РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ SM/MSP/1 С MAP-ПОТОКОМ СБОЕВ

Семенова О.В., БГУ, Минск

Модели управляемых систем массового обслуживания с потоком катастрофических сбоев позволяют учесть особенности потоков информации в современных информационных сетях: разноприоритетность и потребность обеспечения высокого качества обработки приоритетных потоков; ненадежность работы сети и возможность потери части информации при сбоях в системе. Частный случай таких систем есть системы с несколькими режимами работы [1-2]. Выбор режима работы происходит в соответствии с некоторой стратегией (например, одно-, многопороговой или гистерезисной) с целью минимизации экономического критерия качества, оценивающего эффективность работы системы.

Сбои, происходящие в реальных системах массового обслуживания, в том числе и сетях связи, нарушают их работу и, в частности, приводят к потере нескольких или всех запросов. Сбои, вызывающие потерю всех запросов в системе, (disasters) являются важным частным случаем так называемого отрицательного запроса, понятие которого в 1991 году ввел Э. Геленбе [3]. Список работ по исследованию систем с отрицательными запросами и со сбоями можно найти в [3-6].

Марковский процесс обслуживания (MSP) является обобщением обслуживания фазового типа. Система G/MSP/1/r с конечным и бесконечным буфером исследована в [7].

Математическая модель

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченным буфером и потоком катастрофических сбоев.

Система имеет n режимов работы, $n \geq 2$. Работа системы в k-м режиме определяется следующим образом. Процесс поступления запросов – SM (Semi-Markovian), задаваемый полумарковским процессом $\nu_t, t \geq 0$ с пространством состояний $\{1,...,W\}$ и полумарковским ядром $A^{(k)}(t)=\left\|A_{v,v'}^{(k)}(t)\right\|_{v,v'=\overline{1,W}}$. Моменты поступления запросов в систему есть моменты изменения состояний процесса $v_t, t\geq 0$.

Процесс поступления сбоев – MAP-поток (Markov Arrival Process), задаваемый цепью Маркова $\eta_t, t\geq 0$ с непрерывным временем, пространством состояний $\{0,..., N\}$ и матричной производящей функцией $F^{(k)}(z)=F_0^{(k)}+zF_1^{(k)}, |z|\leq 1$.

Подробное описание MAP-потока, как частного случая BMAP-потока, дано в работе Лукантони [8]. Полагаем, что приход сбоя в систему вызывает немедленный уход из системы всех запросов, включая обслуживаемый запрос.

Процесс обслуживания запросов – MSP (Markovian Service Process). Он управляется цепью Маркова $m_t, t\geq 0$ с непрерывным временем, пространством состояний $\{0,..., M\}$ и матричной производящей функцией $B^{(k)}(z)=B_0^{(k)}+B_1^{(k)}z$, $k=\overline{1,n}$. Описание MSP-процесса обслуживания запросов приведено в [7].

Поток запросов может изменять свой режим только в моменты поступления запросов. Для управления входящим потоком используется многопороговая стратегия, определяемая следующим образом. Фиксируется набор порогов $(j_1, j_2,..., j_{n-1})$, причем $-1=j_0<j_1\leq j_2\leq ...\leq j_{n-1}<j_n=\infty$. Если число запросов в системе в данный момент прихода запроса удовлетворяет неравенству $j_{k-1}+1\leq i\leq j_k$, запросы будут поступать в соответствии с k-м режимом, $k=\overline{1,n}$.

Распределение времени ожидания в системе

Пусть $(j_1, j_2,..., j_{n-1})$ – фиксированный набор порогов. Будем рассматривать поведение системы в моменты поступления запросов в систему. Обозначим через $\vec{\pi}_i$ вектор стационарных вероятностей того, что в данный момент поступления в системе находится i запросов, $i\geq 0$.

Обозначим через $dW_i^{(k)}(x)$ матрицу, элементы которой имеют следующий вероятностный смысл: время обслуживания i запросов, находящихся в системе в данный момент поступления запроса будет лежать в интервале $(x, x+dx)$, при условии, что в этот момент в системе находится k запросов, $1 \le i \le k+1$. Пусть $\widetilde{W}_i^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dW_i^{(k)}(x)$, $\operatorname{Re} s > 0$.

