Литература. 1. В. Э. Лесневский. // Докл. НАН Беларуси. 44-4 (2000), с.34-36. 2. N. Lazakovich, V. Lesnevski, S. Stashulenok. // J. Electrotehn. Math. Vol. 6, No. 1, (2001), 1-28. 3. Е. Б. Розин. Тез. докл. международн. мат. конф. "Еругинские чтения-IX." Витебск, 2003. с.125-126

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ В ОЧЕРЕДЯХ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СТРАХОВАНИЯ

Романюк Т.В., ГрГУ, г. Гродно

Пусть страховая компания, состоящая из $n-1$ отдела и центрального отделения, в котором производится расчет, заключила со страхователями K разнотипных договоров страхования: K_i договоров i-о типа, $i=\overline{1,n-1}$, $\sum_{i=1}^{n-1} K_i = K$. Иск при предъявлении проходит две стадии обработки – стадию оценки в соответствующем типу иска отделе и стадию выплаты в центральном отделении. Оценкой исков в i-м отделе занимаются m_i сотрудников компании (оценщиков), $i=\overline{1,n-1}$; выплатой – m_n сотрудников. Предположим, что вероятность предъявления иска типа i в i-й отдел на интервале времени $[t;t+\Delta t]$ равна $\mu_{0i}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, где $\mu_{0i}(t)$ – кусочно-постоянная функция времени с двумя интервалами постоянства, характеризующая интенсивность поступления исков:

$$\mu_{0i}(t) = \begin{cases} \mu_{0i}, & t \in [0,T/2], \\ \mu_{0i}^{*}, & t \in (T/2,T]. \end{cases}$$

Времена обработки исков оценщиками в i-м отделе и времена их обработки сотрудниками в центральном отделении распределены по показательному закону со средним значением μ_i^{-1}, $i=\overline{1,n-1}$, и μ_n^{-1} соответственно. В некоторых случаях оценка исков типа i может быть осуществлена в одном из $n-2$-х непрофильных отделов, например при наличии очереди в i-м отделе некоторые из страхователей могут предъявить иски для оценки в менее нагруженные отделы, осуществляющие оценку исков смежного типа. Поэтому предположим, что суммарное время пребывания страхователя, подающего иск, в очереди i-о отдела и время, необходимое ему для обращения в другой отдел, распределено также по показательному закону с параметром ν_i, т.е. страхователь не дождавшись обслуживания в i-м отделе с вероятностью q_{ij} предъявляет иск в j-й отдел, $i,j=\overline{1,n-1}$.

Состояние компании в момент времени t можно описать вектором $k(t)=(k_1(t),k_2(t),...,k_n(t))$, где $k_i(t)$ и $k_n(t)$ – число исков, находящихся соответственно в i-м отделе, $i=\overline{1,n-1}$, и центральном отделении. Качество функционирования компании (средние затраты компании на интервалах времени $[0,T/2]$ и $(T/2,T]$ соответственно) можно описать функционалом

$$W(T)=W(T,m_1,...,m_n)=\frac{1}{T}\int_0^T\left[K\sum_{i=1}^{n}(d_in_i(t)+E_il_i)\right]dt, \qquad (1)$$

где d_i, E_i – стоимостные коэффициенты; $n_i(t)=M\left\{\frac{k_i(t)}{K}\right\}$, $l_i=\frac{m_i}{K}$, $i=\overline{1,n}$. Нас будет интересовать задача определения числа оценщиков исков на интервалах времени $[0,T/2]$ и $(T/2,T]$, минимизирующего средние затраты (1) при ограничениях на среднее число исков, находящихся на стадиях обработки.

Вероятностной моделью процесса обработки исков может служить замкнутая сеть МО с ограниченным временем ожидания заявок (исков) в очередях [1], состоящая из центральной СМО S_n (центральное отделение), $n-1$ периферийной СМО $S_1,S_2,...,S_{n-1}$ (отделы оценки) и системы S_0, соответствующей внешней среде (источник поступления исков), $m_0=K$. Вероятности переходов заявок между СМО следующие: $p_{0i}=1$ для заявок типа i, $p_{in}=p_{n0}=1$, $i=\overline{1,n-1}$, $p_{ij}=0$ в остальных случаях; $q_{ij}\neq 0$, $i\neq j$, $\sum_{j=1}^{n-1}q_{ij}=1$, $i,j=\overline{1,n-1}$, $q_{ij}=0$ в иных случаях. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Плотность распределения вероятностей вектора относительных переменных* $\xi(t)=\left(\frac{k_1(t)}{K},\frac{k_2(t)}{K},...,\frac{k_n(t)}{K}\right)$ *удовлетворяет с точностью* $O(\varepsilon^2)$, *где* $\varepsilon=\frac{1}{K}$, *уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова*

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i(x)p(x,t)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(B_{ij}(x)p(x,t)\right), \tag{2}$$

