численного решения ДУ в частных производных в среде FEMLAB. Главное свойство этого приближения с точки зрения моделирования ЯМР измерений в биологической среде – это возможность построения нерегулярной сетки, в результате чего мы получаем отсутствие неопределённости в представлении мембраны. Пользовательский интерфейс FEMLAB предоставляет широкую функциональность. Но на пути оптимизации времени вычислений появляется необходимость разработки отдельного программного модуля для применения метода конечных элементов для моделирования ЯМР-измерений. В настоящее время ведется его разработка. В рамках этой задачи создана подпрограмма, выполняющая триангуляцию Делоне произвольной двумерной области.

Предложенная численная модель позволяет описывать поведение магнетизации в двумерном пространстве для систем произвольной конфигурации, что является шагом вперёд по сравнению с ранее опубликованными результатами. Разработанные алгоритмы будут использованы для обобщения модели на трёхмерное пространство.

Литература. 1. J.E.M.Snaar and h. Van As, *Biophys. J.*, 63, P. 1654. 1992. **2.** H. Van As and D. van Dusschoten, *Geoderma*, 80, P. 389. 1997. **3.** B.Balinov, B.Jonsson. P.Linse, Olle Soderman, *J.Magn.Res.* A 104, P. 17. 1993. **4.** H.Gudbjartsson, S.Patz, *IEEE Transactions on medical imaging*, 14, No. 4, 1995, P. 636. **5.** R.Valiulin, V. Skirda, *J. Chem. Phys.* 114, No. 1, P. 452. 2001. **6.** J.E.M.Snaar, H.Van As, *J.Magn.Res.* A 102, P. 318. 1993. **7.** P.Linse, O.Soderman, *J.Magn.Res.* A 116, P. 77. 1995. **8.** P.T.Callaghan, *J.Magn.Res.* A 113, P. 53. 1995. **9.** T.A.Zawodzinski, T.E. Springer, M.Neeman, and L.O. Sillerud, *Israel J. Chem.* 32, P. 281. 1992. **10.** E.G.Novikov, D.van Dusschoten, H. Van As, *J.Magn.Res.* A **135**, P. 522. 1998. **11.** K.R.Brownstein and C.E.Tarr, *Phys. Rev.* **19**, P. 2446. 1979. **12.** L. van der Weerd, S.M. Melnikov, F.J. Vergeldt et al. *J.Magn.Res. A*, **156**, P. 213. 2002.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Хомицкая Т.Г., БГУ, Минск

Функция $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, называется дискретным управлением с периодом квантования h $(h = (t_* - t^*)/N$, N – натуральное число), если $u(t) = u(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $t_k = t_* + kh$, $k = \overline{0, N-1}$.

В классе дискретных управлений рассматривается линейная задача терминального управления

$$c_u'x(t^*)+c_v'v+c_w'w \to max;\ \dot{x}=A(t)x+b(t)u+D(t)w;$$
$$x(t_*)=Mv;\ g_* \le Hx(t^*) \le g^*;\ |u(t)| \le 1,\ t\in T;\ v_* \le v \le v^*;\ w_* \le w \le w_*. \quad (1)$$

Здесь $x=x(t)\in R^n$ – состояние системы управления в момент времени t; $u=u(t)\in R$ – значение скалярного управляющего воздействия в момент времени t; $v=(v_j, j\in J_v)\in R^p$ – вектор управляющих параметров начального состояния системы (1), $J_v=\{1,2,\ldots,p\}$; $w=(w_k, k\in J_w)\in R^q$ – вектор входных управляющих параметров, $J_w=\{1,2,\ldots,q\}$; $M=(m_{(j)}, j\in J_v)\in R^{n\times p}$, $m_{(j)}\in R^n$ – j-й столбец матрицы M; $A(t)\in R^{n\times n}$, $D(t)=(d_{(k)}(t), j\in J_w)\in R^{n\times q}$, $t\in T$, – кусочно-непрерывные матричные функции, $d_{(j)}(t)\in R^n$ – k-й столбец матрицы $D(t)$; $b(t)\in R^n$, $t\in T$, – кусочно-непрерывная векторная функция; $c_u\in R^n$; c_v, v_*, $v^*\in R^p$; c_w, w_*, $w^*\in R^q$; g_*, $g^*\in R^m$, $H\in R^{m\times n}$, $H'=(h_{[i]}, i\in I)$, $h_{[i]}\in R^n$ – i-строка матрицы H, $I=\{1,2,\ldots,m\}$.

Управляющую совокупность $(u(\cdot),v,w)$, состоящую из управляющего воздействия $u(\cdot)=(u(t),t\in T)$ и управляющих параметров v и w, а также соответствующую ей траекторию $x(\cdot)=(x(t),t\in T)$ системы (1) назовем допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям задачи (1).

