ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА НЕЗАВИСИМЫХ КОМПОНЕНТ

Чумерин Н.Ю., БрГУ, Брест

Задачу метода независимых компонент (Independent Component Analysis, ICA) можно кратко сформулировать следующим образом: *известно, что компоненты вектора-сигнала* **x** *являются линейными комбинациями компонент вектора-источника* **s**, *т.е. имеет место соотношение*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \tag{1}$$

и при этом (невырожденная) матрица **A** *неизвестна. Зная, что компоненты вектора* **s** *статистически независимы, требуется найти матрицу* **W**, *удовлетворяющую соотношению*:

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}. \tag{2}$$

При оценивании матрицы **W**, предполагается, что задана последовательность реализаций вектора **x**.

Как правило, статистические методы ICA [1] основываются на оптимизации так называемой *контрастной функции* – меры независимости получаемых компонент, поэтому, предложив новую контрастную функцию и указав метод её оптимизации, мы получим новый метод ICA.

В предлагаемом методе в качестве контрастной рассматривается функция, которую можно охарактеризовать как *отклонение n-мерной функции плотности распределения сигнала-вектора от n-мерной функции плотности распределения, восстановленной из одномерных плотностей сигналов (по каждой координате) с использованием правила умножения независимых событий.*

Для примера рассмотрим простой случай, когда случайный вектор **x** – двумерный, то есть $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Пусть $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$. Выберём некоторое натуральное число n и рассмотрим такое разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n = b$, что каждый из отрезков $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ имеет фиксированную длину $\Delta_1 = (b-a)/n$. Аналогично разобьём отрезок $[c, d]$ точками $c = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_n = d$ так, чтобы длина каждого отрезка $[\eta_{i-1}, \eta_i]$ была равна $\Delta_2 = (d-c)/n$.

Обозначим события: A_i – «величина x_1 попала в отрезок $[\xi_{i-1}, \xi_i]$», B_j – «величина x_2 попала в отрезок $[\eta_{j-1}, \eta_j]$». Имея выборку N реализаций вектора **x** можно достаточно просто эмпирически оценить значения величин $P(A_i)$, $P(B_j)$ и $P(A_iB_j)$:

$$P(A_i) = \#\{x_1 : x_1 \in [\xi_{i-1}, \xi_i]\} / N, \tag{3}$$

$$P(B_j) = \#\{x_2 : x_2 \in [\eta_{j-1}, \eta_j]\} / N, \tag{4}$$

$$P(A_iB_j) = \#\{(x_1, x_2) : x_1 \in [\xi_{i-1}, \xi_i], x_2 \in [\eta_{j-1}, \eta_j]\} / N. \tag{5}$$

Теперь можно записать условие независимости случайных величин x_1 и x_2 в виде

$$P(A_iB_j) = P(A_i)\,P(B_j), \text{ для всех } i, j. \tag{6}$$

Из соотношения (6) вытекает, что в качестве меры независимости компонент вектора **x** можно выбрать либо

$$M_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|P(A_iB_j) - P(A_i)P(B_j)\right|, \tag{7}$$

либо

$$M_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(P(A_iB_j) - P(A_i)P(B_j)\right)^2. \tag{8}$$

Понятно, что независимость компонент x_1 и x_2 равносильна одному из эквивалентных условий $M_1(\mathbf{x}) = 0$ или $M_2(\mathbf{x}) = 0$. Поскольку меры M_1 и M_2 эквивалентны в этом смысле, то для определённости будем использовать просто обозначение $M(\mathbf{x})$. Таким образом, *чем больше значение* $M(\mathbf{x})$, *тем более зависимы компоненты вектора* **x** и наоборот, *чем ближе к нулю* $M(\mathbf{x})$, *тем компоненты вектора* **x** *более независимы.*

Поскольку, без потери общности, можно считать сигнал **x** предварительно центрированным и отбеленным (это эквивалентно тому, что матрица ковариации случайного вектора **x** является единичной), то для разделения независимых компонент достаточно «провернуть» сигнал **x** на некоторый угол α относительно начала координат. То есть (в двумерном случае), искомая матрица **W** определяется всего одним параметром – углом α:

$$W(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Таким образом, задача выделения независимых компонент двумерного вектора **x** свелась к нахождению значения угла α^*, при котором мера независимости компонент вектора $\mathbf{W}(\alpha^*)\mathbf{x}$ минимальна, то есть:

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\{M(\mathbf{W}(\alpha)\mathbf{x})\}. \qquad (10)$$

Далее следует минимизировать полученную контрастную функцию $M(\alpha)=M(\mathbf{W}(\alpha)\mathbf{x})$ (в экспериментах мы использовали метод золотого сечения с квадратичной интерполяцией). Рассмотрённый метод можно применять также и в случае, когда сигнал имеет размерность более двух, правда в этом случае усложняется процедура оптимизации контрастной функции.

Работа предложенного метода не зависит от природы исходных сигналов-смесей (в отличие от существующих методов ICA, зависящих, например, от нормальности распределения [1]). В настоящее время ведётся поиск дифференцируемой оценки функции $M(\cdot)$, что позволит значительно улучшит метод, применяя для оптимизации градиентные методы [2].

Литература. 1. A. Hyvärinen *Syrvey on Independent component analysis*, Neural Computing Syrveys, 2, 94–128. 2. М. Базара, К. Шетти *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.*– М.: Мир, 1982.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗРЕЗАНИЯ ГРАФА С ОПТИМИЗАЦИЕЙ РЕЗУЛЬТАТА

Шандриков А.С.

Витебский государственный политехнический техникум, г. Витебск

Автоматизированное проектирование сложных технических изделий, в частности, радиоэлектронных средств (РЭС), предполагает использование математических моделей. Наиболее приемлемой моделью для проектирования РЭС является граф вида G = (X, U), у которого вершины x ∈ X представляют радиоэлектронные компоненты (РЭК), а рёбра u ∈ U — электрические связи [1, с.16-17]. Компоновка РЭС предполагает разбиение принципиальной электрической схемы на конструктивно законченные узлы, что моделируется разрезанием