Теорема. Преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения времени ожидания в системе $T(s)$ определяется следующим образом:

$$T(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \vec{\pi}_l \widetilde{W}_l^{(l)}(s), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

где $\widetilde{W}_l^{(l)}(s), l \ge 1$ есть компоненты векторов $\widetilde{W}_l(s) = (\widetilde{W}_l^{(l)}(s), \widetilde{W}_l^{(l+1)}(s), \ldots)^T, l \ge 1$, определяемых из рекуррентных соотношений

$$\widetilde{W}_1(s) = \Delta_0(s) u_0(s),$$

$$\widetilde{W}_{i+1}(s) = \Delta_i(s)\left[\sum_{k=1}^{i} G_{i-k+1}^{(i)}(s)\widetilde{W}_k(s) + u_i(s)\right], i \ge 1,$$

$$\Delta_i(s) = \begin{pmatrix} I & \Delta_{12}^{(i)}(s) & \Delta_{13}^{(i)}(s) & \Delta_{14}^{(i)}(s) & \cdots \\ O & I & \Delta_{23}^{(i)}(s) & \Delta_{24}^{(i)}(s) & \cdots \\ O & O & I & \Delta_{34}^{(i)}(s) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$G_k^{(l)}(s) = \begin{pmatrix} I & -G_1^{(k,l)}(s) & O & O & \cdots \\ O & I & -G_2^{(k,l)}(s) & O & \cdots \\ O & O & I & -G_3^{(k,l)}(s) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, k \ge 1,$$

$$u_i(s) = (u_1^{(i)}(s), u_2^{(i)}(s), u_3^{(i)}(s), \ldots)^T, i \ge 0,$$

элементы матриц $\Delta_i(s), G_k^{(i)}(s), k \ge 1$ и векторов $u_i(s), i \ge 0$ задаются формулами

$$\Delta_{m m+k}^{(i)}(s) = \prod_{l=1}^{k} G_{m+l-1}^{(0,l)}(s), m, k \ge 1,$$

$$\begin{cases} G_l^{(k,i)}(s) = X_k^{(\nu)}(s), & u_l^{(i)}(s) = Q_l^{(\nu)}(s), & l = \overline{1, j_\nu - i}, \\ G_l^{(k,i)}(s) = X_k^{(\nu+1)}(s), & u_l^{(i)}(s) = Q_l^{(\nu+1)}(s), & l = \overline{j_\nu - i + 1, j_{\nu+1} - i}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_l^{(k,i)}(s) = X_k^{(n)}(s), & u_l^{(i)}(s) = Q_l^{(n)}(s), & l > j_{n-1} - i, \end{cases}$$

$k \ge 0$, $j_{\nu-1} + 1 \le i \le j_\nu$,

$$Q_l^{(\nu)}(s) = V_l^{(\nu)}(s)(B_1^{(\nu)} \otimes I_{(N+1)W}) + \sum_{l=0} V_l^{(\nu)}(s)(I_{M+1} \otimes F_1^{(\nu)} \otimes I_W), i \ge 0, \nu = \overline{1, n},$$

а матрицы $X_i^{(v)}(s), V_i^{(v)}(s), i \geq 0, v = \overline{1,n}$ есть коэффициенты матричных разложений

$$\sum_{i=0}^{\infty} X_i^{(v)}(s) z^i = \int_0^{\infty} e^{B^{(v)}(z)t} \otimes e^{F_0^{(v)}t} e^{-st} \otimes (A^{(v)}(\infty) - A^{(v)}(t))dt;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{(v)}(s) z^i = \int_0^{\infty} e^{B^{(v)}(z)t} \otimes e^{F_0^{(v)}t} e^{-st} \otimes dA^{(v)}(t), v = \overline{1,n}, \operatorname{Re} s > 0.$$

Литература. 1. Dudin A.N., Nishimura S., Optimal control for a BMAP/G/1 queue with two service modes // Math. Probl. Engin. – 1999. – Vol. 5. – P. 255–273. **2.** Dudin A.N., Klimenok V.I., Optimal admission control in a queueing system with heterogeneous traffic // Operations Research Letters. – 2003. – Vol. 31. – P. 108–118. **3.** Gelenbe E., Product form networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 655–663. **4.** Artalejo J., G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks // Eur. J. Oper. Res. – 2000. – Vol. 126. – P. 233–249. **5.** Dudin A.N., Nishimura S., A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival of disasters // J. Appl. Prob. – 1999. – Vol. 36., № 3. – P. 868–881. **6.** Dudin A.N., Karolik A.V., BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Performance Evaluation. – 2001. – V. 45. – P. 19–32. **7.** Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Печинкин А.В., Салерно С. Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/1/r // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №2. – С. 127 – 142. **8.** Lucantoni D.M., New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Commun. Stat. Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ИНТЕРВАЛЫ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ВЫПЛАТ ИМЕЮТ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Семенчук Н.В., ГрГУ, Гродно.

Рассматривается задача нахождения вероятности разорения страховой компании в случае, когда интервалы между выплатами имеют показательные распределения, а величины выплат одинаково распределены, и имеют произвольное распределения. В качестве частного случая рассмотрен случай, когда величины выплат имеют показательное распределение. Для нахождения вероятности разорения страховой компании используются комбинаторные методы.

Пусть $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_i, ...$ – размеры выплат в момент τ_i – взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$, а $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_i, ...$ – моменты наступления событий данного пуассоновского процесса. Случайные величины $\{\chi_i\}$ и $\{\tau_i\}$ независимы. Кроме того,