^{(2k+1)}(a) = x_a^{(2k+1)}, \quad S_7^{(2k+1)}(b) = x_b^{(2k+1)}, \quad k = 0, 2.$$

Тогда кусочно-многочленная форма представления сплайна 7-ой степени имеет вид:

$$\begin{aligned} S_7(t) = & x_i + \left[\frac{\Delta x_i}{h} - \frac{h}{6}(2A_i + A_{i+1}) + \frac{h^3}{360}(8B_i + 7B_{i+1}) - \right. \\ & \left. - \frac{h^5}{15120}(32C_i + 31C_{i+1}) \right] (t - t_i) + \frac{A_i}{2}(t - t_i)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \left[\frac{\Delta A_i}{h} - \frac{h}{6}(2B_i + B_{i+1}) + \frac{h^3}{360}(8C_i + 7C_{i+1}) \right] (t - t_i)^3 + \\ & + \frac{B_i}{24}(t - t_i)^4 + \frac{1}{120} \left[\frac{\Delta B_i}{h} - \frac{h}{6}(2C_i + C_{i+1}) \right] (t - t_i)^5 + \\ & + \frac{C_i}{720}(t - t_i)^6 + \frac{\Delta C_i}{5040h}(t - t_i)^7, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

где параметры A_i , B_i , C_i определяются из линейной системы порядка $3n$:

$$\begin{cases} \frac{4A_0 + A_1 + A_{n-1}}{6h^4} - \frac{16B_0 + 7B_1 + 7B_{n-1}}{360h^2} + \frac{64C_0 + 31C_1 + 31C_{n-1}}{15120} = \frac{-2x_0 + x_1 + x_{n-1}}{h^6}, \\ \frac{A_{i-1} + 4A_i + A_{i+1}}{6h^4} - \frac{7B_{i+1} + 16B_i + 7B_{i-1}}{360h^2} + \frac{31C_{i+1} + 64C_i + 31C_{i-1}}{15120} = \frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^6}, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \frac{A_0 + A_{n-2} + 4A_{n-1}}{6h^4} - \frac{7B_0 + 7B_{n-2} + 16B_{n-1}}{360h^2} + \frac{31C_0 + 31C_{n-2} + 64C_{n-1}}{15120} = \frac{x_0 + x_{n-2} - 2x_{n-1}}{h^6}, \\ \frac{-2A_0 + A_1 + A_{n-1}}{h^4} - \frac{4B_0 + B_1 + B_{n-1}}{6h^2} + \frac{16C_0 + 7C_1 + 7C_{n-1}}{360} = 0, \\ \frac{A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}}{h^4} - \frac{B_{i+1} + 4B_i + B_{i-1}}{6h^2} + \frac{7C_{i+1} + 16C_i + 7C_{i-1}}{360} = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \frac{A_0 + A_{n-2} - 2A_{n-1}}{h^4} - \frac{B_0 + B_{n-2} + 4B_{n-1}}{6h^2} + \frac{7C_0 + 7C_{n-2} + 16C_{n-1}}{360} = 0, \\ \frac{2B_0 - B_1 - B_{n-1}}{h^2} + \frac{4C_0 + C_1 + C_{n-1}}{6} = 0, \\ \frac{-B_{i-1} + 2B_i - B_{i+1}}{h^2} + \frac{C_{i-1} + 4C_i + C_{i+1}}{6} = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \frac{-B_0 - B_{n-2} + 2B_{n-1}}{h^2} + \frac{C_0 + C_{n-2} + 4C_{n-1}}{6} = 0, \end{cases}$$

если $x(t)$ — периодическая функция, и из линейной системы порядка $3n+3$:

$$\begin{cases} \frac{2A_0 + A_1}{6h^4} - \frac{8B_0 + 7B_1}{360h^2} + \frac{32C_0 + 31C_1}{15120} = \frac{\Delta x_0}{h^6} - \frac{x'_0}{h^3}, \\ \frac{A_{i-1} + 4A_i + A_{i+1}}{6h^4} - \frac{7B_{i+1} + 16B_i + 7B_{i-1}}{360h^2} + \frac{31C_{i+1} + 64C_i + 31C_{i-1}}{15120} = \frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^6}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{A_{n-1} + 2A_n}{6h^4} - \frac{7B_{n-1} + 8B_n}{360h^2} + \frac{31C_{n-1} + 32C_n}{15120} = \frac{x'_0}{h^3} - \frac{\Delta x_{n-1}}{h^6}, \\ \frac{A_0 - A_1}{h^4} - \frac{2B_0 + B_1}{6h^2} + \frac{8C_0 + 7C_1}{360} = -x''_0 h, \\ \frac{A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}}{h^4} - \frac{B_{i+1} + 4B_i + B_{i-1}}{6h^2} + \frac{7C_{i+1} + 16C_i + 7C_{i-1}}{360} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{-A_{n-1} + A_n}{h^4} - \frac{B_{n-1} + 2B_n}{6h^2} + \frac{7C_{n-1} + 8C_n}{360} = x''_0 h, \\ \frac{B_0 - B_1}{h^2} + \frac{2C_0 + C_1}{6} = -x'_0 h, \\ \frac{-B_{i-1} + 2B_i - B_{i+1}}{h^2} + \frac{C_{i-1} + 4C_i + C_{i+1}}{6} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{-B_{n-1} + B_n}{h^2} + \frac{C_{n-1} + 2C_n}{6} = x'_0 h, \end{cases}$$

если $x(t)$ – непериодическая функция.

Вычислительный эксперимент показал, что наиболее эффективным для аппроксимации приближенных решений периодических краевых задач является отрезок тригонометрического ряда Фурье. С ним сравним по точности сплайн 7-ой степени (как естественный, так и описанный в данной работе). Несколько худшие результаты дает сплайн 5-ой степени. При этом необходимо отметить то обстоятельство, что с увеличением числа узлов аппроксимации различия между описанными выше подходами становятся практически неощутимыми. Аппроксимация же кубическим сплайном оказалась наименее эффективной ввиду своей невысокой точности.

Литература. 1. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М., 1984. 2. Березин И. С. Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х т.: Т. 1. – М., 1966. 3. Мадорский В. М. Локализация решений нелинейных уравнений // Труды Института математики НАН Беларуси – Минск, 2002. – Т. 11. – С. 96 – 103. 4. Мадорский В. М. Численная локализация решений нелинейных уравнений методами третьего порядка // Труды междунар. науч. конф. SAATS-97 – Брест, 1997. – С. 241 – 248. 5. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Естественные сплайны произвольной степени // Доклады РАН. – 1966. – Т. 351. № 6. – С. 738-742. 6. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. – М., 1983. 7. Мадорский В. М., Стрилец Н. Н. К вопросу аппроксимации функций сплайном пятой степени // Вестник Брестского ун-та. – 2002. – № 4. – С. 24 – 32.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПИКАРА НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Фалейчик Б.В., БГУ, Минск

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в локальной постановке:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(t) = y, \quad t \leq x \leq t + \tau. \quad (1)$$

Процесс последовательных приближений Пикара запишем в виде (см: [1]; [2])

$$u^i(x) = y + \int f(z, u^{i-1}(z)) dz, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Предположим, что нам известно начальное приближение $u^0(x)$. На отрез-

ке $[t, t + \tau]$ зададим равномерную сетку узлов $x_j = t + jh, j = 0, 1, \dots, m, h = \frac{\tau}{m}$ (3)

$$x_j = t + jh, j = 0, 1, \dots, m, h = \frac{\tau}{m} \quad (3)$$

Введем также следующие обозначения:

$$y^i(x) \approx u^i(x), y_j^i = y^i(x_j), f_j^i = f(x_j, y_j^i).$$

Приближение $y^i(x)$ к точному решению представим в виде кусочно-гладкой функции, составными частями которой являются алгебраические многочлены $y_j^i(x)$ степени $p+1$:

$$y_j^i(x) = y_j^i + \sum_{k=0}^p \frac{1}{(k+1)!} (x - x_j)^{k+1} \alpha_{j,k}, x \in [x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, m-1}.$$

Для определения $y^i(x)$ необходимо найти y_j^i , а также $\alpha_{j,k}, j = \overline{0, 1, \dots, m-1}, k = \overline{0, 1, \dots, p}$. Процесс нахождения этих неизвестных опишем на примере $p=2$:

$$y_j^i(x) = y_j^i + (x - x_j) \alpha_{j,0} + \frac{1}{2} (x - x_j)^2 \alpha_{j,1} + \frac{1}{6} (x - x_j)^3 \alpha_{j,2}. \quad (4)$$

Пусть $j=0$: Исходя из (1), имеем $y_0^i = y, i \geq 0$. Таким образом, один коэффициент многочлена $y_0^i(x)$ нам уже известен. Для определения оставшихся неизвестных обратимся к процессу Пикара (2), который определяет связь между текущим приближением и значениями правой части (1) на предыдущем приближении. Для $y_0^i(x)$ эта связь может быть выражена следующим образом:

$$y_0^i(x_n) = f(x_n, y^{i-1}(x_n)), \quad (5)$$

где $y_j^i(x) = \frac{d}{dx} y_j^i(x)$, а x_n - произвольные, вообще говоря, узлы сетки (3). По-

ложив в (5) $n = 0, 1, 2$, получим систему из трех линейных уравнений для определения остальных коэффициентов $y_0^i(x)$ (см. (4)). Определитель матрицы этой системы является определителем Вандермонда, домноженным на отличную от нуля константу. Следовательно, решение всегда существует и единственно. В нашем случае

$$\begin{aligned}\alpha_{0,0} &= f_0^{i-1}, \\ \alpha_{0,1} &= -\frac{1}{2h}(3f_0^{i-1} - 4f_1^{i-1} + f_2^{i-1}), \\ \alpha_{0,2} &= \frac{1}{h^2}(f_0^{i-1} - 2f_1^{i-1} + f_2^{i-1}).\end{aligned}\quad (6)$$

Итак, мы полностью определили многочлен $y_0^i(x)$. Рассмотрим теперь $y_1^i(x)$. По аналогии со случаем $j=0$ сначала найдем коэффициент y_1^i . Запишем для $y^i(x)$ традиционное условие непрерывности кусочно-гладкой функции в узлах сетки:

$$y_j^i(x_j) = y_j^i = y_{j-1}^i(x_j), \quad i \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (4), из (7) для $j=1$, находим

$$y_1^i = y_0^i + \frac{h}{12}(5f_0^{i-1} + 8f_1^{i-1} - f_2^{i-1}). \quad (8)$$

Осталось определить $\alpha_{1,k}$, $k=0,1,2$. Для этого воспользуемся условиями, схожими с (5), но предварительно сделаем два важных замечания. Во-первых, как видно из (8), в точке x_1 уже известно уточненное на текущей итерации значение приближенного решения. Поэтому при постановке условий типа (5) разумно использовать значение f_1^i вместо f_1^{i-1} . Второе замечание касается выбора точек x_n . Мы будем стремиться к тому, чтобы при вычислениях использовать те точки, в которых известны самые "свежие" (наиболее точные, вообще говоря) значения приближенного решения. Поэтому и здесь положим $n=0,1,2$:

$$v_1^i(x_0) = f_0^i, \quad v_1^i(x_1) = f_1^i, \quad v_1^i(x_2) = f_2^{i-1}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}\alpha_{1,0} &= f_1^i, \\ \alpha_{1,1} &= \frac{1}{2h}(f_2^i - f_0^{i-1}), \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1}{h^2}(f_0^{i-1} - 2f_1^{i-1} + f_2^{i-1}).\end{aligned}$$

Таким образом, мы определили $y_1^i(x)$. Соответствующее (8) выражение

для y_2^i имеет вид

$$y_2^i = y_1^i + \frac{h}{12}(5f_2^{i-1} + 8f_1^i - f_0^i). \quad (9)$$

На основе (8) и (9) записывается общий вид вычислительных модулей, с помощью которых находятся значения y_j^i во всех точках сетки (3):

$$\begin{aligned} y_j^i &= y_{j-1}^i + \frac{h}{12}(5f_{j-1}^{i-1} + 8f_j^{i-1} - f_{j+1}^{i-1}), \\ y_{j+1}^i &= y_j^i + \frac{h}{12}(-f_{j-1}^i + 8f_j^i + 5f_{j+1}^{i-1}), \\ j &= \overline{1, m-1}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Вычислительные правила, по виду схожие с (10), могут быть получены способом численного интегрирования, описанным в [3, с. 48-55]. Принципиальным отличием наших методов является распространение вычислительного процесса на всю сетку (3), а также многообразие способов такого распространения.

По описанной выше схеме были построены методы для $p=3, 4, 5$. Их состоятельность проверялась на модельной задаче

$$u'(x) = Au(x), \quad u(0) = y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

$$u(x) = (u(x)_1, u(x)_2, u(x)_3)^T,$$

$$A = \text{diag}\{150, -10^{-14}, -150\},$$

$$y = (1, 1, 1)^T.$$

Результаты сравнивались с численным решением задачи (11), полученным с помощью метода Рунге-Кутты, реализованного в пакете *Mathematica 4.0*. Например, метод типа (10) для $p=3$ с более высокой точностью вычислил значения быстро изменяющихся первой и третьей компонент решения, а также адекватно отразил медленную составляющую $u(x)_2 = \exp(-10^{-14}x)$. В то же время вторая компонента, полученная методом Рунге-Кутты, "подвисла": оказалась константой вследствие малости шага дискретизации и ограниченности разрядной сетки ЭВМ.

