

$$+ \sum_{\substack{T-1 \\ i_1, i_2}} \exp \left\{ i \left( \sum_{j=1}^T (X_a(t_1+j) - X_a(t_1+(j-1)) + X_a(t_2+j) - X_a(t_2+(j-1))) \right) \right\}.$$

Сгруппировав попарно в показателе степени  $j$ -го слагаемого полученные разности, учитывая свойства математического ожидания, приходим к доказательству теоремы

**Литература.** 1. J. Nowicka, A. Weron Measures of dependence for ARMA models with stable innovations. Annales universitatis Mariae Curie. VOL. L I. 1.14. 1997. p. 133.

### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

*Старовойтов С. А., БГУТ, г. Гомель*

Слоистые элементы относятся к классу технологичных, широко распространенных в промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение, строительство) деталей конструкций. Это обуславливает необходимость предварительного проектного расчета, создание методик, позволяющих исследовать НДС трехслойных элементов.

Рассматривается упругий несимметричный по толщине трехслойный стержень длины  $l$ , лежащий на упругом основании Винклера [1]. На внешние слои стержня действуют распределенная силовая нагрузка  $q_0(x)$  и реакция упругого основания  $q_T(x)$ .

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(x)$ . Материалы всех слоев считаются несжимаемыми в поперечном направлении. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительноному сдвигу слоев.

В работах [2], [3] было исследовано напряженно-деформированное состояние трехслойного металлополимерного стержня, находящегося под комплексным термосиловым воздействием. В данной работе рассматривается напряжен-

но-деформированное состояние подобного стержня, лежащего на упругом основании, под действием распределенной нагрузки.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия получены с использованием вариационного метода Лагранжа:

$$\delta A + \delta W = 0, \quad (1)$$

где  $\delta A$ ,  $\delta W$  – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений:

$$\delta A = \iint_S (p \delta u + q \delta w) dS = b \int_0^l (p \delta u + q \delta w) dx;$$

$$\delta W = - \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta k_3) dz dS;$$

где  $\delta_{k3}$  – символы Кронекера.

Внутренние силовые факторы, входящие в вариации работ, выражаются через три линейно независимые функции  $u(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $w(x)$  – тангенциальное перемещение, сдвиг и прогиб срединной плоскости заполнителя. В результате следует система линейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} = 0;$$

$$a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi = 0;$$

$$a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} + a_7 w_{,xxx} = q_0(x) + q_r, \quad (2)$$

где  $u(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $w(x)$  – искомые функции;  $a_1, \dots, a_7$  – коэффициенты, зависящие от свойств материалов и геометрических параметров слоев стержня;  $q_r$  – реакция упругого основания ( $k$  – коэффициент постели):  $q_r = -kw$ .

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Принимаем граничные условия для стержня:

- заземленного с двух сторон: при  $x = 0, l$   $w = w_{,x} = u = \psi = 0$ ;

- шарнирно опертого по краям: при  $x = 0, l$   $M = w = u = \psi = 0$ .

Из системы (2) получено дифференциальное уравнение для определения прогиба стержня:

$$\alpha_1 w_{,xxxxx} + \alpha_2 w_{,xxxx} + \alpha_3 w_{,xx} + \alpha_4 w = f(x), \quad (3)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  – коэффициенты, определяющиеся через  $a_1, \dots, a_7$ ;  $f(x)$  – функция, зависящая от вида внешней нагрузки.

