ми критериями являются трудоемкость, использование памяти, качество решения. Поэтому сравнение алгоритмов будем рассматривать в разрезе этих критериев [5,6].

Таблица 1. Сравнение алгоритмов

Алгоритм	Трудоёмкость	Память	Отклонение от оптимального значения, %
Ветвей и границ	$o(\sim 7n^2)$	$\sim(2n^3)$	0
Метод решения задачи коммивояжера, используя решение задачи о назначении (точный)	$o(\sim 10n^2)$	$\sim(2n^3)$	0
Метод решения задачи коммивояжера, используя решение задачи о назначении (приближенный)	$o(\sim n^2)$	$\sim(2n^2)$	10
Корреляционно-регрессионного анализа	$\sim o(n)$	n^2+3n	15

Анализируя данные в табл.1. видно, что алгоритмы предложенные ранее (ветвей и границ и точный алгоритм решения задачи коммивояжера, используя решение задачи о назначении), либо требуют использования большого объёма памяти порядка $\sim(2n^3)$ [5], либо имеют трудоёмкость большую в 7-10 раз.

При оценке алгоритмов по взаимоисключающим критериям не трудно понять, что идеального варианта быть не может.

Литература. **1.** Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., Задача коммивояжера. Точные методы // Автоматика и телемеханика. – М.: Наука, 1989. №10. с.3-29. **2.** Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. – М.: Наука, 1989. №11. с.3-26. **3.** Гимади Э. Х., Перепелица В. А., Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера, Сб. «Управляемые системы», Новосибирск, вып. 12, 1974, 35-45. **4.** Кристофидес Н., "Теория графов. Алгоритмический подход", М.: Мир, 1978. **5.** Гэри М., Джонсон Д., "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи" :пер. с англ. – М.:Мир, 1982.; ил. **6.** Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С КРАТНЫМИ ЯДРАМИ КОШИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

Пятницкий В. Ю., БГУ, Минск

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_{D^3}\frac{\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint\limits_{D^3} k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 = f(x_1,x_2,x_3), \qquad (1)$$

где $D^3=[-1,1]^3$, $(x_1,x_2,x_3)\in D^3$, $f(x_1,x_2,x_3)$ и $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ – заданные, $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ – искомая функции класса Гельдера по каждой переменной.

Как и в одномерном случае [1], решение уравнения (1) зависит от класса функций, в котором оно разыскивается. Пусть решение уравнения (1) принадлежит классу ограниченных в D^3 функций. Сделаем замену искомой функции: $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}u(x_1,x_2,x_3)$, где $u(x_1,x_2,x_3)$ – новая неизвестная функция.

Тогда уравнение (1) эквивалентно в смысле разрешимости уравнению Фредгольма

$$u(x_1,x_2,x_3)+\iiint\limits_{D^3} N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 = F(x_1,x_2,x_3), \qquad (2)$$

с присоединенными к нему необходимыми и достаточными условиями разрешимости: $(1\le k\le 3)$

$$\int_{-1}^{1}\left[f(x_1,x_2,x_3)-\frac{1}{\pi^3}\iiint\limits_{D^3} k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3\right]\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}=0, \qquad (3)$$

где функции $N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ и $F(x_1,x_2,x_3)$ известным образом [2] выражаются через заданные функции $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ и $f(x_1,x_2,x_3)$.

Построим алгоритм численного решения задачи (1), отличный от предложенного в [2], когда неизвестная функция $u(x_1,x_2,x_3)$ заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа. Известно, что если требуется получить приближенное решение с высокой степенью точности, то целесообразно искать его в виде линейной комбинации ортогональных многочленов, например, многочленов Чебышева.

