- для линейно распределенной нагрузки: $w_p(x) = \frac{q_0 x}{\kappa}$.

Выражения для $\psi(x)$, $u(x)$ следуют из системы (2). Деформации выражаются через полученные функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$; напряжения определяются из закона Гука. Константы интегрирования следуют из граничных условий.

Численная реализация полученного решения проведена для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т и трехслойного пакета с металлическими несущими слоями и заполнителем различной жесткости. Величина нагрузки и относительные толщины слоев принимались таким образом, чтобы не выйти за пределы упругих деформаций.

Литература. 1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Государственное издательство физико-математической литературы (1960). **2.** Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Упругопластический изгиб трехслойного стержня // Материалы, технологии, инструменты (1997), № 2, 88-92. **3.** Яровая А. В. Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня в усло-виях абляции // Материалы, технологии, инструменты (2000), № 3, 23-25. **4.** Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель: БелГУТ (2001)

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ ГИБРИДНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Стельмах С.Н., БГУ, г. Минск

В работе рассматриваются системы трехточечных сеточных уравнений с разделенными граничными условиями вида:

$$G_0 y_0 + G_1 y_1 = \mu_0 \quad (1)$$

$$A_i^{(1)} y_{i-1} - C_i^{(1)} y_i + B_i^{(1)} y_{i+1} = -F_i^{(1)}, \qquad i \in I_{(0,p)}^{(1)} \quad (2.1)$$

$$A_i^{(2)} y_{i-1} - C_i^{(2)} y_i + B_i^{(2)} y_{i+1} = -F_i^{(2)}, \qquad i \in I_{(p,q)}^{(2)} \quad (2.2)$$

$$A_i^{(3)} y_{i-1} - C_i^{(3)} y_i + B_i^{(3)} y_{i+1} = -F_i^{(3)}, \qquad i \in I_{(q,N)}^{(3)} \quad (2.3)$$

$$G_{N-1} y_{N-1} + G_N y_N = \mu_N \quad (3)$$

где $I_{(k;t)}^{(s)} = \{i \mid k \le i \le t\}$ – множество индексов $(k=0,p,q,\ t=p,q,N)$; $A_i^{(s)}$, $C_i^{(s)}$, $B_i^{(s)}$,

H_k, G_k - заданные матрицы порядка М, $F_i^{(s)}, \mu_0, \mu_N$ - известные векторы порядка М. Предполагается, что $\det(A_i^{(s)} \cdot B_i^{(s)}) \neq 0$, $rang[G_0 | G_1] = rang[H_{N-1} | H_N] = M$. При этом на параметры исходной системы налагается ряд условий, соотнесенных к соответствующим $I_{(k,t)}^{(s)}$, в частности, предполагается, что: $C_i^{(1)} = C, B_i^{(1)} = A_i^{(1)} = E$ при $i \in I_{(0;p)}^{(1)}$, т.е. возможна реализация метода редукции на $I_{(0,p)}^{(1)}$; на $I_{(p,q)}^{(2)}$ подсистема (2.2) такова, что корректна реализация метода матричной прогонки; при $i \in I_{(q,N)}^{(3)}$ на (2.3) допускается эффективная реализация марш-алгоритма.

Обычно в случае однородных сред уравнения (2.1), (2.2), (2.3) по своим свойствам, т.е. по свойствам коэффициентов и правых частей на всем отрезке одинаковы. В случае неоднородных сред свойства коэффициентов $A_i^{(s)}$, $B_i^{(s)}$, $C_i^{(s)}$ на соответствующих подынтервалах могут существенно различаться. Чтобы наиболее эффективно использовать на каждом из подынтервалов соответствующие алгоритмы, необходимо решить проблему их конструктивного соединения, что является основным предметом исследований в этой работе и ниже приведено описание вычислительного алгоритма для решения системы (1), (2.s), (3), основанного на соединении вычислительных методов редукции, матричной прогонки и марш-алгоритма(РПМА)[1].