Допустимые управляющая совокупность $(u^0(\cdot),v^0,w^0)$ и траектория $x^0(\cdot)$ называются оптимальными (программным решением задачи (1)), если вдоль них критерий качества задачи (1) достигает максимального значения:

$$c_u'x^0(t^*)+c_v'v^0+c_w'w^0=max(c_u'x(t^*)+c_v'v+c_w'w).$$

Субоптимальные (ε-оптимальные) управляющая совокупность $(u^\varepsilon(\cdot),v^\varepsilon,w^\varepsilon)$ и траектория $x^\varepsilon(\cdot)$ определяются неравенством

$$c_u'x^0(t^*)+c_v'v^0+c_w'w^0-c_u'x^\varepsilon(t^*)-c_v'v^\varepsilon-c_w'w^\varepsilon \le \varepsilon.$$

Эквивалентная функциональная форма задачи (1) имеет вид

$$\sum_{t\in T_h} c_{(1)}(t)u(t)+\sum_{j\in J_v} c_{(2)j}v_j+\sum_{k\in J_w} c_{(3)k}w_k \to max;$$
$$g_* \le \sum_{t\in T_h} f_{(i)}(t)u(t)+\sum_{j\in J_v} f_{(2)j}v_j+\sum_{k\in J_w} f_{(3)k}w_k \le g^*; \quad (2)$$
$$|u(t)| \le 1,\ t\in T;\ v_* \le v \le v^*;\ w_* \le w \le w_*.$$

Здесь

$$c_{(1)}(t) = \int_t^{t+h} \psi_c'(\tau)b(\tau)d\tau;\ f_{(1)}(t) = \left(\int_t^{t+h} \psi_{hi}'(\tau)b(\tau)d\tau, i \in I\right), t \in T_u = \{t_*, t_*+h, \dots, t^*-h\};$$

$$c_{(2)j} = \psi_c'(t_*)m_{(j)} + c_{vj};\ f_{(2)j} = \left(\psi_{hi}'(t_*)m_{(j)}, i \in I\right), j \in J_v;$$

$$c_{(3)k} = \int_{t_*}^{t^*} \psi_c'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau + c_{wk},\ f_{(3)k} = \left(\int_{t_*}^{t^*} \psi_{hi}'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau, i \in I\right), k \in J_w;$$

$\psi_c(t)$, $\psi_{hi}(t)$, $t \in T$, – решения сопряженного уравнения

$$\dot\psi = -A'(t)\psi$$

с начальными условиями $\psi(t^*) = c_u$, $\psi(t^*) = h_{(i)}$ соответственно.

Задача (2) отличается от соответствующей задачи из [1] наличием управляющих параметров v и w, что требует внесения в понятия и конструкции адаптивных методов [1] соответствующих изменений.

Начнем с основного понятия адаптивного метода – опоры. Выделим из множества I произвольное подмножество I_{on}, из множеств T_u, J_v, J_w – произвольные подмножества T_{on}, J_{von}, J_{won} соответственно так, чтобы $|I_{von}| = |T_{on}| + |J_{von}| + |J_{won}| = r$. Построим $r \times r$-матрицу

$$P_{on} = \begin{pmatrix} f_{(1)i}(t), t \in T_{on}; f_{(2)ij}, j \in J_{von}; f_{(3)ik}, k \in J_{won} \\ i \in I_{on} \end{pmatrix},$$

где $f_{(1)i}(t)$, $f_{(2)ij}$, $f_{(3)ik}$ – i-е элементы векторов $f_{(1)}(t)$, $f_{(2)j}$, $f_{(3)k}$ соответственно.

Определение 1. Совокупность множеств $K_{on} = \{I_{on}; T_{on}, J_{von}, J_{won}\}$ называется опорой задачи (2), если $\det P_{on} \neq 0$.

Следуя [1], построим для опоры K_{on} задачи (2) сопровождающие элементы:

1. Вектор потенциалов $\nu = (\nu_i, i \in I)$.
2. Котраектория $\psi(t)$, $t \in T$.
3. Коуправление $\delta_{(1)}(t)$, $t \in T$, и оценки $\delta_{(2)j}$, $j \in J_v$; $\delta_{(3)k}$, $k \in J_w$.
4. Псевдоуправление $\omega(t)$, $t \in T$, управляющие псевдопараметры v_ω, w_ω и выходной псевдосигнал $\zeta = (\zeta_i, i \in I)$; псевдотраектория $æ(t)$, $t \in T$.

Определение 2. Пару $\{(u(\cdot), v, w), K_{on}\}$ из допустимой совокупности $(u(\cdot), v, w)$ и опоры K_{on} будем называть опорной совокупностью.

