Теорема 3. Если выполнены условия: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, 2) $E_\varepsilon x=0$, где $E_\varepsilon=\int_0^\varepsilon dE_\lambda$, $0<\varepsilon<\|A\|$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме пространства H.

ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Харкович А.П., БГТУ, Брест

Осциллятором называют физическую систему, совершающую колебания. Понятие осциллятора играет важную роль в теории электромагнитного излучения, в теории колебания спектров молекул, в теории твёрдого тела.

Рассмотрим классический осциллятор – механическую систему, совершающую колебательные движения около положения равновесия. Получим дифференциальное уравнение такой системы, решим его, найдём кинетическую, потенциальную и полную энергию осциллятора.

Пусть колебательная система представляет частицу массой m, совершающую колебания вдоль оси Ox около положения равновесия O под действием силы $\bar{F}$, которая пропорциональна отклонению x от положения равновесия O и направленной к этому положению, т. е.

$$F=-k\cdot x,$$

где $k>0$ – коэффициент пропорциональности.

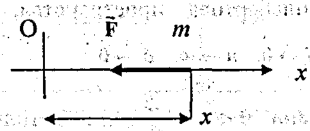


Рис. 1

На основании второго закона Ньютона

$$m x''=-k\cdot x$$

или

$$x''+\omega^2 x=0, \tag{1}$$

где $\omega^2=\dfrac{k}{m}>0$.

Так как уравнение (1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, то колебательная система, описываемая этим уравнением, называется *линейным гармоническим осциллятором.*

Найдём общее решение уравнения (1). Так как корни характеристического уравнения $\lambda^2+\omega^2=0$ равны $\lambda_1=i\omega$ и $\lambda_2=-i\omega$, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{2}$$

Решение (2) можно представить вначале в виде

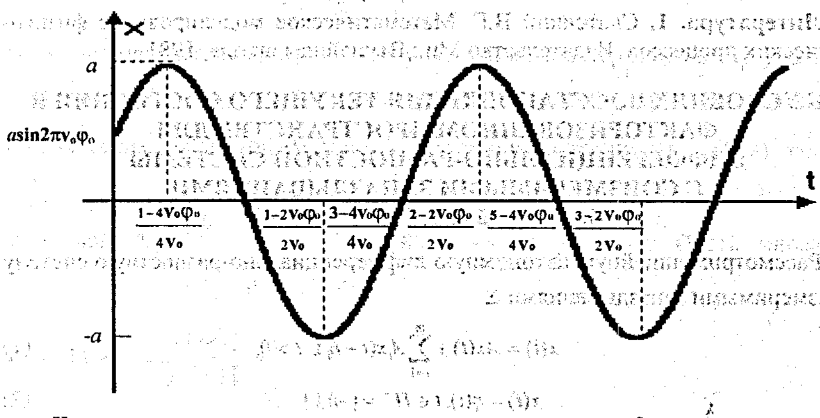
$$x = a\sin(\omega t + \varphi),$$

где a – амплитуда, ω – частота, φ – начальная фаза, а затем с учётом периодичности функции $\sin(\omega t + \varphi)$

$$x = a\sin 2\pi\nu_o(t + \varphi_o), \tag{3}$$

где $\nu_o = \dfrac{\omega}{2\pi}, \varphi_o = \dfrac{\varphi}{2\pi\nu_o}$

Построим график решения (3)



Частица проходит через положение равновесия x=0 в момент времени $t = \dfrac{n-2\nu_o\varphi_o}{2\nu_o}$, а крайние положения $x = \pm a$ при $t = \dfrac{1-2n-4\nu_o\varphi_o}{4\nu_o}$

Найдём кинетическую, потенциальную и полную энергии системы.

Так как скорость частицы $v = \frac{dx}{dt} = 2\pi v_o a\cos 2\pi v_o(t + \varphi_o)$

то кинетическая энергия

$$E_к = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{m}{2}4\pi^2 v_o^2 a^2\cos^2 2\pi v_o(t + \varphi_o).$$

Потенциальную энергию осциллятора найдем по формуле

$$E_п = -\int_0^x Fdu = \int_0^x kudu = k\frac{u^2}{2}\Big|_0^x = \frac{k}{2}x^2,$$

При $k = m\omega^2$ с учетом (3)

$$E_п = 2\pi a^2 v_o^2\sin^2 2\pi v_o(t + \varphi_o).$$

В точке равновесия ($x' = 0$) $E_п = 0$, а $E_к = 2\pi^2 a^2 v_o^2 m$, в точках $x = \pm a$, $E_к = 0$, $E_п = 2\pi^2 a^2 v_o^2 m$.

Полная энергия осциллятора $E = E_к + E_п = 2\pi^2 a^2 v_o^2 m$ постоянна в любой момент времени. При совершении колебательных движений происходит лишь преобразование кинетической энергии в потенциальную и потенциальной в кинетическую. Этот результат опровергает утверждение о том, что в точке равновесия $x = 0$ полная энергия осциллятора равна нулю, приведенное в [1] в качестве главного отличия линейного гармонического осциллятора от квантового.

Литература. 1. Скатецкий В.Г. Математическое моделирование физико-химических процессов. Издательство Мн.: Вышэйшая школа, 1981.

ОБ УСЛОВИЯХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ В ФАКТОРИЗОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Хартовский В.Е., ГрГУ, Гродно

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями Σ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i),\ t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), t \in H^- = [-h, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = Gx(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i x(t - h_i), t \in T = [0, t_1], \tag{3}$$

где $x - n$-вектор-столбец решения уравнения (1), ($n \geq 2$); $y - l$-вектор-столбец