Найдём кинетическую, потенциальную и полную энергии системы.

Так как скорость частицы $v = \frac{dx}{dt} = 2\pi\nu_o a\cos 2\pi\nu_o(t + \varphi_o)$

то кинетическая энергия

$$E_к = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{m}{2}4\pi^2\nu_o^2 a^2\cos^2 2\pi\nu_o(t + \varphi_o).$$

Потенциальную энергию осциллятора найдем по формуле

$$E_п = -\int_0^x F du = \int_0^x ku du = k\frac{u^2}{2}\Big|_0^x = \frac{k}{2}x^2,$$

При $k = m\omega^2$ с учетом (3)

$$E_п = 2\pi a^2\nu_o^2\sin^2 2\pi\nu_o(t + \varphi_o).$$

В точке равновесия ($x' = 0$) $E_п = 0$, а $E_к = 2\pi^2 a^2 \nu_o^2 m$, в точках $x = \pm a$, $E_к = 0$, $E_п = 2\pi^2 a^2\nu_o^2 m$.

Полная энергия осциллятора $E = E_к + E_п = 2\pi^2 a^2\nu_o^2 m$ постоянна в любой момент времени. При совершении колебательных движений происходит лишь преобразование кинетической энергии в потенциальную и потенциальной в кинетическую. Этот результат опровергает утверждение о том, что в точке равновесия $x = 0$ полная энергия осциллятора равна нулю, приведенное в [1] в качестве главного отличия линейного гармонического осциллятора от квантового.

Литература. 1. Скатецкий В.Г. Математическое моделирование физико-химических процессов. Издательство Мн.: Вышэйшая школа, 1981.

ОБ УСЛОВИЯХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ В ФАКТОРИЗОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Хартовский В.Е., ГрГУ, Гродно

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями Σ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i),\ t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), t \in H^- = [-h, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = Gx(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i x(t - h_i), t \in T = [0, t_1], \tag{3}$$

где $x - n$-вектор-столбец решения уравнения (1), ($n \geq 2$); $y - l$-вектор-столбец выходных величин системы $\Sigma(l \geq 1)$; $h_i = i\omega$, $\omega > 0 \, (i = \overline{1,m}, m \geq 1)$, $h = m\omega$ - постоянные запаздывания; $t_1 > 0$-фиксированный момент времени; A, A_i, G, G_i - постоянные матрицы соответствующих размерностей ($A_m \neq 0$). Начальное состояние $\eta \in C$, где $C = C(H^-, R^n)$ - банахово пространство непрерывных функций с топологией равномерной сходимости. Под состоянием x_t системы Σ в момент времени $t \geq 0$ будем понимать функцию $x_t = x_t(\tau) = x(t+\tau), \tau \in H^-$, через $x_{t,\eta}$ будем обозначать состояние x_t системы Σ, порожденное начальной функцией η.

Уравнение (1) задает [1] сильно непрерывную полугруппу ограниченных линейных преобразований $T(t): C \to C$, действующих по формуле $x_{t,\eta} = T(t)\eta, t > 0$. Пусть $W(\lambda) = \lambda E - A - \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i}$ -характеристическая матрица системы Σ, K-множество комплексных чисел, $\Lambda = \{\lambda \in K | \det W(\lambda) = 0\}$-спектр уравнения (1). Через P_λ обозначим обобщенное собственное пространство системы Σ, соответствующее $\lambda \in \Lambda$, P_λ-линейная оболочка функций

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{i+1} \frac{\tau^i}{i!} e^{\lambda\tau}, \ \tau \in H^-, k \geq 1, \tag{4}$$

где k- алгебраическая кратность $\lambda \in \Lambda$ как нуля характеристического уравнения $\det W(\lambda) = 0$, а $\gamma = \operatorname{col}[\gamma_1, ..., \gamma_k]$ - nk-вектор-столбец, удовлетворяющий системе алгебраических уравнений $M_k(\lambda)\gamma = 0$, постоянная матрица $M_k = M_k(\lambda)$ задается формулой $M_k = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \dots & W_k \\ 0 & W_1 & \dots & W_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W_1 \end{bmatrix}$, $W_{j+1} = \frac{W^{(j)}(\lambda)}{j!}$, $j = \overline{0, k-1}$. Пусть множество

$$\Lambda^0 = \left\{ \lambda \in K \middle| \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(\lambda) \\ Z(\lambda) \end{bmatrix} < n \right\}.$$

Один и тот же выход (3) может порождаться несколькими начальными состояниями (2). Поэтому всякому выходу y может соответствовать несколько текущих состояний x_{t_1}. Каждое такое состояние будем называть совместимым с измерянным выходом.