Решение уравнения (3) можно представить в виде:

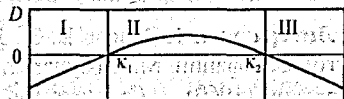
$$w(x) = w_0(x) + w_p(x). \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для каждого  $w_0(x)$ :

$$\alpha_1 \lambda^5 + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_4 = 0. \quad (5)$$

Если в качестве материала несущих слоев принять сплав Д16Т, а материал заполнителя – фторопласт [4], то получим, что дискриминант  $D$  уравнения (5)

два раза меняет знак в зависимости от значения коэффициента постели  $k$



(рисунок 1). Границы областей решения при этих стандартных условиях разделены на три области:

Рисунок 1

I – при  $0 < k < 3,1 \cdot 10^7$  Па/м – легкие основания;

II – при  $k_1 = 3,1 \cdot 10^7$  Па/м  $< k < k_2 = 6,4 \cdot 10^8$  Па/м – основания средней жесткости;

III – при  $k > k_2 = 6,4 \cdot 10^8$  Па/м – жесткие основания.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (3), при  $D < 0$  можно записать в виде:

$$w_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot x} + C_3 e^{\lambda_3 \cdot x} + C_4 e^{\lambda_4 \cdot x} + C_5 e^{\lambda_5 \cdot x} + C_6 e^{\lambda_6 \cdot x},$$

В случае  $D > 0$  общее решение однородного уравнения принимаем в виде:

$$w_0(x) = C_1 e^{\lambda_{31} \cdot x} + C_2 e^{\lambda_{32} \cdot x} + C_3 e^{\lambda_{31} \cdot x} \cdot \cos(\lambda_{32} \cdot x) + C_4 e^{\lambda_{41} \cdot x} \cdot \sin(\lambda_{42} \cdot x) + C_5 e^{\lambda_{51} \cdot x} \cdot \cos(\lambda_{52} \cdot x) + C_6 e^{\lambda_{61} \cdot x} \cdot \cos(\lambda_{62} \cdot x),$$

где  $C_1, \dots, C_6$  – константы интегрирования.

Частное решение уравнения (2) принимаем в зависимости от типа распределенной нагрузки:

- для равномерно распределенной нагрузки:  $w_p = \frac{q_0}{k}$ ;

(1) - для линейно распределенной нагрузки:  $w_p(x) = \frac{q_0 x}{k}$ .

Выражения для  $\psi(x)$ ,  $u(x)$  следуют из системы (2). Деформации выражаются через полученные функции  $u(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $w(x)$ ; напряжения определяются из закона Гука. Константы интегрирования следуют из граничных условий.

Численная реализация полученного решения проведена для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т и трехслойного пакета с металлическими несущими слоями и наполнителем различной жесткости. Величина нагрузки и относительные толщины слоев принимались таким образом, чтобы не выйти за пределы упругих деформаций.

**Литература.** 1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Государственное издательство физико-математической литературы (1960). 2. Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Упругопластический изгиб трехслойного стержня // *Материалы, технологии, инструменты* (1997), № 2, 88-92. 3. Яровая А. В. Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня в условиях абляции // *Материалы, технологии, инструменты* (2000), № 3, 23-25. 4. Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель: БелГУТ (2001)

### О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ ГИБРИДНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

© Стельмах С.Н., БГУ, г. Минск

В работе рассматриваются системы трехточечных сеточных уравнений с разделенными граничными условиями вида:

$$G_0 y_0 + G_1 y_1 = \mu_0 \quad (1)$$

$$A_i^{(1)} y_{i-1} - C_i^{(1)} y_i + B_i^{(1)} y_{i+1} = -F_i^{(1)}, \quad i \in I_{(0,p)}^{(1)} \quad (2.1)$$

$$A_i^{(2)} y_{i-1} - C_i^{(2)} y_i + B_i^{(2)} y_{i+1} = -F_i^{(2)}, \quad i \in I_{(p,q)}^{(2)} \quad (2.2)$$

$$A_i^{(3)} y_{i-1} - C_i^{(3)} y_i + B_i^{(3)} y_{i+1} = -F_i^{(3)}, \quad i \in I_{(q,N)}^{(3)} \quad (2.3)$$

$$G_{N-1} y_{N-1} + G_N y_N = \mu_N \quad (3)$$

где  $I_{(k,t)}^{(s)} = \{i | k \leq i \leq t\}$  – множество индексов ( $k=0, p, q, t=p, q, N$ );  $A_i^{(s)}, C_i^{(s)}, B_i^{(s)}$ ,