Литература. 1. Бобков В.В., Кучмиенко И.А., Фалейчик Б.В. Дискретный аналог метода Пикара // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. №3. С. 68–71.
 2. Фалейчик Б.В. Метод последовательных приближений Пикара с использованием тригонометрической интерполяции // Сборник статей VII Республиканской конференции студентов и аспирантов Беларуси “НИРС-2002” / УО “ВГТУ”. - Витебск, 2002. С. 48–50. 3. В. Э. Милн. Численное решение дифференциальных уравнений / Пер. с англ. под ред. М. Р. Шура-Бура. М.: Издательство иностранной литературы, 1955.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ В РАСЧЕТЕ ОБЪЕМА ФИНАНСИРОВАНИЯ ПЛАНОВЫХ И АВАРИЙНЫХ РЕМОНТНЫХ РАБОТ НА НЕФТЕПРОВОДАХ

Фаткуллин Н.Ю., Уфимский нефтяной ГТУ, г. Уфа, Россия

Собственные средства предприятий, направляемые на капитальный ремонт, реконструкцию и аварийно-восстановительные работы нефтепроводов в условиях рыночной экономики, с одной стороны, должны быть надежно защищены от таких неблагоприятных факторов, как инфляционные процессы, а с другой стороны, должны быть достаточными для решения вопросов по обеспечению надежного функционирования трубопроводного транспорта нефти.

В связи с этим в работе предложен метод формирования совокупного “погасительного” (накопительного) фонда для проведения плановых и аварийных ремонтно-восстановительных работ на нефтепроводах на основе последовательных взносов на депозитные банковские вклады, при условии начисления по ним сложных процентов. Таким образом, предлагается формировать специальный фонд (ПФ), состоящий из трех основных частей – ремонтного фонда (ПФ_{кр}), фонда реконструкции и технического перевооружения (ПФ_{рек}) и страхового фонда на случаи аварийных ситуаций (ПФ_{ав}):

$$\text{ПФ} = \text{ПФ}_{\text{кр}} + \text{ПФ}_{\text{рек}} + \text{ПФ}_{\text{ав}}, \quad (1)$$

где

$$\text{ПФ}_{\text{кр}} = \sum_{j=1}^n R_{\text{кр}j} \cdot (1+i)^j, \quad (2)$$

$$\text{ПФ}_{\text{рек}} = \sum_{j=1}^n \left(R_{\text{рек}j} \begin{matrix} \text{рек} \\ \text{ам} \end{matrix} + R_{\text{рек}j} \begin{matrix} \text{рек} \\ \text{чн} \end{matrix} \right) \cdot (1+i)^j, \quad (3)$$

$$\text{ПФ}_{\text{ав}} = \left(\sum_{h=1}^5 P_h \cdot Y_h - \sum_{h=1}^5 S_h \right) \cdot \sum_{j=1}^n \xi_j \cdot (1+i)^j; \quad (4)$$

$R_{\text{кр}}$ – ежемесячные отчисления на капитальный ремонт, руб.;

$R_{\text{реkj}}^{(\text{ам})}$ – ежемесячные отчисления на реконструкцию из амортизационных средств, руб.;

$R_{\text{реkj}}^{(\text{чп})}$ – ежемесячные отчисления на реконструкцию из чистой прибыли, руб.;

i – процентная ставка, %;

P_h – вероятность возникновения факторов, определяющих параметры ожидаемого ущерба при эксплуатации нефтепровода;

Y_h – виды ущерба в результате аварии;

Y_1 – ущерб от повреждения оборудования, коммуникаций и др., руб.;

Y_2 – ущерб от потерь транспортируемых нефтепродуктов, руб.;

Y_3 – ущерб от нарушения договорных отношений с потребителями и поставщиками, руб.;

Y_4 – экологический ущерб, руб.;

Y_5 – уплата штрафов в связи с нарушениями законодательных и нормативных требований, руб.;

S_h – страховые компенсации, руб.;

ξ_j – весовой коэффициент выплат в j -м месяце;

j – номер месяца в период накопления.

В условиях недостаточности объема финансирования работ по плановому капитальному ремонту и по ликвидации последствий аварийных ситуаций возможно использование целевых кредитов банков. Для выплаты кредита, обеспечивающего своевременное финансирование ремонтных и аварийных работ, в части, не покрываемой амортизацией и процентами по нему, предлагается рассчитывать “погасительный” фонд с учетом начисления процентов по взносам и процентов за долг по полученному кредиту. В дальнейшем, с учетом случайного характера возникновения аварийной ситуации на магистральных нефтепро-

водах в течение года, представляется рациональным при анализе деятельности организации нефтепроводного транспорта использовать метод статистических испытаний, который позволяет построить экономико-математическую модель проекта финансирования мероприятий по капитальному ремонту, реконструкции и аварийно-восстановительных работ с учетом фактора аварийности. Метод статистических испытаний заключается, в данном случае, в численной реализации развертывающегося во времени процесса функционирования предприятия и накопления статистической информации для последующего анализа (рис.1).

Апробация разработанной имитационной модели была произведена на основе показателей хозяйственной деятельности одной из дочерних организаций трубопроводного транспорта нефти ОАО "АК"Транснефть". Для проведения расчетов использовался язык Visual Basic в среде табличного процессора Excel 2000 MS Office. В работе получены результаты имитационного моделирования формирования финансовых ресурсов организации при условии начисления от 3% до 20% по средствам "погасительного" фонда и при условии отказа организации от его формирования.

Итоги моделирования для данной конкретной организации подтверждают высказанные в работе предположения о том, что с увеличением процентов по отчислениям в "погасительный" фонд должна проследиваться тенденция к росту объемов финансовых ресурсов при одновременном снижении риска их достижения. Статистический анализ результатов моделирования также подтвердил предположение, что создание "погасительного" фонда позволяет снизить неблагоприятные воздействия случайных факторов – аварий на хозяйственную деятельность организации, и что именно внедрение в практику деятельности организаций нефтепроводного транспорта "погасительного" фонда, позволяет не только производить ее "самострахование" в текущем плановом периоде, но и создавать резервы на перспективу, обеспечивающие более устойчивое в финансовом отношении функционирование организации.

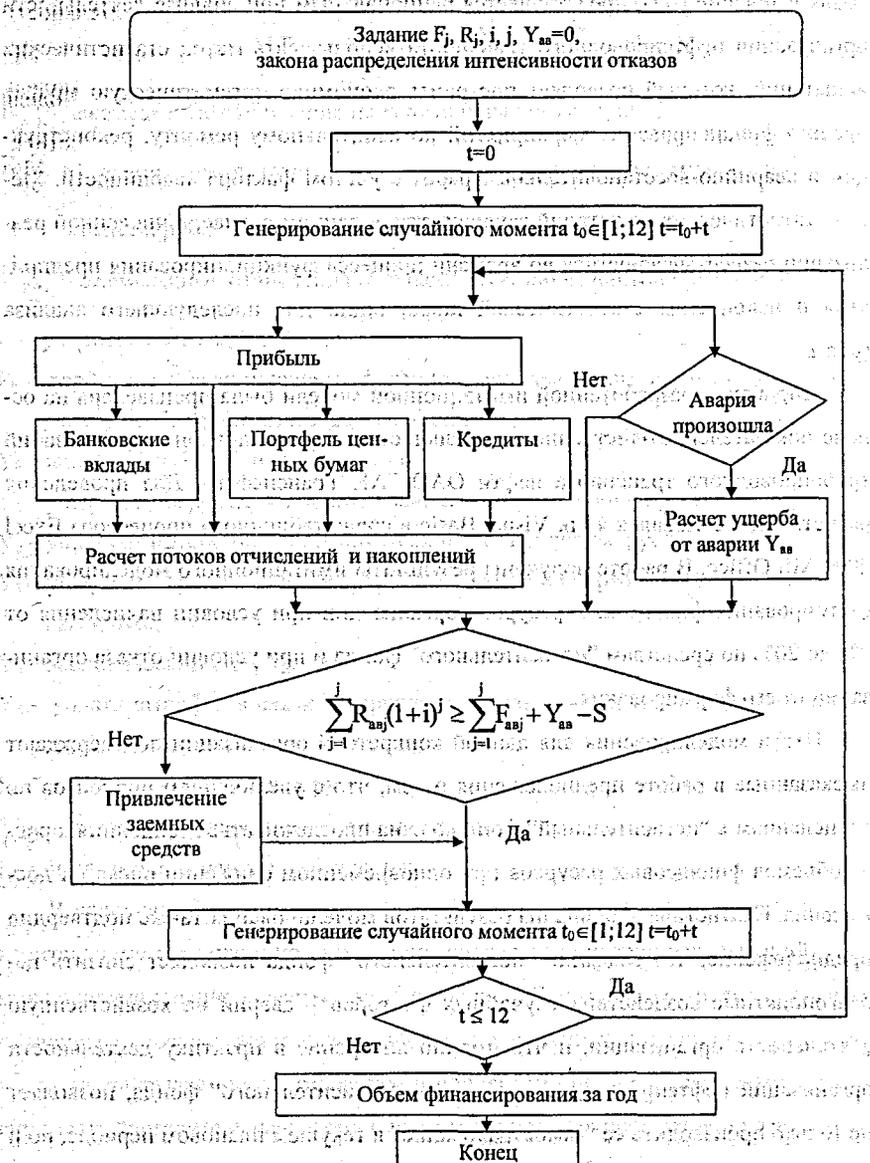


Рис. 1. Блок-схема расчета объема финансирования организации за год на основе метода статистических испытаний

СХОДИМОСТЬ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Фетисова С.А., Савчук В.Ф., БрГУ, г. Брест

Рассматривается в гильбертовом пространстве H уравнение 1-го рода $Ax = y_\delta$ с ограниченным положительным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Следовательно, решение уравнения единственно. Однако нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача отыскания решения уравнения $Ax = y_\delta$ некорректна. Для решения уравнения предлагается итеративный метод

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^3 x_{n,\delta} + A^{-1} [E - (E - \alpha A)^3] y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (1)$$

В работе изучена сходимость метода (1) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ гильбертова пространства H . Использование энергетической нормы как бы заменяет истокорпредставимость точного решения x уравнения порядка $s = 1/2$ и для получения оценки погрешности метода (1) не требуется знание порядка истокорпредставимости точного решения и истокорпредставляющего элемента. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (1) при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если выбирать число итераций n из условия $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Теорема 2. При условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ для метода (1) справедлива оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (6n\alpha\epsilon)^{-1/2} \|x\| + \left(\frac{15}{4}n\alpha\right)^{1/2} \delta, n \geq 1$.

Полученная оценка оптимизирована по n и найдено n_{opt} , т.е. номер шага итераций, при котором оценка $\|x - x_{n,\delta}\|_A$ наименьшая. Рассматривается вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства. Справедлива

Теорема 3. Если выполнены условия: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, где $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, $0 < \varepsilon \ll \|A\|$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме пространства H .

ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Харкович А.П., БГТУ, Брест

Осциллятором называют физическую систему, совершающую колебания.

Понятие осциллятора играет важную роль в теории электромагнитного излучения, в теории колебания спектров молекул, в теории твёрдого тела.

Рассмотрим классический осциллятор — механическую систему, совершающую колебательные движения около положения равновесия. Получим дифференциальное уравнение такой системы, решим его, найдём кинетическую, потенциальную и полную энергию осциллятора.

Пусть колебательная система представляет частицу массой m , совершающую колебания вдоль оси Ox около положения равновесия O под действием силы F , которая пропорциональна отклонению x от положения равновесия O и направленной к этому положению, т. е.

$$F = -k \cdot x,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

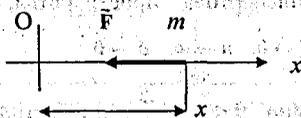


Рис. 1

На основании второго закона Ньютона

$$m x'' = -k \cdot x$$

или

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m} > 0$.

Так как уравнение (1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, то колебательная система, описываемая этим уравнением, называется *линейным гармоническим осциллятором*.

Найдём общее решение уравнения (1). Так как корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ равны $\lambda_1 = i\omega$ и $\lambda_2 = -i\omega$, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (2)$$

Решение (2) можно представить вначале в виде

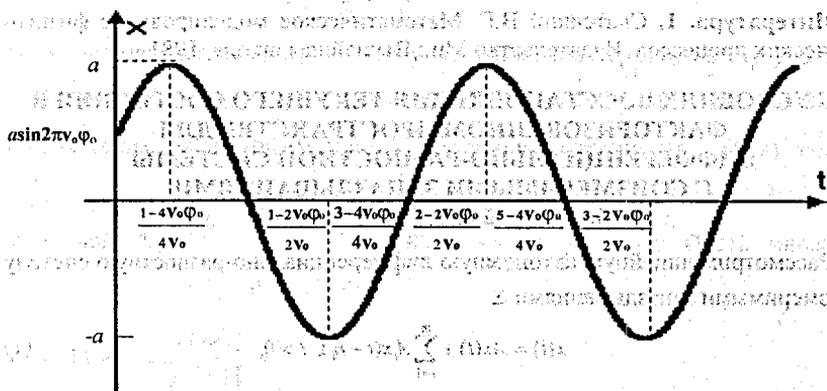
$$x = a \sin(\omega t + \varphi),$$

где a – амплитуда, ω – частота, φ – начальная фаза, а затем с учётом периодичности функции $\sin(\omega t + \varphi)$

$$x = a \sin 2\pi \nu_0 (t + \varphi_0), \quad (3)$$

где $\nu_0 = \frac{\omega}{2\pi}$, $\varphi_0 = \frac{\varphi}{2\pi \nu_0}$

Построим график решения (3)



Частица проходит через положение равновесия $x=0$ в момент времени

$$t = \frac{n - 2\nu_0 \varphi_0}{2\nu_0}, \text{ а крайние положения } x = \pm a \text{ при } t = \frac{1 - 2n + 4\nu_0 \varphi_0}{4\nu_0}.$$

Найдём кинетическую, потенциальную и полную энергии системы.