Для упрощения дальнейших выкладок выскажем следующие ограничения, в условиях (1), (3) положим $G_0 = H_N = E$, $G_1 = H_{N-1} = 0$.

Пусть как это должно быть в методе редукции $p = 2^m$. Рассмотрим уравнение в верхней точке прямого хода редукции после m—ого шага исключения[2]:

$$y_0 - S^{(m-1)} y_{p/2} + y_p = -T_p^{(m-1)} \tag{4}$$

где матрицы $S^{(m-1)}$ и векторы $T_p^{(m-1)}$ находятся из рекуррентных формул :

$$S^k=(S^{(k-1)})^2-2E,\quad k=1,2,\ldots,m-1,\qquad S^0=C \tag{5}$$

$$T_i^k=T^{(k-1)}_{i-2^{k-1}}+S^{(k-1)}T_i^{(k-1)}+T^{(k-1)}_{i+2^{k-1}},\quad k=1,2,\ldots,m-1,\ T_i^0=T_i \tag{6}$$

$i=2^k,\ 2\cdot 2^k,\ 3\cdot 2^k,\ldots,\ 2^m-2^k$.

Т.к. y_p – неизвестно, то обратный шаг метода редукции осуществить нельзя. Игнорируя этот факт, фиктивно находим левое граничное условие для метода матричной прогонки для $i\in I^{(2)}_{(p,q)}$ используя рекурсионное соотношение:

$$y_{p-p/2^{m-i}}=L_iy_p+D_i,\quad i=m-2,\ldots,1,0, \tag{7}$$

где

$$L_i=[S^{(i)}]^{-1}(L_{i+1}+E),\ L_{m-1}=[S^{(m-1)}]^{-1},$$

$$D_i=[S^{(i)}]^{-1}(D_{i+1}+T^{i}_{p-p/2^{m-i}}),\ D_{m-1}=[S^{(m-1)}]^{-1}(\mu_0+T^{(m-1)}_{p/2})$$

Из (7) при $i=0$ имеем левое граничное условие метода матричной прогонки для $i\in I^{(2)}_{(p,q)}$ в классическом виде[2]:

$$-C_{p-1}y_{p-1}+B_{p-1}y_p=-F_{p-1} \tag{8}$$

где $C_{p-1}=-E,\ B_{p-1}=-L_0,\ F_{p-1}=-D_0$.

Далее переносим граничное условие (8) методом прогонки в точки $q,\ q+1$:

$$-C_q^{(*)}y_q+B_q^{(*)}y_{q+1}=-F_q^{(*)} \tag{9}$$

где $C_q^{(*)}=E,\ B_q^{(*)}=\alpha_{q+1},\ F_q^{(*)}=\beta_{q+1}$, а α_{q+1},β_{q+1} находятся из реккурентных формул[2]:

$$\alpha_{i+1}=(C_i^{(2)}-A_i^{(2)}\alpha_i)^{-1}B_i^{(2)},\quad \alpha_p=[C_{p-1}]^{-1}B_{p-1} \tag{10}$$

$$\beta_{i+1}=(C_i^{(2)}-A_i^{(2)}\alpha_i)^{-1}(A_i^{(2)}\beta_i+F_i^{(2)}),\ \beta_p=[C_{p-1}]^{-1}F_{p-1},\ i=p,p+1,\ldots,q\ . \tag{11}$$

Модифицируем марш-алгоритм таким образом, чтобы стартовые значения в нем генерировались внутри подынтервала $I^{(3)}_{(q,N)}$ и сеточное решение для $i \in I^{(3)}_{(q,N)}$ определим по формулам[3]:

$$y_{i-1} = P_i^{(j)} y_j + Q_i^{(j)} y_{j+1} + R_i^{(j)},\ \ i = j, j-1, \ldots, q+2, q+1, \tag{12}$$

$$y_{i+1} = K_i^{(j)} y_j + L_i^{(j)} y_{j+1} + M_i^{(j)},\ \ i = j+1, j+2, \ldots, N-1, \tag{13}$$

где матрицы $P_i^{(j)}, Q_i^{(j)}, K_i^{(j)}, L_i^{(j)}$ и вектора $R_i^{(j)}, M_i^{(j)}$, определяются в [3].

