$0<\gamma<1$.

$$x^{k+1} := x^k + \alpha h_x$$

$$\alpha = \gamma^* \min\{-v_i^k/(h_v)_i \mid (h_v)_i < 0, i = 1..m\}.$$

$$h_x = (A^{`}D^{-2}A)^{-1}c$$

$$h_v = -Ah_x$$

где $v_i^k \geq 0$ – вектор искусственных переменных, $Ax^k + v^k = b$,

$$D = \operatorname{diag}(v_1^k, v_2^k, v_3^k, \ldots v_m^k)$$

Указанный выше алгоритм был реализован на языке C++ в среде разработки VC++ 6.0 на ПК с CPU - Celeron-800, RAM - 128M.

Приведем таблицу, содержащую результаты сравнения метода Кармаркара и адаптивного двойственного алгоритма [3]:

M	n	двойственный		Кармаркара	
		количество итераций	время работы(мин)	количество итераций	время работы(мин)
100	2000	970	1:27	20	3:02
100	2000	1087	1:31	20	3:26
100	2000	1057	1:29	17	3:17
200	4000	1922	2:52	21	6:42
2	10	4	0:11	9	0:57
2	10	3	0:09	7	0:40

По результатам численных экспериментов можно сделать вывод о том, что имеет смысл разработка эффективного метода решения задачи линейного программирования, объединяющего достоинства опорных методов и метода Кармаркара.

Литература. 1. I.Adler, N. Karmarkar, M. G.C. Resende, G. Veiga, «An implementation of karmarkar's algorithm for linear programming». Mathematical Programming 44 (1989), 297–335. **2.** А.Схрейвер, «Теория линейного целочисленного программирования», Т.1, М., "Мир", 1991. **3.** Р.Габасов, Ф.М.Кирилова «Методы линейного программирования», Минск, БГУ, 1978

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР АПОСТОЛА В ПРИМЕРАХ И ПРИЛОЖЕНИЯХ

Мартон М. В., БГУ, Минск

Работа посвящена изучению некоторых свойств устойчивости существенного спектра Апостола оператора взвешенного сдвига в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(l_1)$.

Рассмотрим ограниченный линейный оператор взвешенного сдвига T, задаваемый следующей формулой:

$$T(x_1,x_2,\dots) := (0,a_1x_1,a_2x_2,\dots),\ x=(x_k)\in l_1, \qquad (1)$$

где (a_k) – последовательность весов такая, что $a_k\in\mathbf{C}$, $\sup\{|a_k| : k\in N\}<\infty$.

Обозначим через $R^\infty(T):=\bigcap_{n=1}^{\infty}R(T^n)$ – обобщенную область значений, где $R(T)$ – область значений оператора T; $N^\infty(T):=\bigcup_{n=1}^{\infty}N(T^n)$ – обобщенное ядро оператора T, где $N(T)=\{x: Tx=0\}$. Оператор $T\in B(l_1)$ называется *полурегулярным* если $R(T)$ – замкнуто и $N(T)\subset R^\infty(T)$. Заметим, что если область значений $R(T)$ замкнута, то последнее включение эквивалентно следующим: $N^\infty(T)\subset R(T)$ или $N^\infty(T)\subset R^\infty(T)$ [1]. Оператор $T\in B(l_1)$ называется *существенно полурегулярным* если $R(T)$ – замкнуто и существует конечномерное подпространство $M\subset l_1$ такое, что $N(T)\subset R^\infty(T)+M$. Заметим, что при замкнутости $R(T)$ последнее включение эквивалентно: $N^\infty(T)\subset R(T)+M$ или $N^\infty(T)\subset R^\infty(T)+M$ для соответствующих конечномерных M.

Рассмотрим подмножества комплексной плоскости C, определяемые следующими характеристиками оператора $T-\lambda I$: $G(T) := \{\lambda\in C: \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I)\}$ – *область нормальной разрешимости* оператора T, $\Phi(T) := \{\lambda\in C: \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I),\ nul(T-\lambda I)<\infty,\ def(T-\lambda I)<\infty\}$ – *область фредгольмовости* оператора T, где $nul(T):=\dim N(T)$, $def(T):=\dim l_1/R(T)$.