Так как скорость частицы $v = \frac{dx}{dt} = 2\pi\nu_0 a \cos 2\pi\nu_0(t + \varphi_0)$

то кинетическая энергия

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} 4\pi^2 \nu_0^2 a^2 \cos^2 2\pi\nu_0(t + \varphi_0).$$

Потенциальную энергию осциллятора найдем по формуле

$$E_p = - \int_0^x F du = \int_0^x k u du = k \frac{u^2}{2} \Big|_0^x = \frac{k}{2} x^2,$$

При $k = m\omega^2$ с учетом (3)

$$E_p = 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 \sin^2 2\pi\nu_0(t + \varphi_0).$$

В точке равновесия ($x' = 0$) $E_p = 0$, а $E_k = 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 m$, в точках $x = \pm a$, $E_k = 0$, $E_p = 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 m$.

Полная энергия осциллятора $E = E_k + E_p = 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 m$ постоянна в любой момент времени. При совершении колебательных движений происходит лишь преобразование кинетической энергии в потенциальную и потенциальной в кинетическую. Этот результат опровергает утверждение о том, что в точке равновесия $x = 0$ полная энергия осциллятора равна нулю, приведенное в [1] в качестве главного отличия линейного гармонического осциллятора от квантового.

Литература. 1. Скатецкий В.Г. Математическое моделирование физико-химических процессов. Издательство Мн.: Вышэйшая школа, 1981.

ОБ УСЛОВИЯХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ В ФАКТОРИЗОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Хартовский В.Е., ГрГУ, Гродно

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями Σ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t-h_i), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in H^- = [-h, 0], \quad (2)$$

$$y(i) = Gx(i) + \sum_{i=1}^m G_i x(i-h_i), \quad t \in T = [0, t_1], \quad (3)$$

где x — n -вектор-столбец решения уравнения (1), ($n \geq 2$); y — l -вектор-столбец

выходных величин системы $\Sigma (l \geq 1)$; $h_i = i\omega$, $\omega > 0 (i = \overline{1, m}, m \geq 1)$, $h = m\omega$ - постоянные запаздывания; $t_1 > 0$ - фиксированный момент времени; A, A_i, G, G_i - постоянные матрицы соответствующих размерностей ($A_m \neq 0$). Начальное состояние $\eta \in C$, где $C = C(H^-, R^n)$ - банахово пространство непрерывных функций с топологией равномерной сходимости. Под состоянием x_t системы Σ в момент времени $t \geq 0$ будем понимать функцию $x_t = x_t(\tau) = x(t + \tau)$, $\tau \in H^-$, через $x_{t, \eta}$ будем обозначать состояние x системы Σ , порожденное начальной функцией η .

Уравнение (1) задает [1] сильно непрерывную полугруппу ограниченных линейных преобразований $T(t): C \rightarrow C$, действующих по формуле $x_{t, \eta} = T(t)\eta$, $t > 0$. Пусть $W(\lambda) = \lambda E - A - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda h_i}$ - характеристическая матрица системы Σ , K - множество комплексных чисел, $\Lambda = \{\lambda \in K | \det W(\lambda) = 0\}$ - спектр уравнения (1). Через P_λ обозначим обобщенное собственное пространство системы Σ , соответствующее $\lambda \in \Lambda$, P_λ - линейная оболочка функций

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{i+1} \frac{\tau^i}{i!} e^{\lambda \tau}, \quad \tau \in H^-, k \geq 1, \quad (4)$$

где k - алгебраическая кратность $\lambda \in \Lambda$ как нуля характеристического уравнения $\det W(\lambda) = 0$, а $\gamma = \text{col}[\gamma_1, \dots, \gamma_k]$ - nk -вектор-столбец, удовлетворяющий системе алгебраических уравнений $M_k(\lambda)\gamma = 0$, постоянная матрица $M_k = M_k(\lambda)$ задается

формулой $M_k = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \dots & W_k \\ 0 & W_1 & \dots & W_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W_1 \end{bmatrix}$, $W_{j+1} = \frac{W^{(j)}(\lambda)}{j!}$, $j = \overline{0, k-1}$. Пусть множество

$$\Lambda^0 = \left\{ \lambda \in K \left| \text{rank} \begin{bmatrix} W(\lambda) \\ Z(\lambda) \end{bmatrix} < n \right. \right\}.$$

Один и тот же выход (3) может порождаться несколькими начальными состояниями (2). Поэтому всякому выходу y может соответствовать несколько текущих состояний x_t . Каждое такое состояние будем называть совместимым с

измеряемым выходом.

Пусть $Y = \{y | y \in C\}$ - совокупность всех выходов системы Σ , $\{x_i\}$ - класс текущих состояний, совместимых с выходом y . Множество Y будем рассматривать как многообразие в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(T, R')$. Введем оператор L_1 с областью определения Y : $L_1 y = x_1$, который будем называть оператором восстановления класса $\{x_i\}$, текущих состояний, совместимых с измеренным выходом y .

О п р е д е л е н и е 1. Систему Σ назовем идентифицируемой, если оператор восстановления $L_1: L_2 \rightarrow C$ однозначен и непрерывен.

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Для однозначности оператора восстановления необходимо и достаточно, чтобы множество Λ^0 было пусто.

Рассмотрим случай, когда множество $\Lambda^0 \neq \emptyset$ и состоит из конечного числа $\lambda \in \Lambda$. Введем в рассмотрение матрицы $Z(\lambda) = G + \sum_{j=1}^m G_j e^{-\lambda t_j}$; $Z_{j+1} = \frac{Z^{j+1}(\lambda)}{j!}$, по-

стоянную матрицу $N_k = N_k(\lambda)$ имеющую вид $N_k = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_k \\ 0 & Z_1 & \dots & Z_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_1 \end{bmatrix}$. Обозначим

через $P_k^0 \subseteq P_k$ - множество функций (4), коэффициенты γ_j , которых удовлетворяют алгебраическому уравнению $N_k(\lambda)\gamma = 0$.

Справедлива следующая

Л е м м а 1. Пусть P^0 -линейная оболочка пространств P_k^0 . Для того, чтобы P^0 было конечномерным и совпадало с $\{x_i\}_0$ -линейным многообразием текущих состояний x_i , совместимых с нулевым выходом при $t_i \geq (n+1)h$, необходимо и достаточно, чтобы множество Λ^0 было конечным.

Пусть множество Λ^0 конечно. Поскольку оператор сдвига $T(t)$ системы Σ вполне непрерывен и при $t \geq (n+1)h$ имеет обратный, то из конечномерности

многообразия P^0 следует его замкнутость. Факторизуем пространство C по P^0 [2,3] и рассмотрим задачу идентификации в факторизованном пространстве. Фактор-пространство $F = C/P^0$ состоит из классов смежности $\tilde{\varphi} = \{\varphi + z, \varphi \in P^0, z \in C$. Два класса $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\xi}$ равны, если $\tilde{\varphi} - \tilde{\xi} \in P^0$. Отметим, что фактор-пространство F банахово относительно нормы $\|\tilde{\varphi}\|_F = \inf_{\varphi \in P^0} \|\varphi + z\|_C$.

Определим линейный оператор $\tilde{L}_1 : L_2 \rightarrow F$ по формуле: $\tilde{L}_1 y = L_1 y$.

О п р е д е л е н и е 2. Систему Σ назовем c -идентифицируемой (class-идентифицируемой) [2], если многообразие P^0 конечномерно.

Пусть $k(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda)A_1 & D(\lambda)A_2 & \dots & D(\lambda)A_{m-1} & D(\lambda)A_m \\ \Delta(\lambda)E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(\lambda)E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta(\lambda)E & 0 \end{bmatrix}$ $(mn \times mn)$ -матрица,

$C(\lambda) = [GD(\lambda)A_1 + G_1\Delta(\lambda), GD(\lambda)A_2 + G_2\Delta(\lambda), \dots, GD(\lambda)A_m + G_m\Delta(\lambda)]$ $(l \times mn)$ -матрица.

Определим матрицы $C^0(\lambda) = \text{col}[C(\lambda), C(\lambda)k(\lambda), \dots, C(\lambda)k^{m-1}(\lambda)]$, $K(\lambda) = k^m(\lambda)$, $L_n(\lambda) = \text{col}[C^0(\lambda), C^0(\lambda)K(\lambda), \dots, C^0(\lambda)K^{n-1}(\lambda)]$.

Параметрический критерий c -идентифицируемости системы Σ доставляет следующая

Т е о р е м а 2. Условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} L_n(\lambda) \\ K^n(\lambda) \end{bmatrix} = \text{rank} L_n(\lambda), \text{ для почти всех } \lambda \in K, \quad (5)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы система Σ была c -идентифицируемой.

Далее в докладе приводится граничная задача для восстановления текущего состояния в предположении, что система Σ является c -идентифицируемой.

Литература 1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 2. Метельский А. В. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28, №11. С. 1969-1976. 3. Метельский А. В. // Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31, №8. С.1353-1360.

В БИОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Хиревич С.И., БГУ, Минск

Метод пульсирующего градиента магнитного поля широко применяется для изучения диффузионного движения и времени ЯМР-релаксации молекул жидкости в биологической среде [1, 2]. Создание математической модели для изучения результатов, полученных при ЯМР-измерениях важно для дальнейшего развития данных методов измерений и обработки экспериментально полученных данных. Существуют различные подходы к этой проблеме. Например, модели, основанные на методе Монте-Карло [3, 4, 5]. Также существуют аналитические модели, основанные на так называемом приближении дельта-импульсного градиента [6, 7, 8] и, наконец, численные модели, основанные на решении 2-го закона Фика для диффузии [9, 10]. В русле последнего подхода ведётся достаточно много исследований. Не так давно была реализована одномерная модель многоячейной системы и двумерная в полярных координатах [10, 12]. Эти программы предназначены для решения численных задач с помощью конечно-разностной схемы. Известно, что этот метод даёт хорошую точность решения. Однако, постоянство шага сетки – особенность конечно-разностного метода. Отсюда вытекает необходимость решать неоправданно большую систему уравнений для моделирования биологических объектов, части которых имеют широко варьируемые размеры. Метод конечных элементов устраняет этот недостаток – вычислительная область может быть покрыта сеткой с нерегулярным шагом. Этот метод уже реализован в среде FEMLAB (развитие PDE toolbox MATLAB).

Для того, чтобы оценить возможность использования пакета FEMLAB для изучения результатов ЯМР измерений в пористой и биологической среде, мы выполнили большое количество вычислительных экспериментов. Сначала мы проверили соответствие решений, полученных при помощи пакета FEMLAB с широко известной аналитической моделью Бронштейна [9]. Последняя описывает затухание магнетизации во времени, происходящее только за счёт диффу-

зии частиц через частично проницаемую мембрану (без учёта импульсов градиента магнитного поля). Этот процесс математически можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \bar{\nabla}(D\bar{\nabla}C(\vec{r}, t)) \\ (\hat{n}D\bar{\nabla}C(\vec{r}, t) + \rho C(\vec{r}, t))|_S &= 0, \quad C(\vec{r}, 0) = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно нашим результатам, модель показала практически полное соответствие с моделью Бронштейна.

Следующим шагом в наших исследованиях являлся более сложный случай – пульсирующий градиент магнитного поля для цилиндрических ячеек. Аналитическое решение для этого случая изложено в работах [6]. Для получения результатов мы решили численно уравнение (2) для одноячейстой цилиндрической системы с частично проницаемой мембраной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \bar{\nabla}(D\bar{\nabla}C(\vec{r}, t)) + ig(t)r_x C(\vec{r}, t) \\ (\hat{n}D\bar{\nabla}C(\vec{r}, t) + \rho C(\vec{r}, t))|_S &= 0, \quad C(\vec{r}, 0) = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

где $g(t)$ – это функция, учитывающая влияние градиента магнитного поля, γ – гиромагнитное соотношение, и r_x – компонент радиус вектора, который направлен вдоль градиента поля. Аналогично [8], мы решали уравнение, считая, что градиент магнитного поля отсутствует, а затем учитывали его влияние (умножая на коэффициент, характеризующий влияние градиента):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^*(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \bar{\nabla}(D\bar{\nabla}C^*(\vec{r}, t)) - R(\vec{r})C^*(\vec{r}, t), \\ C(\vec{r}, t) &= C^*(\vec{r}, t) * \exp(ig(t)r_x). \end{aligned} \quad (3)$$

В результате решения, мы получили следующее: разработанная численная модель дала хорошее согласование с результатами работы [6]. При этом было получено меньшее отклонение от аналитического решения, чем при использовании цилиндрической модели [10].

После изучения возможностей пакета FEMLAB, мы попробовали применить разработанный численный алгоритм для моделирования достаточно реальных ситуаций. Для этого мы использовали пакет FEMLAB для моделирования

листочной системы – двумерная структура, представляющая собой четверть биологической клетки (вакуоль, цитоплазма, клеточная стенка) и дополнительное межклеточное пространство.

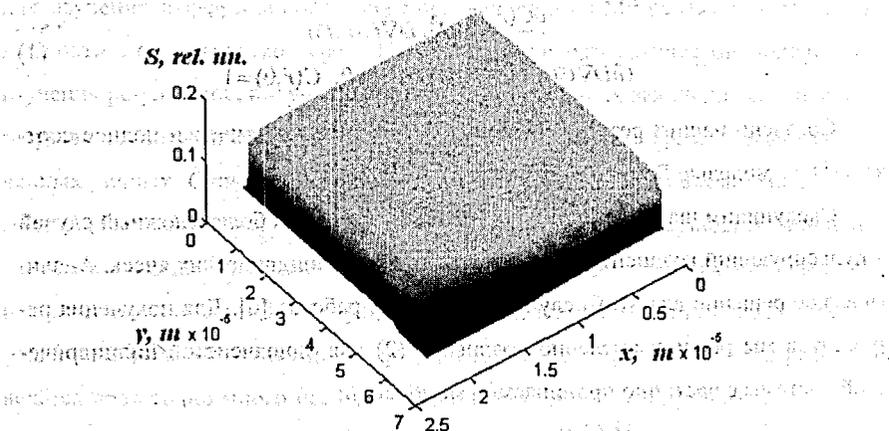


Рис. 1. Пространственное распределение магнетизации для системы 'четверть-клетки-плюс-окрестность' при величине градиента, равной 1 Т/м и времени наблюдения 0,6 с.