Положим в (12) $i = q+1,\ q+2$ и подставим получившиеся значения для $y_q,\ y_{q+1}$ в (9). Положим также в (13) $i = N-1$ и подставим значение y_N в граничное условие (3). Таким образом, мы получим систему ЛАУ порядка 2М для определения векторов y_j и y_{j+1} :

$$a_{11}(j,q) y_j + a_{12}(j,q) y_{j+1} = b_1(j,q), \tag{14}$$

$$a_{21}(j,N) y_j + a_{22}(j,N) y_{j+1} = b_2(j,N), \tag{15}$$

где $a_{11}(j,q) = -C_q^{(*)} P_{q+1}^{(j)} + B_q^{(*)} P_{q+2}^{(j)}$, $a_{12}(j,q) = -C_q^{(*)} Q_q^{(j)} + B_q^{(*)} Q_{q+2}^{(j)}$,

$$b_1(j,N) = -F_q^{(*)} + C_q^{(*)} R_{q+1}^{(j)} - B_q^{(*)} R_{q+2}^{(j)},\ a_{21}(j,N) = K_{N-1}^{(j)},\ a_{22}(j,N) = L_{N-1}^{(j)},$$

$$b_2(j,N) = \mu_N - M_{N-1}^{(j)}.$$

Предположим, что $det[(a_{ij})] \neq 0$, тогда система ЛАУ (14),(15) имеет единственное решение y_j, y_{j+1} , которое является решением задачи (1),(2.s),(3).

Далее по формулам (12),(13) находим решение для $i \in I^{(3)}_{(q,N)}$. Решение на $I^{(2)}_{(p,q)}$ находим по методу разностной прогонки по уже известным граничным условиям. Затем т.к. на подынтервале $I^{(1)}_{(0,p)}$ известны крайние условия $y_0 = \mu_0$, $y_p = y_p^*$ (y_p^* найдено по методу прогонки) осуществляем обратный ход метода редукции и, таким образом, находим решение задачи (1), (2.s), (3).

Следует отметить, что описанный гибридный метод особенно эффективен в случае, когда $p >> q - p >> N - q$. Универсальность метода заключается в том, что процедуры, описанные в работе естественно индуцируются и на те случае, когда число подынтервалов болеше трех, а в случае неустойчивости классических схем методов редукции и матричной прогонки могут быть реализованы методы множественной редукции и множественного марш-алгоритма[3].

Литература. 1. Монастырный П.И. Доклады АН Беларуси. 2000 Т 44, №1 – С. 35-38. **2.** Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы – М.: Наука, 1989. **3.** Монастырный П.И., Азаров А.И., Артюгин В.Г. Доклады АН Беларуси. 1991. Т . 35 , № 12 – С. 1065-1068

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Стрилец Н. Н., БрГУ, Брест

Рассматривается периодическая краевая задача Дуффинга [1]:

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) + x^3(t) = 50\cos t,$$
$$x(0) - x(2\pi) = 0, \ \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0.$$

Достаточно популярным для решения такого типа задач является конечно-разностный метод.

Суть его заключается в том, что решение краевой задачи в результате дискретизации и замены производных их разностными аналогами (например, по методу неопределенных коэффициентов [2]) сводится к решению системы нелинейных уравнений. Полученную систему, как правило, решают одним из сверхлинейных квазиньютоновских итерационных методов 2-го порядка [3]. Однако здесь в процессе приближения к решению может наблюдаться разболтка. Поэтому на практике хорошо себя зарекомендовала следующая схема: просчет сначала ведут методом 2-го порядка до точности 10^{-2}, а затем подключают метод 3-го порядка [4].

Для оценки эффективности полученного из нелинейной системы сеточного решения его обычно восстанавливают в аналитическом виде с последующей подстановкой в исходную дифференциальную задачу. Всюду далее под эффективностью будем понимать малость нормы невязки на восстановленном приближенном решении. При этом эффективность оценки приближенного решения