Пусть $Y = \{y|\eta \in C\}$-совокупность всех выходов системы Σ, $\{x_{t_1}\}_y$-класс текущих состояний, совместимых с выходом y. Множество Y будем рассматривать как многообразие в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(T, R^l)$. Введем оператор L_{t_1} с областью определения Y: $L_{t_1} y = x_{t_1}$, который будем называть оператором восстановления класса $\{x_{t_1}\}_y$ текущих состояний, совместимых с измеренным выходом y.

Определение 1. *Систему Σ назовем идентифицируемой, если оператор восстановления $L_{t_1} : L_2 \to C$ однозначен и непрерывен.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для однозначности оператора восстановления необходимо и достаточно, чтобы множество Λ^0 было пусто.*

Рассмотрим случай, когда множество $\Lambda^0 \neq \varnothing$ и состоит из конечного числа $\lambda \in \Lambda$. Введем в рассмотрение матрицы $Z(\lambda) = G + \sum_{i=1}^{m} G_i e^{-\lambda h_i}$; $Z_{j+1} = \frac{Z^{j+1}(\lambda)}{j!}$, постоянную матрицу $N_k = N_k(\lambda)$ имеющую вид $N_k = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_k \\ 0 & Z_1 & \dots & Z_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_1 \end{bmatrix}$. Обозначим через $P_\lambda^0 \subseteq P_\lambda$-множество функций (4), коэффициенты γ_j которых удовлетворяют алгебраическому уравнению $N_k(\lambda)\gamma = 0$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть P^0-линейная оболочка пространств P_λ^0. Для того, чтобы P^0 было конечномерным и совпадало с $\{x_{t_1}\}_0$-линейным многообразием текущих состояний x_{t_1}, совместимых с нулевым выходом при $t_1 \geq (n+1)h$, необходимо и достаточно, чтобы множество Λ^0 было конечным.*

Пусть множество Λ^0 конечно. Поскольку оператор сдвига $T(t)$ системы Σ вполне непрерывен и при $t \geq (n+1)h$ имеет обратный, то из конечномерности многообразия P^0 следует его замкнутость. Факторизуем пространство C по P^0 [2,3] и рассмотрим задачу идентификации в факторизованном пространстве. Фактор-пространство $F = C/P^0$ состоит из классов смежности $\widetilde{\psi} = \{\varphi + z\}, \varphi \in P^0, z \in C$. Два класса $\widetilde{\psi}$ и $\widetilde{\xi}$ равны, если $\widetilde{\psi} - \widetilde{\xi} \in P^0$. Отметим, что фактор-пространство F банахово относительно нормы $\|\widetilde{\psi}\|_F = \inf_{\varphi \in P^0} \|\varphi + z\|_C$.

Определим линейный оператор $\widetilde{L}_{t_1} : L_2 \to F$ по формуле: $\widetilde{L}_{t_1} y = L_{t_1} y$.

О п р е д е л е н и е 2. *Систему* Σ *назовем с- идентифицируемой (class-идентифицируемой)* [2], *если многообразие* P^0 *конечномерно.*

Пусть $k(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda)A_1 & D(\lambda)A_2 & \dots & D(\lambda)A_{m-1} & D(\lambda)A_m \\ \Delta(\lambda)E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(\lambda)E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta(\lambda)E & 0 \end{bmatrix}$ -$(mn \times mn)$-матрица,

$C(\lambda) = [GD(\lambda)A_1 + G_1\Delta(\lambda), GD(\lambda)A_2 + G_2\Delta(\lambda), \dots, GD(\lambda)A_m + G_m\Delta(\lambda)]$ - $(l \times mn)$ -матрица.

Определим матрицы $C^0(\lambda) = \mathrm{col}[C(\lambda), C(\lambda)k(\lambda), \dots, C(\lambda)k^{m-1}(\lambda)]$, $K(\lambda) = k^m(\lambda)$, $L_n(\lambda) = \mathrm{col}[C^0(\lambda), C^0(\lambda)K(\lambda), \dots, C^0(\lambda)K^{n-1}(\lambda)]$.

Параметрический критерий c-идентифицируемости системы Σ доставляет следующая

Т е о р е м а 2. *Условие*

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} L_n(\lambda) \\ K^n(\lambda) \end{bmatrix} = \mathrm{rank} L_n(\lambda), \text{ для почти всех } \lambda \in K, \quad (5)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы система Σ *была с-идентифицируемой.*

Далее в докладе приводится граничная задача для восстановления текущего состояния в предположении, что система Σ является c-идентифицируемой.

Литература 1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 2. Метельский А. В. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28, №11. С. 1969-1976. 3. Метельский А. В. // Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31, №8. С.1353-1360.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ САМОДИФФУЗИИ И ЯМР-РЕЛАКСАЦИИ