Определение 3. Число

$$\beta((u(\cdot),v,w),K_{on}) = c_u' æ(t^*) + c_v'v_\omega + c_w'w_\omega - c_u'x(t^*) - c_v'v - c_w'w$$

называется оценкой ε-оптимальности опорной совокупности $\{(u(\cdot),v,w),K_{on}\}$.

Опора используется прежде всего для идентификации оптимальных и субоптимальных управляющих совокупностей.

Принцип максимума. Для оптимальности допустимой управляющей совокупности $(u(\cdot),v,w)$ и траектории $x(t)$, $t\in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры K_{on}, что на сопровождающих ее векторе потенциалов ν и котраектории $\psi(t)$, $t\in T$, выполняются

1) условие максимума для управляющего воздействия:

$$\int_t^{t+h}\psi'(\tau)b(\tau)d\tau\, u(t) = \max_{|u|\le 1}\int_t^{t+h}\psi'(\tau)b(\tau)d\tau\, u,\ t\in T_u;$$

2) условие максимума для начальных параметров:

$$\left(\psi'(t_*)m_{(j)}+c_{vj}\right)v_j = \max_{v_{*j}\le\tilde v\le v_j^*}\left(\psi'(t_*)m_{(j)}+c_{vj}\right)\tilde v,\ j\in J_v;$$

3) условие максимума для входных параметров:

$$\left(\int_{t_*}^{t^*}\psi'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau + c_{wk}\right)w_k = \max_{w_{*k}\le\tilde w\le w_k^*}\left(\int_{t_*}^{t^*}\psi'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau + c_{wk}\right)\tilde w,\ k\in J_w;$$

4) условие трансверсальности для траектории:

$$\nu' Hx(t^*) = \max_{g_*\le x\le g^*}\nu' x.$$

Принцип ε-максимума. При любом $\varepsilon\ge 0$ для ε-оптимальности допустимой управляющей совокупности $(u(\cdot),v,w)$ и траектории $x(t)$, $t\in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры K_{on}, на сопровождающих элементах которой выполняются

1) условие квазимаксимума для управляющего воздействия:

$$\int_t^{t+h}\psi'(\tau)b(\tau)d\tau\, u(t) = \max_{|u|\le 1}\int_t^{t+h}\psi'(\tau)b(\tau)d\tau\, u - \varepsilon_u(t),\ t\in T_u;$$

2) условие квазимаксимума для начальных параметров:

$$\left(\psi'(t_*)m_{(j)}+c_{vj}\right)v_j = \max_{v_{*j}\le\tilde v\le v_j^*}\left(\psi'(t_*)m_{(j)}+c_{vj}\right)\tilde v - \varepsilon_{vj},\ j\in J_v;$$

3) условие квазимаксимума для входных параметров:

$$\left(\int \psi'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau + c_{wk}\right)w_k = \max_{w_* \le \overline{w} \le w_k^*}\left(\int \psi'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau + c_{wk}\right)\overline{w} - \varepsilon_{wk}, k \in J_w;$$

4) условие квазитрансверсальности для траектории:

$$v'Hx(t^*) = \max_{g_* \le x \le g^*} v'x - \varepsilon_z;$$

5) условие ε-точности:

$$\sum_{i \in T_u} \varepsilon_u(t) + \sum_{j \in J_v} \varepsilon_{vj} + \sum_{k \in J_w} \varepsilon_{wk} + \varepsilon_z \le \varepsilon.$$

На основе этих результатов построены прямой и двойственный методы решения задачи (2), которые являются итеративными. Каждая итерация представляет собой замену «старой» опорной совокупности на «новую»:

$$\{(u(\cdot), v, w), K_{on}\} \to \{(\overline{u}(\cdot), \overline{v}, \overline{w}), \overline{K}_{on}\}$$

и организована так, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta((\overline{u}(\cdot), \overline{v}, \overline{w}), \overline{K}_{on}) \le \beta((u(\cdot), v, w), K_{on}).$$

Предложенный численный метод иллюстрируется на примере.

Литература. 1.*Габасов Р., Кириллова Ф.М., Дмитрук Н.М.* Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 3 - 26.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Хоровец М.В., БрГУ, Брест, Кожух И.Г., Akademia Podlaska, RP

Многие отечественные и зарубежные ученые занимались качественным исследованием двумерных динамических систем с квадратичными полиномами в их правых частях. Однако задача их полного качественного исследования во всем пространстве параметров далека до завершения. Неизвестно, например, максимально возможное количество предельных циклов у таких систем.

Динамические системы второго порядка с полиномами третьей степени в правых частях еще менее исследованы. Построение их качественного портрета в общем случае, без каких-либо ограничений на содержащиеся в них параметры, сопряжено с огромными трудностями и содержит много пока неразрешенных проблем.