Результаты вычислений, полученные для такой структуры, представлены на рис. 1. Сетка, покрывающая область вычислений, состоит приблизительно из 30 тыс. треугольников и 15 тыс. узлов. Внешние границы модели закрыты. Вычисления пространственного распределения магнетизации в 5 градиентных и 24 временных точках заняли порядка 12 часов на Pentium III, 866 МГц, 256 Мб ОЗУ. Адекватность построенной модели проверялась путем сравнения с результатами ранее опубликованных работ [5-11], а также качественно - с данными экспериментов над простейшими реальными системами, полученными в Вагенингенском университете (Нидерланды).

В рамках данного проекта была проведена большая работа с целью исследования применимости пакета FEMLAB при моделировании самодиффузии и времени затухания в ЯМР-измерениях. В действительности, FEMLAB позволяет проводить моделирование поведения магнетизации в многоячейной системе с произвольной геометрией. Метод конечных элементов – это основной метод

численного решения ДУ в частных производных в среде FEMLAB. Главное свойство этого приближения с точки зрения моделирования ЯМР измерений в биологической среде – это возможность построения нерегулярной сетки, в результате чего мы получаем отсутствие неопределённости в представлении мембраны. Пользовательский интерфейс FEMLAB предоставляет широкую функциональность. Но на пути оптимизации времени вычислений появляется необходимость разработки отдельного программного модуля для применения метода конечных элементов для моделирования ЯМР-измерений. В настоящее время ведется его разработка. В рамках этой задачи создана подпрограмма, выполняющая триангуляцию Делоне произвольной двумерной области.

Предложенная численная модель позволяет описывать поведение магнетизации в двумерном пространстве для систем произвольной конфигурации, что является шагом вперед по сравнению с ранее опубликованными результатами. Разработанные алгоритмы будут использованы для обобщения модели на трёхмерное пространство.

Литература. 1. J.E.M.Snaar and h. Van As, *Biophys. J.*, 63, P. 1654. 1992. 2. H. Van As and D. van Dusschoten, *Geoderma*, 80, P. 389. 1997. 3. B.Balinov, B.Jonsson. P.Linse, Olle Soderman, *J.Magn.Res. A* 104, P. 17. 1993. 4. H.Gudbjartsson, S.Patz, *IEEE Transactions on medical imaging*, 14, No. 4, 1995, P. 636. 5. R.Valiulin, V. Skirda, *J. Chem. Phys.* 114, No. 1, P. 452. 2001. 6. J.E.M.Snaar, H.Van As, *J.Magn.Res. A* 102, P. 318. 1993. 7. P.Linse, O.Soderman, *J.Magn.Res. A* 116, P. 77. 1995. 8. P.T.Callaghan, *J.Magn.Res. A* 113, P. 53. 1995. 9. T.A.Zawodzinski, T.E. Springer, M.Neeman, and L.O. Sillerud, *Israel J. Chem.* 32, P. 281. 1992. 10. E.G.Novikov, D.van Dusschoten, H. Van As, *J.Magn.Res. A* 135, P. 522. 1998. 11. K.R.Brownstein and C.E.Tarr, *Phys. Rev.* 19, P. 2446. 1979. 12. L. van der Weerd, S.M. Melnikov, F.J. Vergeldt et al. *J.Magn.Res. A*, 156, P. 213. 2002.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Хомичукя Т.Г., БГУ, Минск

Функция $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, называется дискретным управлением с периодом квантования h ($h = (t_* - t^*)/N$, N – натуральное число), если $u(t) = u(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $t_k = t_* + kh$, $k = 0, N-1$.

В классе дискретных управлений рассматривается линейная задача терми-

нального управления

$$\begin{aligned} c_u^* x(t^*) + c_v^* v + c_w^* w \rightarrow \max; \dot{x} &= A(t)x + b(t)u + D(t)w, \\ x(t_0) &= Mv; g_* \leq Hx(t^*) \leq g^*; |u(t)| \leq 1; t \in T; v_* \leq v \leq v^*; w_* \leq w \leq w_*. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x = x(t) \in R^n$ — состояние системы управления в момент времени t ; $u = u(t) \in R$ — значение скалярного управляющего воздействия в момент времени t ; $v = (v_j, j \in J_v) \in R^p$ — вектор управляющих параметров начального состояния системы (1), $J_v = \{1, 2, \dots, p\}$; $w = (w_k, k \in J_w) \in R^q$ — вектор входных управляющих параметров, $J_w = \{1, 2, \dots, q\}$; $M = (m_{ij}, j \in J_v) \in R^{n \times p}$, $m_{ij} \in R^n$ — j -й столбец матрицы M ; $A(t) \in R^{n \times n}$, $D(t) = (d_{kj}(t), j \in J_w) \in R^{n \times q}$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные матричные функции, $d_{kj}(t) \in R^n$ — k -й столбец матрицы $D(t)$; $b(t) \in R^n$, $t \in T$, — кусочно-непрерывная векторная функция; $c_u \in R^n$; $c_v, v_*, v^* \in R^p$; $c_w, w_*, w^* \in R^q$; $g_*, g^* \in R^m$, $H \in R^{m \times n}$, $H' = (h_{ij}, i \in I)$, $h_{ij} \in R^n$ — i -строка матрицы H , $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Управляющую совокупность $(u(\cdot), v, w)$, состоящую из управляющего воздействия $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ и управляющих параметров v и w , а также соответствующую ей траекторию $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$ системы (1) назовем допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям задачи (1).

Допустимые управляющая совокупность $(u^0(\cdot), v^0, w^0)$ и траектория $x^0(\cdot)$ называются оптимальными (программным решением задачи (1)), если вдоль них критерий качества задачи (1) достигает максимального значения:

$$c_u^* x^0(t^*) + c_v^* v^0 + c_w^* w^0 = \max(c_u^* x(t^*) + c_v^* v + c_w^* w).$$

Субоптимальные (ε -оптимальные) управляющая совокупность $(u^\varepsilon(\cdot), v^\varepsilon, w^\varepsilon)$ и траектория $x^\varepsilon(\cdot)$ определяются неравенством

$$c_u^* x^0(t^*) + c_v^* v^0 + c_w^* w^0 - c_u^* x^\varepsilon(t^*) - c_v^* v^\varepsilon - c_w^* w^\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Эквивалентная функциональная форма задачи (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} c_{(1)}(t)u(t) + \sum_{j \in J_v} c_{(2)j}v_j + \sum_{k \in J_w} c_{(3)k}w_k \rightarrow \max; \\ g_* \leq \sum_{t \in T} f_{(1)}(t)u(t) + \sum_{j \in J_v} f_{(2)j}v_j + \sum_{k \in J_w} f_{(3)k}w_k \leq g^*; \\ |u(t)| \leq 1, t \in T; v_* \leq v \leq v^*; w_* \leq w \leq w_*. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$c_{(0)}(t) = \int_{t^*}^{t+h} \psi'_c(\tau) b(\tau) d\tau; f_{(1)}(t) = \left(\int_{t^*}^{t+h} \psi'_{hi}(\tau) b(\tau) d\tau, i \in I \right), t \in T_u = \{t^*, t^* + h, \dots, t^* - h\};$$

$$c_{(2)j} = \psi'_c(t_*) m_{(j)} + c_{*j}; f_{(2)j} = (\psi'_{hi}(t_*) m_{(j)}, i \in I), j \in J_v; c_{(3)k} = \int_{t^*}^{t+h} \psi'_c(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{*k}; f_{(3)k} = \left(\int_{t^*}^{t+h} \psi'_{hi}(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau, i \in I \right); k \in J_w;$$

$\psi_c(t), \psi_{hi}(t), t \in T$, — решения сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi$$

с начальными условиями $\psi(t^*) = c_u, \psi(t^*) = h_{ij}$ соответственно.

Задача (2) отличается от соответствующей задачи из [1] наличием управляющих параметров v и w , что требует внесения в понятия и конструкции адаптивных методов [1] соответствующих изменений.

Начнем с основного понятия адаптивного метода — опоры. Выделим из множества I произвольное подмножество I_{on} , из множеств T_u, J_v, J_w — произвольные подмножества T_{on}, J_{von}, J_{won} соответственно так, чтобы $|I_{on}| = |T_{on}| + |J_{von}| + |J_{won}| = r$. Построим $r \times r$ -матрицу

$$P_{on} = \begin{pmatrix} f_{(1)i}(t), t \in T_{on}; f_{(2)j}, j \in J_{von}; f_{(3)k}, k \in J_{won} \\ i \in I_{on} \end{pmatrix};$$

где $f_{(1)i}(t), f_{(2)j}, f_{(3)k}$ — i -е элементы векторов $f_{(1)}(t), f_{(2)j}, f_{(3)k}$ соответственно.

Определение 1. Совокупность множеств $K_{on} = \{I_{on}, T_{on}, J_{von}, J_{won}\}$ называется опорой задачи (2), если $\det P_{on} \neq 0$.

Следуя [1], построим для опоры K_{on} задачи (2) сопровождающие элементы:

1. Вектор потенциалов $v = (v_i, i \in I)$.
2. Котраектория $\psi(t), t \in T$.
3. Коуправление $\delta_{(1)}(t), t \in T$, и оценки $\delta_{(2)j}, j \in J_v; \delta_{(3)k}, k \in J_w$.
4. Псевдоуправление $\omega(t), t \in T$; управляющие псевдопараметры v_o, w_o и выходной псевдосигнал $\zeta = (\zeta_i, i \in I)$; псевдотраектория $x(t), t \in T$.

Определение 2. Пару $\{(u(\cdot), v, w), K_{on}\}$ из допустимой совокупности $(u(\cdot), v, w)$ и опоры K_{on} будем называть опорной совокупностью.

Определение 3. Число

$$\beta((u(\cdot), v, w), K_m) = c'_0 x(t^*) + c'_v v_{\alpha} + c'_w w_{\alpha} - c'_0 x(t^*) - c'_v v - c'_w w$$

называется оценкой ε -оптимальности опорной совокупности $\{(u(\cdot), v, w), K_m\}$.

Опора используется прежде всего для идентификации оптимальных и субоптимальных управляющих совокупностей.

Принцип максимума. Для оптимальности допустимой управляющей совокупности $(u(\cdot), v, w)$ и траектории $x(t)$, $t \in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры K_m , что на сопровождающих ее векторе потенциалов v и котраектории $\psi(t)$, $t \in T$, выполняются

1) условие максимума для управляющего воздействия:

$$\int_{t_0}^{t^*} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau u(t) = \max_{|u| \leq 1} \int_{t_0}^{t^*} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau u, t \in T_u;$$

2) условие максимума для начальных параметров:

$$(\psi'(t_0) m_{(j)} + c_{vj}) v_j = \max_{v_j \in S_{v_j}} (\psi'(t_0) m_{(j)} + c_{vj}) \tilde{v}_j, j \in J_v;$$

3) условие максимума для входных параметров:

$$\left(\int_{t_0}^{t^*} \psi'(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{wk} \right) w_k = \max_{w_k \in S_{w_k}} \left(\int_{t_0}^{t^*} \psi'(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{wk} \right) \tilde{w}_k, k \in J_w;$$

4) условие трансверсальности для траектории:

$$v' H x(t^*) = \max_{g, -S \leq g \leq S} v' g.$$

Принцип ε -максимума. При любом $\varepsilon \geq 0$ для ε -оптимальности допустимой управляющей совокупности $(u(\cdot), v, w)$ и траектории $x(t)$, $t \in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры K_m , на сопровождающих элементах которой выполняются

1) условие квазимаксимума для управляющего воздействия:

$$\int_{t_0}^{t^*} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau u(t) = \max_{|u| \leq 1} \int_{t_0}^{t^*} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau u - \varepsilon_u(t), t \in T_u;$$

2) условие квазимаксимума для начальных параметров:

$$(\psi'(t_0) m_{(j)} + c_{vj}) v_j = \max_{v_j \in S_{v_j}} (\psi'(t_0) m_{(j)} + c_{vj}) \tilde{v}_j - \varepsilon_{vj}, j \in J_v;$$

3) условие квазимаксимума для входных параметров:

$$\left(\int \psi'(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{uk} \right) w_k = \max_{w_k, \varepsilon_{uk}} \left(\int \psi'(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{uk} \right) \bar{w} - \varepsilon_{uk}, k \in J_w;$$

4) условие квазитрансверсальности для траектории:

$$v^T Hx(t^*) = \max_{g, s, s_g} v^T x - \varepsilon_s;$$

5) условие ε -точности:

$$\sum_{i \in T_u} \varepsilon_u(t) + \sum_{j \in J_v} \varepsilon_v + \sum_{k \in J_w} \varepsilon_{wk} + \varepsilon_s \leq \varepsilon.$$

На основе этих результатов построены прямой и двойственный методы решения задачи (2), которые являются итеративными. Каждая итерация представляет собой замену «старой» опорной совокупности на «новую»:

$$\{(u(\cdot), v, w), K_{on}\} \rightarrow \{(\bar{u}(\cdot), \bar{v}, \bar{w}), \bar{K}_{on}\}$$

и организована так, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta((\bar{u}(\cdot), \bar{v}, \bar{w}), \bar{K}_{on}) \leq \beta((u(\cdot), v, w), K_{on}).$$

Предложенный численный метод иллюстрируется на примере.