Воспользуемся спектральным соотношением [3]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}U_n(t)}{t-x}dt=-T_{n+1}(x), \quad n=0,1,2,..., \qquad (4)$$

где $T_{n+1}(x)$ и $U_n(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Заменим заданные в (1) функции их интерполяционными многочленами специального вида, полученными на основании формул приближения функции одной переменной многочленами Чебышева, приведенной в [4]:

$$f(x_1,x_2,x_3)\approx f_N(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_1=0}^{N}\sum_{i_2=0}^{N}\sum_{i_3=0}^{N}T_{i_1}(x_1)T_{i_2}(x_2)T_{i_3}(x_3)f^*_{i_1,i_2,i_3},$$

$$f^*_{i_1,i_2,i_3}=\frac{\delta_{i_1}\delta_{i_2}\delta_{i_3}}{(N+1)^3}\sum_{p_1=0}^{N}\sum_{p_2=0}^{N}\sum_{p_3=0}^{N}T_{i_1}(\tau_{p_1})T_{i_2}(\tau_{p_2})T_{i_3}(\tau_{p_3})f(\tau_{p_1},\tau_{p_2},\tau_{p_3}), \tag{5}$$

$$k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\approx k_{N,N-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=\sum_{i_1=0}^{N}\sum_{i_2=0}^{N}\sum_{i_3=0}^{N}\sum_{j_1=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{N-1}T_{i_1}(x_1)\times$$

$$\times T_{i_2}(x_2)T_{i_3}(x_3)T_{j_1}(t_1)T_{j_2}(t_2)T_{j_3}(t_3)k^*_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_2,j_3}, \tag{6}$$

$$k^*_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_2,j_3}=\frac{\delta_{i_1}\delta_{i_2}\delta_{i_3}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\delta_{j_3}}{(N+1)^6}\sum_{p_1=0}^{N}\sum_{p_2=0}^{N}\sum_{p_3=0}^{N}\sum_{q_1=0}^{N-1}\sum_{q_2=0}^{N-1}\sum_{q_3=0}^{N-1}T_{i_1}(\tau_{p_1})\times$$

$$\times T_{i_2}(\tau_{p_2})T_{i_3}(\tau_{p_3})T_{j_1}(\theta_{q_1})T_{j_2}(\theta_{q_2})T_{j_3}(\theta_{q_3})k(\tau_{p_1},\tau_{p_2},\tau_{p_3},\theta_{q_1},\theta_{q_2},\theta_{q_3}),$$

где $\delta_{k_r}=\begin{cases}1, & k_r=0\\ 2, & k_r\neq 0\end{cases}$, $\tau_{p_r}=\cos\dfrac{2p_r-1}{2(N+1)}\pi$, $p_r=1,2,\ldots,N+1$, $\theta_{q_r}=\cos\dfrac{2p_r-1}{2N}\pi$, $q_r=1,2,\ldots,N$, $r=1,2,3$.

После замены входящих в уравнение (1) функций их интерполяционными многочленами (5) и (6), учитывая представление $\varphi(x_1,x_2,x_3)$, получим некоторое приближенное уравнение, которое, вообще говоря, может быть и неразрешимым. Поэтому приближенную задачу запишем в виде:

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_{D^3}\frac{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\,u_{N-1}(x_1,x_2,x_3)dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\iiint_{D^3}k_{N,N-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\times \tag{7}$$

$$u_{N-1}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3=f_N(x_1,x_2,x_3)+Q_1(x_3,x_3)+Q_2(x_1,x_3)+Q_3(x_1,x_2),$$

где $u_{N-1}(t_1,t_2,t_3)=\sum_{i_1=0}^{N-1}\sum_{i_2=0}^{N-1}\sum_{i_3=0}^{N-1}c_{i_1,i_2,i_3}U_{i_1}(x_1)U_{i_2}(x_2)U_{i_3}(x_3)$;

c_{i_1,i_2,i_3} – коэффициенты, подлежащие определению, а Q_1, Q_2, Q_3 – некоторые функции, обеспечивающие разрешимость уравнения (7): $(1 \le k \le 3)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Big[f_N(x_1,x_2,x_3) - \frac{1}{\pi^3}\iiint_{D^3} k_{N,N-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\times$$
$$u_N(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 + Q_1(x_3,x_3) + Q_2(x_1,x_3) + Q_3(x_1,x_2)\Big]\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k}} = 0. \tag{8}$$