где $$A_i(x) = \sum_{j=1}^{n}[\mu_j p_{ji}^{*} \min(l_j, x_j) + (x_j - l_j)\nu_j q_{ji}^{*} u(x_j - l_j)] + \mu_{0i}(t)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right), \tag{3}$$

$$p_{ji}^{*} = \begin{cases} -1 + p_{ii},\ i = j,\ i,j = \overline{1,n}, \\ 1,\ i \neq j,\ i = n, \\ 0,\ i \neq j,\ i = \overline{1,n-1}; \end{cases} \qquad q_{ji}^{*} = \begin{cases} -1 + q_{ii},\ i = j,\ j \neq n \\ q_{ji},\ i \neq j,\ i,j \neq n, \\ 0,\ i = n \text{ или } j = n; \end{cases}$$

$$B_{ii}(x) = \sum_{j=1}^{n}[\mu_j p_{ji}^{*} \min(l_j, x_j) + (x_j - l_j)\nu_j q_{ji}^{*} u(x_j - l_j)] + \mu_{0i}(t)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

$$B_{ij}(x) = -2\mu_i p_{ij} \min(l_i, x_i) - 2(x_i - l_i)\nu_i q_{ij} u(x_i - l_i).$$

Из уравнения (2), как показано в [3], следует, что математические ожидания компонент вектора $n(t) = \left(n_1(t), n_2(t), \ldots, n_n(t)\right)$ с той же точностью определяются из системы уравнений

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = A_i(n(t)) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}[\mu_j p_{ji}^{*} \min(l_j, n_j(t)) + (n_j(t) - l_j)\nu_j q_{ji}^{*} u(n_j(t) - l_j)] + \mu_{0i}(t)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} n_k(t)\right), \tag{4}$$

$i = \overline{1,n}$. Правые части уравнений (4) являются кусочно-разрывными функциями. С помощью разбиения фазового пространства можно определить явную форму системы (4) в областях непрерывности ее правой части:

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum\nolimits_0 [\mu_j p_{ji}^{*} l_j + (n_j(t) - l_j)\nu_j q_{ji}^{*}] + \sum\nolimits_1 \mu_j p_{ji}^{*} n_j(t) + \mu_{0i}(t)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} n_k(t)\right), \tag{5}$$

где $\sum_0 = \sum_{j \in \Omega_0(t)}$; $\sum_1 = \sum_{j \in \Omega_1(t)}$; $\Omega_0(t) = \{j : l_i < n_i(t) \leq 1\}$, $\Omega_1(t) = \{j : 0 \leq n_j(t) \leq l_j\}$ – непересекающиеся множества индексов компонент вектора $n(t)$.

Например, при $n = 3$ в области $A_1 : \Omega_0(t) = \{1,2\}$, $\Omega_1(t) = \{3\}$, $t \in [0,T]$ общее решение системы (5) на полуинтервале $[0, T/2]$ имеет вид $\sum_{s,r=0}^{4} \alpha_{ijrs} l_r e^{-\alpha_{ijr} t}$, где $\alpha_{ij4} = 0$, $l_0 = 1$. Таким образом, поставленная выше задача определения числа оценщиков при существовании очередей в отделах по оценке на интервале времени $[0,T/2]$ может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} W_1(T,m_1,m_2,m_3)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2}\left[K\sum_{i=1}^{n}(d_i n_i(t)+E_i l_i)\right]dt \to \min_{m_1,m_2,m_3}, \\ \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} Kn_i(t)dt > m_i,\ i=1,2, \\ \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} Kn_3(t)dt \le m_3,\ t\in[0,T/2], \end{cases}$$

Функционал $W_1(T,m_1,m_2,m_3)$ представляет собой линейную функцию от $m_i = Kl_i$, $i=\overline{1,3}$, т.е. $W_1(T,m_1,m_2,m_3)=\sum_{j=0}^{4} g_j m_j$. Ограничения оптимизационных задач в свою очередь могут быть представлены в виде $\sum_{q,j=0}^{4} a_{jq} m_q > 0$, $i=\overline{1,3}$. На втором полуинтервале $(T/2,T]$ результаты имеют аналогичный вид. Таким образом, на каждом из рассматриваемых интервалов времени получаем задачу линейного программирования.

Литература. 1. Ковалев Е.А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях//Автоматика и вычислительная техника.– 1985.–№2.– С. 50-55. **2.** Матальщкий М.А., Романюк Т.В. Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения. Монография. – Гродно: ГрГУ, 2003. –200 с. **3.** М е д в е д е в Г. А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация// Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – №6. – С. 199-203.

АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЯ.

Русина Т.И., БГТУ, Брест

Проблемы теории стохастических дифференциальных уравнений связаны с проблемой умножения обобщенных функций. Такие уравнения содержат произведение обобщенных на недостаточно гладкие функции. В сообщении [1] анонсирована конструкция алгебры обобщенных случайных процессов, которая позволила с единых позиций исследовать решения стохастических уравнений различных классов (см. напр.[2, 3]) с помощью решений соответствующих уравнений в дифференциалах в этой алгебре. При этом исследование ассоциированных решений уравнений в дифференциалах сводится к исследованию