Литература. 1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Дмитрук Н.М. Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 3 - 26.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Хоровец М.В., БрГУ, Брест, Кожух И.Г., Akademia Podlaska, RP

Многие отечественные и зарубежные ученые занимались качественным исследованием двумерных динамических систем с квадратичными полиномами в их правых частях. Однако задача их полного качественного исследования во всем пространстве параметров далека до завершения. Неизвестно, например, максимально возможное количество предельных циклов у таких систем.

Динамические системы второго порядка с полиномами третьей степени в правых частях еще менее исследованы. Построение их качественного портрета в общем случае, без каких-либо ограничений на содержащиеся в них параметры, сопряжено с огромными трудностями и содержит много пока неразрешенных проблем.

Самостоятельный интерес представляет качественное исследование таких систем в предположении, что они обладают частными алгебраическими интегралами.

Наличие у динамических систем частных алгебраических интегралов существенно упрощает решение задачи нахождения общего интеграла, во многих случаях позволяет исследовать структуру их траекторий, а также вносит определенный вклад в решение проблемы предельных циклов. Интерес к изучению таких систем объясняется еще и многочисленными практическими приложениями их к различным вопросам естествознания и техники.

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_2y + \sum_{i=2}^j P_i(x, y), \\ \dot{y} &= b_1x + b_2y + \sum_{i=2}^j Q_i(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $P_i(x, y)$, $Q_i(x, y)$ — однородные полиномы i -ой степени с действительными коэффициентами, a_j, b_j ($j = 1, 2$) — действительные числа. Будем считать, что система (1) обладает двумя алгебраическими интегралами, заданными уравнениями кривых второго порядка, одна из которых — замкнута. С помощью невырожденного линейного преобразования уравнение замкнутой кривой можно привести к каноническому уравнению окружности

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (2)$$

Будем считать такое преобразование выполненным. Кроме того, будем считать, что система (1) обладает еще и вторым алгебраическим интегралом, заданным уравнением гиперболы

$$x^2 - ky^2 - 1 = 0, \quad \text{где } k > 0. \quad (3)$$

Из всего множества систем вида (1) выделим класс систем, обладающих тем свойством, что среди траекторий каждой системы, содержатся целые траектории, из которых состоят выше указанные кривые.

Исследование проводим на основе предложенного Дарбу утверждения: не-

приводимая алгебраическая кривая $f(x, y) = 0$ степени m является интегральной кривой уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y) = f(x, y)R(x, y)$, где $R(x, y)$ - некоторая функция переменных x, y .

Несколько позднее, в середине прошлого века способ построения систем с заданными частными алгебраическими интегралами был предложен отечественным математиком Н. П. Еругиным; в [4].

В результате доказано, что динамическая система (1) при условии, что окружность состоит из целых траекторий этой системы принимает вид

$$x = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 - a_1x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \\ y = b_1x + b_2y - a_4x^3 - a_3xy - (a_2 + b_1 + a_7)x^2 - (a_1 + b_2 + a_8)x^2y - (a_2 + b_1 + a_9)xy^2 - b_2y^3,$$

где указанные коэффициенты - различные действительные числа не все из которых равны нулю.

С помощью аналогичных рассуждений, используя тот же метод, можно доказать следующее утверждение: для того, чтобы кривые (2) и (3) состояли из целых траекторий динамической системы (1) необходимо и достаточно, чтобы эта система имела вид:

$$x = a_1x + a_2y - a_4x^3 - a_2x^2y - kb_1y^3, \\ y = b_1x - b_1x^3 - a_4x^2y - (a_2 + (1-k)b_1)xy^2 \quad (4).$$

Определены координаты состояний равновесия (x_i, y_i) , $i = \overline{1,9}$ в конечной части плоскости, а также и на бесконечности.

Литература. 1. Качественная теория динамических систем / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович и др. - М.: Наука, 1966. 2. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. - М.: Наука, 1976. 3. Построение систем программного движения - А.С. Галиуллин, И.А. Муха-метязнов и др. - М.: Наука, 1971. 4. Н.П. Еругин. Построение всего множества систем имеющих заданную интегральную кривую. - Прикл. мат. и мех. 1952, 16, Выпуск 6. 5. Н.П. Еругин. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Мн.: Наука и техника, 1972.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА САМОСЖИМАЮЩЕГОСЯ ГЕНЕРАТОРА

Храмова Е.В., БГУ, Минск

1. Описание самосжимающегося генератора.

В работе [1] был предложен самосжимающийся генератор. В дальнейшем будем рассматривать самосжимающийся генератор, который использует линейный регистр сдвига ($LFSR_A$) длины $|A|$. Выходная последовательность z самосжимающегося генератора определяется на основе выходной последовательности $LFSR_A$, $a = (a_1, a_2, \dots)$ следующим образом:

1) последовательность a разбивается на группы из двух элементов:

$$a = (a_1, a_2, \dots) = ((a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots);$$

2) вычисляются элементы выходной последовательности z :

$$z_{j(i)} = \begin{cases} a_{2i}, & \text{если } a_{2i-1} = 1, \\ \text{не вычисляется,} & \text{если } a_{2i-1} = 0, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots$,

$$j(i) = \begin{cases} j(i-1) + 1, & \text{если } a_{2i-1} = 1, \\ j(i-1), & \text{если } a_{2i-1} = 0, \end{cases} \quad j(0) = 0.$$

2. Вероятностные свойства самосжимающегося генератора.

Из работы [1] известно, что выходную последовательность самосжимающегося генератора можно рассматривать как выходную последовательность некоторого сжимающегося генератора. Поэтому для исследования вероятностных свойств самосжимающегося генератора будем использовать подход, предложенный в [2] для изучения вероятностных свойств сжимающегося генератора.

Найдем оценку отклонения момента k -ого порядка суммы n значений выходной последовательности самосжимающегося генератора от момента k -ого порядка суммы n значений бинарной равномерно распределенной случайной последовательности.

Теорема 1. Пусть z — последовательность, порождаемая самосжимающимся генератором. И пусть $n|A| \leq 2^M$, $Z = \sum_{i=1}^n z_i$ и $Y = \sum_{i=1}^n y_i$, где y_i — незави-

симые случайные величины Бернулли со следующим распределением вероятностей: $P\{y_i = 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{y_i = 0\} = \frac{1}{2}$. Если $Z < \frac{n^2}{2^{|A|}}$, то справедливы следующие оценки:

$$|D\{Z\} - D\{Y\}| \leq \frac{n^2 + n^2}{2^{|A|}}, \quad |E\{Z^k\} - E\{Y^k\}| \leq \frac{n^k}{2^{|A|}} \quad (1)$$

Доказательство. Выходную последовательность $z = (z_1, z_2, \dots)$ самосжимающегося генератора можно получить с помощью следующего сжимающегося генератора. В качестве управляющей последовательности s' сжимающегося генератора возьмем элементы выходной последовательности $LFSR_A$ с нечетными номерами: $s' = (a_1, a_3, \dots) = (s'_1, s'_2, \dots)$, а в качестве управляемой последовательности сжимающегося генератора возьмем элементы выходной последовательности $LFSR_A$ с четными номерами: $a' = (a_2, a_4, \dots) = (a'_1, a'_2, \dots)$. Тогда элементы выходной последовательности самосжимающегося генератора можно записать в следующем виде: $z_j = a'_{i_j(s')}$, $j = 1, n$, где $i_j(s')$ — номер j -ой "1" в управляющей последовательности s' . Поэтому сумма n значений выходной последовательности представима в виде: $Z = \sum_{j=1}^n z_j = \sum_{j=1}^n a'_{i_j(s')}$. Т.к. $n | A| \leq 2^{|A|}$, то $i_j(s') \leq 2^{|A|} - 1$. Тогда, применяя результаты работы [2] для последовательности a' , получим справедливость оценок (1). ■

Аналогично [2] будем рассматривать шаблон $template_B(a)$ такой, что для $\forall B \in \{0, 1, *\}^n$, $B = (B(1), \dots, B(n))$:

$$template_B(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i = B(i), \forall B(i) \neq *, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{где } a = (a_1, \dots, a_n).$$

Для математического ожидания шаблона $E\{template_B(Z)\}$ справедлива следующая оценка.

Теорема 2. Пусть z — последовательность, порождаемая самосжимающимся генератором. И пусть $Z_n = (z_1, \dots, z_n)$ и $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$, где y_i — незави-

-симые случайные величины Бернулли со следующим распределением вероятностей: $P\{y_i = 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{y_i = 0\} = \frac{1}{2}$. Тогда для \forall шаблона $B \in \{0, 1, *\}^n$

$$|E\{template_B(Z_n)\} - E\{template_B(Y_n)\}| = O\left(\frac{n}{2^{|A|}}\right). \quad (2)$$

Доказательство. Аналогично теореме 1 элементы выходной последовательности $z = (z_1, z_2, \dots)$ самосжимающегося генератора можно записать в следующем виде: $z_j = a'_{i_j(s^j)}$, где $a' = (a_2, a_4, \dots) = (a'_1, a'_2, \dots)$ — управляемая последовательность; $i_j(s^j)$ — номер j -ой “1” в управляющей последовательности

$s^j = (a_1, a_3, \dots) = (s'_1, s'_2, \dots)$, $j = \overline{1, n}$. Определим $Z_n = (z_1, \dots, z_n) = (a'_{i_1(s^1)}, \dots, a'_{i_n(s^n)})$, $A'_{i_n(s^n)} = (a'_1, \dots, a'_{i_n(s^n)})$. Используя последовательность s^j , на основе шаблона B длины n создадим шаблон B_s длины $i_n(s^j)$ следующим образом. Если $s'_i = 0$, то $B_s(i) = *$, если $s'_i = 1$, то $B_s(i) = B(i)$. Тогда $template_B(Z_n) = template_{B_s}(A'_{i_n(s^n)})$.

Для доказательства теоремы оценим следующую сумму:

$$\sum P\{s^j\} |E\{template_{B_s}(A'_{i_n(s^j)})\} - E\{template_B(Y_n)\}|.$$

Используя результаты работы [2], получим:

$$\sum P\{s^j\} |E\{template_{B_s}(A'_{i_n(s^j)})\} - E\{template_B(Y_n)\}| \leq \sum P\{s^j\} \cdot \frac{i_n(s^j)}{2^{i_n(s^j)}} = \frac{E\{i_n(s^j)\}}{2^{i_n(s^j)}}. \quad (3)$$

Справедливость оценки (2) следует из (3) и следующего соотношения из [2]:

$$E\{i_n(s^j)\} = O(n). \quad \blacksquare$$

С помощью теоремы 2 получим следующие свойства выходной последовательности самосжимающегося генератора.

Следствие 1. Пусть z — последовательность, порождаемая самосжимающимся генератором. Тогда корреляция между элементами последовательности z_t и z_{t+l+1} определяется следующим соотношением:

$$corr(z_t, z_{t+l+1}) = O\left(\frac{1}{2^{l+1}}\right), \quad t+l+1 \leq 2^{l+1} - 1.$$

Доказательство. Для доказательства следствия будем использовать шаб-

лон B длины $l+2$ следующего вида: $\sigma_1 * \dots * \sigma_2$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0,1\}$. И пусть $Z_{l+2} = (z_1, \dots, z_{l+1})$ и $Y_{l+2} = (y_1, \dots, y_{l+2})$, где y_i — независимые случайные величины Бернулли со следующим распределением вероятностей: $P\{y_i = 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{y_i = 0\} = \frac{1}{2}$. Используя теорему 2, получим:

$$|E\{template_B(Z_{l+2})\} - E\{template_B(Y_{l+2})\}| = \\ = |P\{z_i = \sigma_1, z_{i+1} = \sigma_2\} - P\{y_1 = \sigma_1, y_{l+2} = \sigma_2\}| = |P\{z_i = \sigma_1, z_{i+1} = \sigma_2\} - \frac{1}{4}| = O\left(\frac{1}{2^l}\right).$$

Запишем формулу корреляции между z_i и z_{i+1} следующим образом:

$$corr(z_i, z_{i+1}) = 2P\{z_i = z_{i+1}\} - 1 = \\ = 2(P\{z_i = 0, z_{i+1} = 0\} + P\{z_i = 1, z_{i+1} = 1\}) - 1 = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{2^l}\right)\right) - 1 = O\left(\frac{1}{2^l}\right). \quad \blacksquare$$

Следствие 2. Пусть P — произвольная бинарная k -грамма. И пусть Z_k — k последовательных бит порождаемой самосжимающимся генератором. Тогда $|P\{Z_k = P\} - 2^{-k}| = O\left(\frac{k}{2^k}\right)$.

Доказательство. Пусть $Y_k = (y_1, \dots, y_k)$, где y_i — независимые случайные величины Бернулли со следующим распределением вероятностей: $P\{y_i = 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{y_i = 0\} = \frac{1}{2}$. Так как произвольную бинарную k -грамму P можно рассматривать как шаблон $B = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ размера k , где $\sigma_i \in \{0,1\}$, из теоремы 2, получим: $|E\{template_B(Z_k)\} - E\{template_B(Y_k)\}| = |P\{Z_k = P\} - \frac{1}{2^k}| = O\left(\frac{k}{2^k}\right)$. \blacksquare

Литература. 1. Meier W., Staffelbach O. The Self-Shrinking Generator // Eurocrypt'94. Proceedings. Springer-Verlag. 1998. P. 205-214. 2. Coppersmith D., Krawchuk Y., Mansour Y. The shrinking generator // Advanced in Cryptology: Proceedings of Crypto 93, LNCS 773. 1994. P. 22-39.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Чехменок С.Л., Иванов С.Н., БГУ, Минск

Для методологии теории тепло- и массопереноса характерно то, что она сочетает методы расчета температурных и массовых полей с помощью дифференциальных уравнений переноса и экспериментальные методы определения характеристик тепло- и массопереноса. В настоящее время для решения задач в

данной области проблемой являются сложности, связанные с информационным обеспечением математических моделей. Для информационного обеспечения моделей тепло- и массопереноса необходимо с помощью экспериментальных исследований получить эмпирические зависимости всех необходимых параметров и характеристик.