Из (8) вытекает, что $Q_1(x_3,x_3) + Q_2(x_1,x_3) + Q_3(x_1,x_2) =$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g_N(x_1,x_2,x_3)dx_i}{\sqrt{1-x_i^2}} + \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{g_N(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}} + \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{g_N(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{g_N(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} - \frac{1}{\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{g_N(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}},$$

где $g_N(x_1,x_2,x_3) = f_N(x_1,x_2,x_3) - \dfrac{1}{\pi^3}\iiint_{D^3} k_{N,N-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\times$

$$\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\,u_N(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3.$$

Учитывая (5), (6), (8), (9) и используя (4), все интегралы в (7) вычислим в явном виде. Приравнивая коэффициенты при одинаковых комбинациях многочленов $T_l(x)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_{i_1,i_2,i_3}.

Укажем порядковые оценки погрешностей построенных приближенных решений. С этой целью введем класс функций W^rH^μ, $r \ge 0$, $0 < \mu \le 1$. Будем говорить, что функция нескольких переменных принадлежит классу W^rH^μ; $r \ge 0$, $0 < \mu \le 1$, если по каждой переменной она имеет частные производные до порядка $r > 1$ и r-я производная из класса H^μ, $0 < \mu \le 1$.

Теорема: Пусть уравнение (1) удовлетворяет следующим условиям: 1) решение $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ разыскивается в классе ограниченных в D^3 функций; 2) функции $f(x_1;x_2;x_3)$ и $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ принадлежат классу W^rH^μ, $r \ge 0$, $0 < \mu \le 1$; 3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x_1,x_2,x_3)$ и $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$ взяты соответственно многочлены

$f_N(x_1,x_2,x_3)$ и $k_{N,N-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$, определяемые соответственно (5)-(6); 4) однородное уравнение (2) неразрешимо.

Тогда при достаточно больших N система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная задаче (7), разрешима и имеет место оценка:

$$\left\| \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\,(u(x_1,x_2,x_3)-u_N(x_1,x_2,x_3)) \right\|_\infty = O(\frac{\ln^6 N}{N^{r+\mu-3}}),\ r+\mu-3>0$$

Литература. 1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. **2.** *Шешко М.А., Расолько Г.А.* О точных и приближенных формулах обращения кратного интеграла с ядрами Коши // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №5. С. 911-915. **3.** *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцедентные функции. Т.2. М., 1966. **4.** *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ СКАЧКООБРАЗНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Розин Е.Б., БГУ, г. Минск

Настоящая работа посвящена исследованию ассоциированных решений системы стохастических дифференциальных уравнений. Отметим, что в частном случае, когда в качестве скачкообразного процесса брался случайный процесс Пуассона, задача исследовалась в работах [1,2]. Для случая конечного числа скачков задача исследовалась в работе [3].

Пусть для $\forall t \in T=[o,a]$, $a \in \mathbb{R}$, $0<h_n<2\cdot h_n<\ldots<m_t\cdot h_n \le t \le (m_t+1)h_n$ – разбиение отрезка $[0,t]$.

В работе исследуются ассоциированные решения системы уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, которая на уровне представителей в алгебре обобщенных случайных процессов запишется следующим образом

$$\begin{cases} X_1^n(t+h_n)-X_1^n(t)=f_1^n(X_1^n(t),X_2^n(t))\left[L_1^n(t+h_n)-L_1^n(t)\right] \\ X_1^n(t)\big|_{t\in[0,h_n)}=X_1^{n,0}(t), t\in[0,a], a\in\mathbb{R} \\ X_2^n(t+h_n)-X_2^n(t)=f_2^n(X_1^n(t),X_2^n(t))\left[L_2^n(t+h_n)-L_2^n(t)\right] \\ X_2^n(t)\big|_{t\in[0,h_n)}=X_2^{n,0}(t), t\in[0,a], a\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь L_1, L_2 – скачкообразные случайные процессы, т.е. непрерывные спра-