Характеристики тепло- и массопереноса, входящие в дифференциальные уравнения, как правило, находятся с помощью экспериментальных методов, в основе которых лежат либо решения обратных задач тепло- и массопереноса, либо восстановление зависимостей с помощью статистических методов, опираясь на систематизированные экспериментальные данные. Информационное обеспечение в виде эмпирических формул, с помощью которых аппроксимированы характеристики переноса, можно использовать для широкого класса задач в данной области и удобно вводить в программы для расчета процессов.

С учетом специфики для восстановления функциональной зависимости рассмотрим следующий алгоритм.

1. Определяем, являются ли данные зависимы. Для этого используем метод серий, основанный на медиане, и метод восходящих и нисходящих серий [1]. И если хотя бы один метод даст положительный результат, то данные считаются зависимыми и производится переход ко второму пункту. Если оба метода говорят нам о том, что данные являются независимыми, то на этом останавливаемся, поскольку выделять больше нечего.

2. Если у нас одна независимая переменная, то проверяем данные на стационарность методом серий и методом превышений [1]. Если хотя бы один из методов даст положительный результат, то тренда у нас уже нет и можно выделить только периодические компоненты. Для этого используем метод, основанный на построении периодограммы [2]. Если у нас несколько переменных, то сразу переходим к пункту 3.

3. Итерационно подбираем зависимость следующим образом.

а) На начальном этапе предполагаем, что зависимость $f(x)$ - линейная, то есть $f(x) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

- b) Определяем коэффициенты $a_i, i = \overline{1, n}$ с помощью метода наименьших квадратов.
- c) Вычисляем среднеквадратическое отклонение.
- d) Усложняем зависимость $f(x)$, и предполагаем, что у нас появляется новое слагаемое $a_{n+1}g(x)$, где $g(x)$ принадлежит множеству элементарных функций. Повторяем процедуру пересчета, начиная с пункта (b) и, после вычисления среднеквадратического отклонения, сравниваем с отклонением, полученным на предыдущем шаге. Если оно уменьшилось, то мы добавили нужное слагаемое в функциональную зависимость. Если среднеквадратичное отклонение увеличилось, то слагаемое не верно. Мы данное слагаемое отбрасываем, добавляем новое и пересчитываем заново.

С целью проверки и использования вышеприведенного алгоритма, были рассмотрены стандартные статистические пакеты (Statistica 6.0, SPSS 11.0 for Windows, Statit Professional QC 5.2). Производилось сравнение работы пакетов как на модельных, так и на реальных данных. При их использовании были сделаны следующие выводы.

1. Все статистические пакеты поддерживают стандартные форматы представления данных и позволяют обрабатывать большие объемы данных (выборки более 5 000 000 элементов).
2. Ни одна из рассмотренных программ не поддерживает динамического обновления данных. Следовательно, для восстановления функциональной зависимости по незначительно измененным входным данным, нужно проделать все этапы восстановления сначала.
3. На простых моделях скорость и точность вычисления приблизительно одинаковы для всех пакетов. Время вычисления зависит от объема выборки. Например, при выборке 1000 элементов точность вычисления коэффициентов равна 10^{-16} . В случае, если модель простая, то объем выборки не должен быть большим.

4. При восстановлении зависимостей, которые содержат несколько независимых переменных, нужно чтобы данные были распределены равномерно в той области, в которой идет восстановление. Если такое условие не соблюдается, то исследователь должен убедиться, что восстанавливаемая им зависимость будет однозначна.

5. Все статистические пакеты используют начальные задания параметров. В зависимости от того, на сколько удачно они выбраны, зависит время работы программы. Это справедливо как для моделей без ошибок, так и с ошибками.

6. Точность построения оценок резко уменьшается, если в моделях наблюдаются ошибки. Если в качестве ошибки использовать случайные величины, у которых есть конечная дисперсия, то точность вычисления зависит от объема выборки и величины дисперсии. При уменьшении дисперсии уменьшается и ошибка (при постоянном объеме выборки). При постоянной дисперсии и увеличении объема выборки увеличивается и точность.

Дисперсия	Объем выборки	Точность вычисления
1	1000	10^{-5}
0.5	1000	10^{-7}
1	2000	10^{-7}
0.5	2000	10^{-9}

7. При использовании в качестве ошибки устойчивых случайных величин, ошибки на два порядка больше чем в случае использования случайных величин с конечной дисперсией. Чем меньше индекс устойчивости, тем больше ошибка. Это связано с тем, что устойчивые законы не имеют конечную дисперсию и используемые в статистических пакетах алгоритмы не работают в данном случае.

Индекс устойчивости	Объем выборки	Точность вычисления
1.7	1000	10^{-3}
1.3	1000	10^{-2}
1.7	2000	10^{-5}
1.3	2000	10^{-4}

Литература. 1. Бендат Дж., Пирсол А., Прикладной анализ случайных данных. // М., Мир, 1989. 2. Андерсен Т., Статистический анализ временных рядов. // М., Мир, 1978.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА НЕЗАВИСИМЫХ КОМПОНЕНТ

Чумерин Н.Ю., БрГУ, Брест

Задачу метода независимых компонент (Independent Component Analysis, ICA) можно кратко сформулировать следующим образом: *известно, что компоненты вектора-сигнала x являются линейными комбинациями компонент вектора-источника s , т.е. имеет место соотношение*

$$x = As, \quad (1)$$

и при этом (невырожденная) матрица A неизвестна. Зная, что компоненты вектора s статистически независимы, требуется найти матрицу W , удовлетворяющую соотношению:

$$s = Wx. \quad (2)$$

При оценивании матрицы W , предполагается, что задана последовательность реализаций вектора x .

Как правило, статистические методы ICA [1] основываются на оптимизации так называемой *контрастной функции* – меры независимости получаемых компонент, поэтому, предложив новую контрастную функцию и указав метод её оптимизации, мы получим новый метод ICA.

В предлагаемом методе в качестве контрастной рассматривается функция, которую можно охарактеризовать как *отклонение n -мерной функции плотности распределения сигнала-вектора от n -мерной функции плотности распределения, восстановленной из одномерных плотностей сигналов (по каждой координате) с использованием правила умножения независимых событий*.

Для примера рассмотрим простой случай, когда случайный вектор x – двумерный, то есть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Пусть $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$. Выберём некоторое натуральное число n и рассмотрим такое разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$, что каждый из отрезков $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ имеет фиксированную длину $\Delta_1 = (b-a)/n$. Аналогично разобьём отрезок $[c, d]$ точками $c = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_n = d$ так, чтобы длина каждого отрезка $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ была равна $\Delta_2 = (d-c)/n$.

Обозначим события: A_i — «величина x_1 попала в отрезок $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ », B_j — «величина x_2 попала в отрезок $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ ». Имея выборку N реализаций вектора x можно достаточно просто эмпирически оценить значения величин $P(A_i)$, $P(B_j)$ и $P(A_i B_j)$:

$$P(A_i) = \#\{x_1 : x_1 \in [\xi_{i-1}, \xi_i]\} / N, \quad (3)$$

$$P(B_j) = \#\{x_2 : x_2 \in [\eta_{j-1}, \eta_j]\} / N, \quad (4)$$

$$P(A_i B_j) = \#\{(x_1, x_2) : x_1 \in [\xi_{i-1}, \xi_i], x_2 \in [\eta_{j-1}, \eta_j]\} / N. \quad (5)$$

Теперь можно записать условие независимости случайных величин x_1 и x_2 в виде

$$P(A_i B_j) = P(A_i) P(B_j), \text{ для всех } i, j. \quad (6)$$

Из соотношения (6) вытекает, что в качестве меры независимости компонент вектора x можно выбрать либо

$$M_1(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |P(A_i B_j) - P(A_i) P(B_j)|, \quad (7)$$

либо

$$M_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (P(A_i B_j) - P(A_i) P(B_j))^2. \quad (8)$$

Понятно, что независимость компонент x_1 и x_2 равносильна одному из эквивалентных условий $M_1(x) = 0$ или $M_2(x) = 0$. Поскольку меры M_1 и M_2 эквивалентны в этом смысле, то для определённости будем использовать просто обозначение $M(x)$. Таким образом, чем больше значение $M(x)$, тем более зависимы компоненты вектора x и наоборот, чем ближе к нулю $M(x)$, тем компоненты вектора x более независимы.

Поскольку, без потери общности, можно считать сигнал x предварительно центрированным и отбеленным (это эквивалентно тому, что матрица ковариации случайного вектора x является единичной), то для разделения независимых компонент достаточно «провернуть» сигнал x на некоторый угол α относительно начала координат. То есть (в двумерном случае), искомая матрица W определяется всего одним параметром — углом α :

$$W(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, задача выделения независимых компонент двумерного вектора x свелась к нахождению значения угла α , при котором мера независимости компонент вектора $W(\alpha)x$ минимальна, то есть:

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \{M(W(\alpha)x)\}. \quad (10)$$

Далее следует минимизировать полученную контрастную функцию $M(\alpha) = M(W(\alpha)x)$ (в экспериментах мы использовали метод золотого сечения с квадратичной интерполяцией). Рассмотренный метод можно применять также и в случае, когда сигнал имеет размерность более двух, правда в этом случае усложняется процедура оптимизации контрастной функции.

Работа предложенного метода не зависит от природы исходных сигналов-смесей (в отличие от существующих методов ICA, зависящих, например, от нормальности распределения [1]). В настоящее время ведётся поиск дифференцируемой оценки функции $M(\cdot)$, что позволит значительно улучшить метод, применяя для оптимизации градиентные методы [2].

Литература. 1. A. Hyvärinen *Survey on Independent component analysis*, Neural Computing Surveys, 2, 94–128. 2. М. Базара, К. Шетти *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы*.— М.: Мир, 1982.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗРЕЗАНИЯ ГРАФА С ОПТИМИЗАЦИЕЙ РЕЗУЛЬТАТА

Шандриков А.С.,
Витебский государственный политехнический техникум, г. Витебск

Автоматизированное проектирование сложных технических изделий, в частности радиоэлектронных средств (РЭС), предполагает использование математических моделей. Наиболее приемлемой моделью для проектирования РЭС является граф вида $G = (X, U)$, у которого вершины $x \in X$ представляют радиоэлектронные компоненты (РЭК), а рёбра $u \in U$ — электрические связи [1, с.16-17]. Компоновка РЭС предполагает разбиение принципиальной электрической схемы на конструктивно законченные узлы, что моделируется разрезанием

графа G на требуемое количество кусков с заданным количеством вершин в каждом из них. Одним из основных критериев оптимальности полученного результата является минимум связей между сформированными кусками, т.е. внешних связей. Математически этот параметр оценивается посредством коэффициента разрезания, вычисляемого по формуле.

$$\Delta(G) = L/K \quad (1)$$

где L — суммарное количество связей между вершинами внутри кусков (внутренних связей); K — суммарное количество внешних связей.

Для разрезания графа на куски разработано множество алгоритмов. На практике в основном используют последовательные, итерационные и смешанные алгоритмы.

Последовательные алгоритмы обладают самой высокой производительностью, но полученные результаты в подавляющем большинстве случаев далеки от оптимальных [2, с. 61]. Суть последовательных алгоритмов заключается в следующем. Для формирования первого куска графа по некоторому критерию выбирается одна из вершин $x_i \in X$ и строится множество G_{x_i} , содержащее выбранную вершину x_i и все смежные ей вершины. Если $|G_{x_i}|$ равно заданному количеству вершин первого куска, то кусок считается сформированным. В противном случае в множество G_{x_i} по определенным правилам добавляются недостающие вершины или из множества G_{x_i} исключаются лишние вершины. По окончании формирования первого куска множество G_{x_i} удаляется из множества X , после чего аналогичным образом формируются последующие куски заданного разрезания.

Итерационные алгоритмы обеспечивают получение более близких к оптимальным результатов, но для их реализации на ЭВМ требуется большой объем оперативной памяти с малым временем обращения к ней и ограниченное количество вершин разрезаемого графа [1, с. 77].

Анализ достоинств и недостатков последовательных и итерационных алгоритмов побуждает к разработке новых высокопроизводительных алгоритмов,

обеспечивающих получение оптимальных по критерию (1) результатов.

В основу одного из новых алгоритмов положен последовательный метод разрезания графа. Выбор данного метода обусловлен его простотой, высокой производительностью и отсутствием требования большого объема оперативной памяти при ограниченном количестве вершин разрезаемого графа. По сравнению с классическими последовательными алгоритмами в предлагаемом алгоритме реализована несколько иная концепция формирования кусков при разрезании графа, принципы которой заключаются в следующем.

1. Формирование куска осуществляется поэтапно. Сначала по определенному критерию выбирается начальная вершина формируемого куска x_i и строится множество Γ_{x_i} , содержащее выбранную вершину и все смежные ей вершины. Из множества вершин, смежных вершине x_i , для назначения в формируемый кусок выбирается только одна вершина x_j , удовлетворяющая условию

$$\delta(x_j) = \rho(x_j) - z(x_j) = \min \delta(x_i) \quad (2)$$

где $\delta(x_j)$ — относительный вес вершины x_j ; $\rho(x_j)$ — локальная степень вершины x_j ; $z(x_j)$ — количество связей вершины x_j с вершиной x_i .

Далее строится множество вершин Γ_{x_j} , содержащее вершину x_j и все смежные ей вершины. После этого объединяют множества Γ_{x_i} и Γ_{x_j} и из полученного множества $\Gamma_{x_i} \cup \Gamma_{x_j}$ выбирают вершину x_k , имеющую минимальный относительный вес. На этом этапе в формуле (2) учитывается количество связей вершины x_k уже с вершинами x_i и x_j , т.е. со всеми вершинами, вошедшими в формируемый кусок на предшествующих этапах. Аналогично в формируемый кусок назначают все остальные вершины. Описанный процесс повторяется до окончания формирования куска. Сформированный кусок удаляют из графа G и приступают к аналогичному формированию второго и последующих кусков заданного разрезания.

2. Если граф разрезается на неравные по количеству вершин куски, то первым формируют минимальный кусок и по формуле (1) определяют коэффициент разрезания. Полученный результат рассматривается не как окончательный,

а как один из возможных вариантов. Формирование продолжается до получения следующего в порядке возрастания количества вершин куска графа и вновь вычисляют коэффициент разрезания. В результате выполнения описанных действий будет получено m вариантов формируемого первого куска, где m — количество неравных кусков. Из числа полученных вариантов выбирается тот, для которого коэффициент разрезания имеет максимальное значение.

В данной работе поясняется только одна ветвь разработанного алгоритма, которая выполняется при отсутствии каких-либо технологических ограничений на компоновку РЭС. При наличии таких ограничений сначала производится распределение запрещённых вершин по кускам, а дальнейшее назначение остальных вершин осуществляется в соответствии с описанным.

Применение данного алгоритма позволяет с высокой степенью вероятности получать оптимальный результат разрезания графа при минимальных затратах времени и ресурсов вычислительной техники.

Литература. 1. Морозов К.К., Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С. Методы разбиения схем РЭА на конструктивно законченные части. — М.: Сов. радио, 1978. 2. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. — М.: Наука, 1974.

МЕТОД ПОТОКОВОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Швакель А.И., БГУ, г. Минск

Сеточные уравнения с сильно меняющимися коэффициентами имеют многочисленные применения в задачах динамики и магнитной гидродинамики, где необходим расчёт теплопроводности или электропроводности, в условиях, когда коэффициенты теплопроводности и электропроводности сильно зависят от термодинамических параметров среды [1–3]. Часто в таких задачах, помимо самого решения, требуется найти ещё и поток.

Попытка решения сеточных уравнений второго порядка, к которым обычно сводятся такие граничные задачи, методом монотонной прогонки [4, 5] приводит к значительным потерям точности при вычислении функции потока или к

невозможности применения метода из-за появления в прогоночных коэффициентах разрывов второго рода. В ряде случаев эти недостатки удаётся устранить при дополнительных ограничениях путём перехода к потоковому варианту метода прогонки [1 - 4]. Так в работах [1, 3] для трёхточечных разностных уравнений вида:

$$K_i w_i - L_i w_{i+1} - M_i y_i = -F_i, \quad w_{i+1} = -(y_{i+1} - y_i) / \sigma_{i+1},$$

$$y_0 = -\bar{\lambda}^{(1)} w_0 + \bar{v}^{(1)}, \quad \bar{\lambda}^{(1)} \geq 0, \quad y_N = \bar{\lambda}^{(2)} w_N + \bar{v}^{(2)}, \quad \bar{\lambda}^{(2)} \geq 0$$

были построены вычислительные схемы монотонной потоковой прогонки, корректной и устойчивой при $K_i \geq L_i > 0, M_i > 0$, а в [2] формулы прогонки, кроме обычных ограничений требующей ещё специального выделения области, в которой коэффициент теплопроводности бесконечен. Кроме того, во всех работах [1 - 5] для обеспечения устойчивости прогонки используется условие монотонности разностных операторов и последующее их обращение, что также накладывает довольно жёсткие ограничения на параметры и вид сеточных задач.

Целью проведённых автором исследований стала разработка вычислительной схемы разностной прогонки, позволяющей существенно расширить класс решаемых сеточных граничных задач с сильно меняющимися коэффициентами и обеспечить устойчивость при более слабых, чем традиционные [1 - 5], ограничениях. Используя ортогональные преобразования, связывающие искомую сеточную функцию и поток с вспомогательными сеточными функциями, которые определяются как решение сеточных задач Коши, согласованных по своим свойствам с искомыми значениями решения и потока, такая вычислительная схема разностной прогонки была построена и названа методом ортогональной потоковой прогонки (МОПП).

Следует отметить, что при обосновании корректности и доказательстве устойчивости в малом [6] МОПП, свойства монотонности не использовались, поскольку в данном случае важный для схем прогонки переход от основных функций к вспомогательным и обратно, в силу ортогональности преобразующей матрицы, является всегда невырожденным и не связан с использованием

свойств монотонности, следовательно, вычислительная схема МОПП является более универсальной и применима для решения даже тех сеточных уравнений с сильно меняющимися коэффициентами, к которым другие варианты метода прогонки не применимы.

Литература. 1. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 679 – 684. 2. Калиткин Н. Н. //ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 684 – 686. 3. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 1. С. 211 – 218. 4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1989. 5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. 6. Кремень Ю. А., Монастырский П. И. // Доклады АН БССР. 1991. Т. 35. № 7. С. 589 – 593.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОГОНКА ДЛЯ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

Швакель А.И., БГУ, г. Минск

Рассмотрение трёхточечных разностных схем, предназначенных для отыскания периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также приближённое решение уравнений с частными производными в цилиндрических и сферических координатах обычно приводит к системам разностных уравнений [3, 4] вида

$$\begin{aligned} a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 &= -f_1, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} &= -f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 &= -f_N. \end{aligned} \quad (1)$$

относительно решения, коэффициентов и правых частей которых выполняются условия периодичности $y_{i+N} = y_i$, $a_{i+N} = a_i$, $b_{i+N} = b_i$, $c_{i+N} = c_i$, $f_{i+N} = f_i$. Для нахождения периодического решения таких систем предназначен метод циклической прогонки [3, 4], эффективная численная реализация и устойчивость которого, в свою очередь, гарантирована только при $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > a_i + b_i$. Такие условия являются довольно жёсткими ограничениями на параметры и вид сеточных задач, что позволяет применять данный метод лишь для узкого класса задач с периодическими решениями. В этой связи возникает необходимость построения и обоснования модифицированного варианта метода цикли-

ческой прогонки [1, 2] с целью улучшения его вычислительных свойств и существенного расширения класса решаемых задач.

Результатом исследований проведённых автором в этом направлении стала разработка вычислительной схемы циклической ортогональной прогонки, основанной на использовании ортогональных преобразований, связывающих искомую сеточную функцию с вспомогательными сеточными функциями, которые определяются как решение сеточных задач Коши, согласованных по своим свойствам с искомыми значениями решения [5, 6].

Наиболее существенными преимуществами построенного метода циклической ортогональной прогонки по сравнению с другими вариантами метода прогонки являются его применимость для решения систем сеточных уравнений более общего, чем система (1), вида, устойчивость в малом [5] и минимальные ограничения, накладываемые на исходные данные решаемой задачи. Так, например, при решении данным методом системы трёхточечных разностных уравнений (1) требуется только выполнение условий $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i = \overline{2, N-1}$. Такая универсальность предлагаемого метода, по сути, является следствием того, что важный для схем прогонки переход от основных функций к вспомогательным и обратно является всегда невырожденным и не требует выполнения дополнительных условий.

Литература. 1. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 679 – 684. 2. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 1. С. 211 – 218. 3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1989. 4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. 5. Кремень Ю. А., Монастырный П. И. // Доклады АН БССР. 1991. Т. 35. № 7. С. 589 – 593. 6. Кремень Ю. А., Монастырный П. И. // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 12. С. 1782 – 1792.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рудченко Ю.А., ГГТУ, г. Гомель

Во многих отраслях науки, техники и производства перспективным оказывается применение автоколебательных режимов работы электродвигателей, что

в конечном итоге ведет к уменьшению материальных затрат и в экономии электроэнергии.

Автоколебательный режим работы можно получить как в электромеханической системе «асинхронный электродвигатель-пружина» [1], так и в системе «асинхронный двигатель-маятник» [2].

Для численно-экспериментального исследования процессов автоколебаний в асинхронном электродвигателе, а также условий их возникновения необходима программа, которая численно решала бы дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{\varphi} + \varphi = f(\varphi, \dot{\varphi}, c).$$

Данное дифференциальное уравнение легко приводится к стандартному уравнению в форме Коши:

$$\dot{p} = f(p, \varphi, c),$$

где $p = \dot{\varphi}$, которое, в свою очередь, имеет известное приближенное решение по методу Эйлера.

На базе имеющегося программного обеспечения, а именно инженерно-технического программного пакета Fortran-77 и математического пакета MathCAD7 была разработана достаточно простая программа DDEP, которая производит следующие операции:

- приведение заданных параметров к валу рабочего органа;
- решение дифференциального уравнения либо «пружинного», либо «маятникового» с заданными начальными условиями и заданной точностью в зависимости от пожеланий пользователя;
- вывод результатов решения дифференциальных уравнений в файл с возможностью дальнейшего визуального просмотра содержимого файла в математическом пакете MathCAD7 в виде графиков временных зависимостей и фазовых характеристик.

Блок-схема программы DDEP представлена на рис.1.

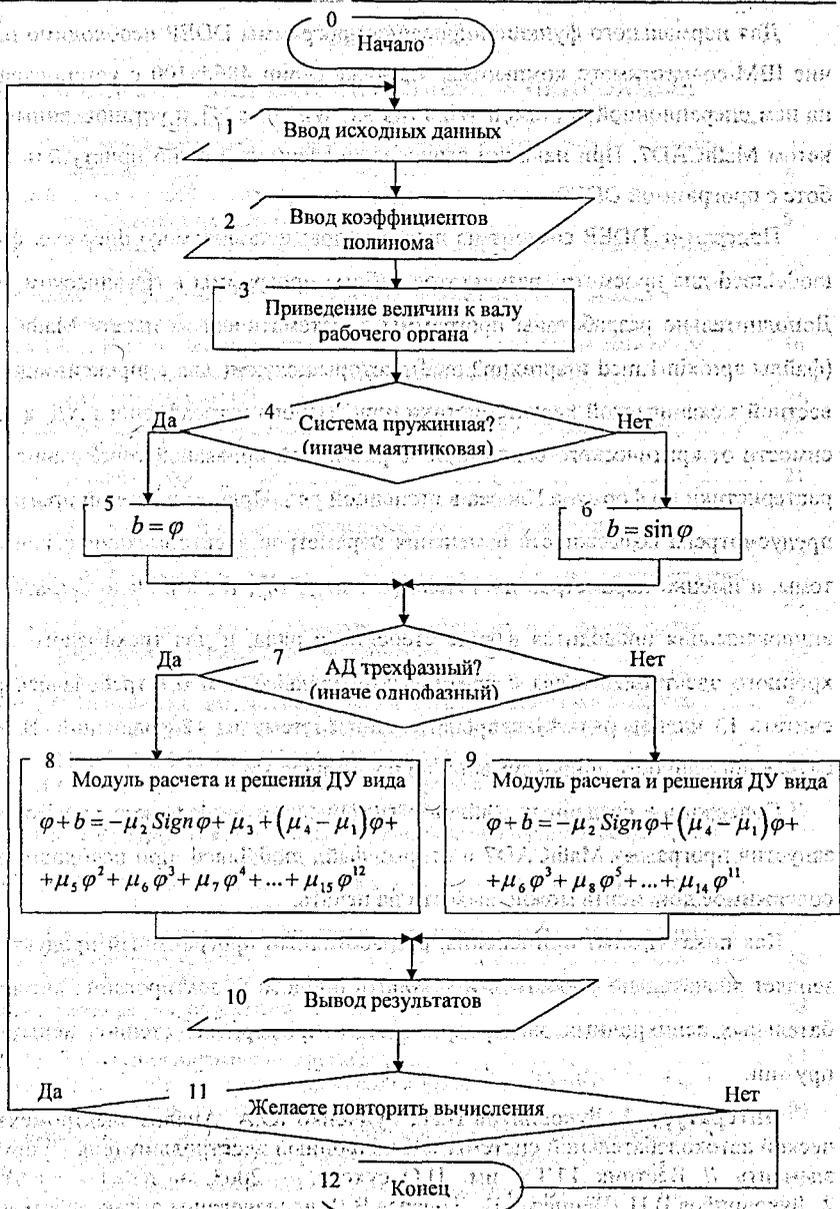


Рис.1. Укрупненная блочно-модульная схема программы анализа движения в системе АД с пружиной

Для нормального функционирования программы DDEP необходимо наличие IBM-совместимого компьютера не ниже серии 486dx100 с установленной на нем операционной системой Windows 9x, Windows NT и установленным пакетом MathCAD7. При наличии вышеперечисленного можно приступить к работе с программой DDEP.

Программа DDEP состоит из двух файлов: исполняемого `ddep.exe`, файла `model.mcd` для просмотра результатов работы программы в графическом виде. Дополнительно разработаны программы в математическом пакете MathCAD7 (файлы `aroxim1.mcd` и `aroxim2.mcd`), которые служат для аппроксимации известной механической характеристики однофазного и трехфазного АД, в зависимости от критического скольжения с различной привязкой точек данной характеристики по формуле Клосса в степенной ряд. Причем в данной программе предусмотрена возможность изменения параметров электромеханической системы, а именно параметров двигателя (U , $M_{кр}$, $S_{кр}$, α , k). Надо сказать, что аппроксимация проводится в виде степенного ряда, и для трехфазного асинхронного электродвигателя с критическим скольжением 0,1 требовалось считать 13 членов ряда Маклорена, решив систему из 12 уравнений. В этом случае погрешность аппроксимации не превышала 1%.

Содержимое созданных файлов в графическом виде можно просмотреть, запустив программу MathCAD7 и открыв файл `model.mcd`. при необходимости содержимое документа можно вывести на печать.

Как показал опыт применения, разработанный программный продукт, позволяет значительно упростить и ускорить процесс проектирования автоколебательных асинхронных электроприводов, например, для стендов испытания пружин.

Литература. 1. Луковников В.И., Рудченко Ю.А. Анализ электромеханической автоколебательной системы «Асинхронный электродвигатель – упругий элемент» // Вестник ГГТУ им. П.О. сухова. – 2003. – № .1. – с.61-66.
2. Луковников В.И., Веппер Л.В., Тодарев В.В. исследование автоколебательно-го движения асинхронного электродвигателя с маятником на валу // Вестник ГГТУ им. П.О. сухова. – 2003. – № .1. – с.53-60.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ	3
<i>Грязев Е.В.</i> Обучение многослойных нейронных сетей с использованием матричных операций.....	3
<i>Кокош Н.В.</i> Алгоритм обучения нейронных сетей с использованием метода сопряженных градиентов.....	6
<i>Nazarov P.V., Popletev A.M.</i> Neural network simulation of deterministic and stochastic processes.....	10
<i>Самодумкин С.А., Проценко Ю.А.</i> Применение моделей нечеткого вывода в медицинской диагностике.....	13
<i>Соломиюк К.С.</i> Использование нечеткой логики в задаче управления движением.....	16
РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ	20
<i>Грязев Е.В.</i> Распознавание графических образов при помощи нейронной сети.....	20
<i>Капюхович Д.О.</i> Анализ и распознавание цифровых образов рукописных арабских цифр.....	21
<i>Кириь А.Н.</i> Распознавание регистрационных номерных знаков автомобилей.....	24
<i>Кириянов Д.П.</i> Применение метода независимых компонент для обработки электроэнцефалограмм.....	28
<i>Макарова Е. В., Назаров П. В.</i> Автоматический анализ и распознавание изображений хромосом.....	32
<i>Селезнев П.В.</i> Выбор оптимальной структуры нейросетевых моделей для задачи распознавания графической информации.....	35
<i>Семченко Д.Е.</i> Сравнительный анализ интерфейсов обмена человек-компьютер.....	40
<i>Смачек С.Н.</i> Применение самоорганизующихся сетей к распознаванию образов.....	43
РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	46
<i>Афонин А.В.</i> К вычислению коэффициента влагопроводности материала по кинетике одномерного водопоглощения.....	46
<i>Бескровный А.В., Туреникова А.В.</i> Моделирование безредукторных и редукторных приводов периодического движения.....	49
<i>Босько А.А.</i> Исследование мощности тестов коинтегрированности при наличии структурных изменений.....	53
<i>Калюта В.В.</i> Сравнительная характеристика сверхлинейных процессов решения нелинейных уравнений.....	56
<i>Коваленко О.А.</i> Разработка метода глобального анализа спектров флуоресценции с разрешением по времени.....	58
<i>Козлов А.В.</i> Применение многомерного операторного метода к исследованию структуры асинхронного двигателя.....	61
<i>Подымако М.Э.</i> Анализ переходных процессов в элементах системы энергосбережения скрепера.....	64
<i>Луковников В.И., Рудченко Ю.А.</i> Метод компенсации для анализа нелинейных динамических процессов в автоколебательной системе «Электродвигатель-пружина».....	68
<i>Шваляков А.В.</i> Исследование системы ТРН-АД с фазовым управлением и управлением по углу бестоковой паузы.....	71

<i>Щирий А.О.</i> Исследование амплитуд парциальных волн распространения КВ-радиосигнала методами биспектрального и кепстрального анализа.....	75
РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ.....	79
<i>Antonik D.</i> Organization of interactivity of a web-site by means of the programming language PERL.....	79
<i>Васькович Т.А., Кольчевский Н.Н.</i> Компьютерная обработка рентгеновских изображений полученных CMOS камерой.....	82
<i>Грязев Е.В.</i> Нахождение оптимального маршрута в графе.....	85
<i>Дарадкх Ю.И., Ревотюк М.П.</i> Поиск кратчайших путей на графах при узловых ограничениях на структуру пути.....	86
<i>Дубровина О.В.</i> Об одном алгоритме использования вейвлетов при обработке медицинской информации.....	90
<i>Кирищенко П.В.</i> Система поддержки принятия решения выбора полиграфических технологий.....	95
<i>Культяшов С.Ю.</i> Система автоматизированного синтеза кулачковых механизмов.....	97
<i>Ливенцева С.П.</i> Некоторые возможности повышения качества индексирования документов для электронного каталога библиотеки.....	99
<i>Поплетеев А. М., Ильюшонко Б. А., Макарова Е. В., Ренич М. В.</i> Электронная энциклопедия по физическим эффектам.....	102
<i>Пуденкова В.А.</i> Автоматизированная система расчета суммарной погрешности обработки (АСРСПО "ЕХАСТ-1").....	106
<i>Путято А.В.</i> Применение методов подмоделей и подконструкций к исследованию прочности железнодорожной цистерны.....	108
<i>Раткевич А.В.</i> Сравнительная характеристика методов расчета фрактальной размерности тонких пленок.....	111
<i>Ровнейко С.Н.</i> Использование современных информационных технологий в архивном деле: зарубежный и отечественный опыт.....	113
<i>Стрик О.Н.</i> Геометрическая модель представления мозга.....	117
<i>Тузик И.В., Тузик С.А.</i> Об одном представлении группы подстановок.....	119
<i>Тур В.М.</i> Построение тарифной системы оплаты труда на предприятии с помощью симплекс-метода.....	120
<i>Хомяк Н.А.</i> Обучение использованию сетевых информационных технологий в практической деятельности.....	123
<i>Цеховая Т.В.</i> Об оценке порога семивариограммы.....	126
<i>Шкред С.Л.</i> Интеллектуализация процесса проведения анализа деятельности организации.....	130
РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	133
<i>Акипина М.А.</i> Сравнительный анализ величин моментов сглаженной периодограммы барглетта для различных спектральных окон.....	133
<i>Андреев А.С.</i> Обобщение фундаментальной формы Каргана и ее основные свойства.....	137
<i>Асмыкович О.И.</i> Применение пакета Maple для вычисления обратной матрицы Драйзина.....	140
<i>Белко А.В.</i> Моделирование роста кластеров методами молекулярной динамики.....	143
<i>Василенко Ж. В.</i> Исследование скорости сходимости первого момента оценки спектральной плотности.....	146

<i>Вашкевич В.В., Вашкевич В.В.</i> О нелокальных вариантах метода Красносельского-Канторовича решения нелинейных уравнений.....	148
<i>Гаджиева Л.Э.</i> Моделирование устойчивых случайных величин.....	150
<i>Громько Ю. В.</i> Собственные частоты колебаний шарнирно опертой трехслойной кольцевой пластины.....	154
<i>Гуща П.И.</i> Комплекс контролирующе- обучающих программ по курсу системного анализа и исследования операций.....	158
<i>Дейцева А.Г.</i> Быстрый алгоритм вычисления непрерывного вейвлет-преобразования с базисным собольевским вейвлетом.....	161
<i>Дуванова В.С., Савчук В.Ф.</i> Сходимость метода итераций решения некорректных задач в гильбертовом пространстве.....	164
<i>Матысик О.В., Засим В.В.</i> Правило останова по невязке для явного итерационного метода решения линейных уравнений.....	165
<i>Захаров А.В.</i> Моделирование гидравлических систем управления с применением программного обеспечения для симулирования электрических схем.....	166
<i>Илюкевич Т.И.</i> Оценка спектральной плотности процесса с бернуллиевскими пропусками наблюдений.....	169
<i>Казанцева О.Г.</i> Аппроксимация условной плотности двухфакторной модели безрисковой процентной ставки.....	172
<i>Казимирский А. В.</i> Исследование системы ВМАР/G/I со складом с различными стратегиями производства заготовок.....	176
<i>Киришин Е.А., Юганов А.В.</i> Локальный эволюционный алгоритм аппроксимации.....	179
<i>Кондратюк А.П.</i> Решение жестких задач Коши на примере задачи Робертсона.....	183
<i>Коростелева Л.Ю.</i> Экспертные оценки в анализе потока свободных денежных средств.....	185
<i>Кулеш Е.Е.</i> Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с рациональной правой частью.....	188
<i>Курочка О.Н., Юдов А.А.</i> Об эквивалентности подмногообразий однородного пространства.....	191
<i>Кучмиенко И.А.</i> Параметрические методы численного решения задачи Коши.....	192
<i>Леопенко Д.В.</i> Локальные нагружения трехслойных стержней.....	195
<i>Лис А. В.</i> Вероятность разорения за бесконечное время в модели коллективного риска с арифметическим броуновским движением.....	198
<i>Макевич П.В.</i> Численный эксперимент по сравнению эффективности методов решения задачи линейного программирования.....	201
<i>Мартон М. В.</i> Существенный спектр апостола в примерах и приложениях.....	202
<i>Матысик О.В.</i> Случай неединственного решения для итеративного метода решения линейных уравнений.....	206
<i>Милованова И.С.</i> О критерии поиска набора "шаблонов" для тестирования бинарных последовательностей.....	207
<i>Панцыр В.М., Савчук В.Ф.</i> Метод итераций решения операторных уравнений с априорным выбором числа итераций.....	211
<i>Прожерин И.Г.</i> Современные методы решения задачи коммивояжера.....	212
<i>Пятницкий В. Ю.</i> Численное решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с кратными ядрами Коши с использованием многочленов Чебышева.....	215
<i>Розин Е.Е.</i> Ассоциированные решения системы уравнений в дифференциалах, содержащих скачкообразные случайные процессы с ограниченной вариацией.....	219

<i>Романюк Т.В.</i> Применение сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях при решении одной задачи страхования.....	221
<i>Русина Т.И.</i> Аппроксимация стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов для неоднородного многомерного случая.....	224
<i>Семенова О.В.</i> Распределение времени ожидания в управляемой системе SM/MSP/1 с MAP-потоком сбоев.....	228
<i>Семенчук Н.В.</i> Вероятность разорения страховой компании в случае, когда интервалы между моментами выплат имеют показательные распределение.....	231
<i>Сидорович М.П., Гучко И.М.</i> Об устойчивости динамической балансовой модели в экономических системах.....	233
<i>Соболева Т. В.</i> О мере зависимости составляющих многомерного устойчивого процесса.....	237
<i>Старовойтов С. А.</i> Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании под действием распределенной нагрузки.....	239
<i>Стельмах С.Н.</i> О вычислительных схемах гибридного типа для решения трехточечных сеточных уравнений в случае неоднородных сред.....	242
<i>Стрилец Н. Н.</i> Сравнительный анализ методов аппроксимации приближенного решения периодической красной задачи Дуффинга.....	246
<i>Фалейчик Б.В.</i> Численная реализация метода Пикара на основе кусочно-эрмитовой интерполяции.....	249
<i>Фаткуллин Н.Ю.</i> Применение метода статистических испытаний в расчете объема финансирования плановых и аварийных ремонтных работ на нефтепроводах.....	253
<i>Фетисова С.А., Савчук В.Ф.</i> Сходимость в энергетической норме итеративного метода решения операторных уравнений.....	257
<i>Харкович А.П.</i> Линейный гармонический осциллятор.....	258
<i>Хартовский В.Е.</i> Об условиях восстановления текущего состояния в факторизованном пространстве для дифференциально-разностной системы с соизмеримыми запаздываниями.....	260
<i>Хиревич С.И.</i> Численная модель самодиффузии и ЯМР-релаксации в биологической структуре.....	264
<i>Хомицкая Т.Г.</i> Численный метод решения линейной задачи оптимального управления с параметрами.....	267
<i>Хоровец М.В, Кожух, И.Г.</i> Алгебраические системы третьей степени с интегральными кривыми второго порядка.....	271
<i>Храмова Е.В.</i> Вероятностные свойства самосжимающегося генератора.....	274
<i>Чехменок С.Л., Иванов С.Н.</i> Восстановление функциональной зависимости в задачах теплопереноса.....	277
<i>Чумерин Н.Ю.</i> Об одном методе анализа независимых компонент.....	281
<i>Шандриков А.С.</i> Последовательный алгоритм разрезания графа с оптимизацией результата.....	283
<i>Швакель А.И.</i> Метод потоковой ортогональной прогонки для сеточных уравнений с сильно меняющимися коэффициентами.....	286
<i>Швакель А.И.</i> Циклическая ортогональная прогонка для трёхточечных сеточных уравнений с периодическим решением.....	288
<i>Рудченко Ю.А.</i> Программное обеспечение анализа и синтеза автоколебательной электромеханической системы.....	289
СОДЕРЖАНИЕ.....	293

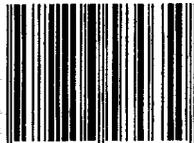
Научное издание

«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ»

Материалы III республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
26-28 ноября 2003 года

Ответственный за выпуск: Рубанов В.С.
Редактор: Строкач Т.В.
Технический редактор: Никитчик А.Д.
Набор и верстка: Гладкий И.И.
Макет обложки: Вакула В.В.

ISBN 985-6584-65-5



9 789856 584650

Лицензия ЛВ №382 от 1.09.2000 г.
Лицензия ЛП №178 от 14.01.2003 г.

Подписано к печати 12.11.2003г. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая. Гарнитура Т.Н.Р.
Усл.п.л. 17,3. Уч.изд.л. 18,6. Тираж 110 экз. Заказ №849.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.