Существенным спектром Голдберга оператора T, обозначается через $\sigma_{eg}(T)$, *существенным спектром Фредгольма* $\sigma_{ef}(T)$ и следуя V. Kordula *спектром Апостола* $\sigma_\gamma(T)$ и *существенным спектром Апостола* $\sigma_{e\gamma}(T)$ называются подмножества, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{eg}(T) := C\backslash G(T),\ \sigma_{ef}(T) := C\backslash\Phi(T),$$

$$\sigma_\gamma(T) := \{\lambda\in C: T-\lambda I \text{ не является полурегулярным}\},$$

$$\sigma_{e\gamma}(T) := \{\lambda\in C: T-\lambda I \text{ не является существенно полурегулярным}\}.$$

Спектры Апостола – это непустые компактные подмножества комплексной плоскости C. Для этих спектров очевидны включения: $\sigma_{eg}(T)\subset\sigma_{ef}(T)\subset\sigma(T)$,

$\sigma_{e\gamma}(T)\subset\sigma_{\gamma}(T)$. Кроме того из [1] следует, что $\sigma_{eg}(T)\subset\sigma_{e\gamma}(T)\subset\sigma_{ef}(T)$, а также $\partial\sigma(T)\subset\sigma_{\gamma}(T)$ и $\partial\sigma_{ef}(T)\subset\sigma_{e\gamma}(T)$, где $\partial\sigma(T)$ – граница спектра, а $\partial\sigma_{ef}(T)$ – граница существенного спектра Фредгольма.

Для исследования спектра оператора взвешенного сдвига *T* целесообразно рассмотреть следующую классификацию, в зависимости от последовательности весов a_k: a) $\forall$ k, $a_k\neq0$ и $\inf|a_k|>0$; b) $\forall$ k, $a_k\neq0$ и $\inf|a_k|=0$; c) $\exists$ $a_k=0$ и число нулей среди весов a_k конечно; d) $\exists$ $a_k=0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Известно, что спектр оператора взвешенного сдвига T из $B(l_1)$ есть замкнутый круг, т.е. $\sigma(T)=\{\lambda\in C: |\lambda|\leq r_\sigma\}$, где спектральный радиус r_σ, вычисляемый так же как в случае гильбертова пространства l_2, равен:

$$r_\sigma=\lim_{k\to\infty}(\|T^k\|)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}(\sup_{m\geq1}|a_m\ldots a_{m+k-1}|)^{1/k}. \qquad (2)$$

Для представления существенных спектров Голдберга и Фредгольма следуя [3] можно сформулировать следующие леммы.

Лемма 1. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условиям b) и d), тогда для существенного спектра Голдберга и Фредгольма справедливо равенство $\sigma_{eg}(T)=\sigma_{ef}(T)=\sigma(T)=\{\lambda\in C: |\lambda|\leq r_\sigma\}$.

Лемма 2. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Пусть веса a_k удовлетворяют условию c), тогда для существенного спектра Голдберга и Фредгольма справедливы следующие равенства: если $\inf\{|a_n|: n\geq k+1\}>0$, где a_k – последний нулевой вес, то $\sigma_{eg}(T)=\sigma_{ef}(T)=\{\lambda\in C: r_2\leq|\lambda|\leq r_\sigma\}$, а если $\inf\{|a_n|: n\geq k+1\}=0$, то $\sigma_{eg}(T)=\sigma_{ef}(T)=\{\lambda\in C: r_2\leq|\lambda|\leq r_\sigma\}\cup\{0\}$, где

$$r_2=\sup_{n\geq1}(\inf_{m\geq j+2}|a_m\ldots a_{m+n-1}|)^{1/n}, \qquad (3)$$

а $j=\max\{k\geq1: a_k=0\}$.

Лемма 3. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию a), то тогда существенный спектр Голдберга и Фредгольма равны

$$\sigma_{eg}(T)=\sigma_{ef}(T)=\{\lambda\in C: r_2'\leq|\lambda|\leq r_\sigma\}, \text{ где}$$

$$r_2'=\sup_{n\geq 1}(\inf_{m\geq 2}|a_m\ldots a_{m+n-1}|)^{1/n}. \tag{4}$$

Лемма 4. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условиям b) и d), то тогда спектр Апостола и существенный спектр Апостола равны

$$\sigma_{e\gamma}(T)=\sigma_\gamma(T)=\sigma(T)=\{\lambda\in C: |\lambda|\leq r_\sigma\}.$$

Лемма 5. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию a), то тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливо равенство:

$$\sigma_{e\gamma}(T)=\sigma_\gamma(T)=\{\lambda\in C: r_2'\leq|\lambda|\leq r_\sigma\},\text{ где}$$

$$r_2'=\sup_{n\geq 1}(\inf_{m\geq 2}|a_m\ldots a_{m+n-1}|)^{1/n}.$$

Лемма 6. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию c), тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливо следующее представление: $\sigma_{e\gamma}(T)=\sigma_\gamma(T)=\{\lambda\in C: r_2\leq|\lambda|\leq r_\sigma\}\cup\{0\}$, где

$$r_2=\sup_{n\geq 1}(\inf_{m\geq j+2}|a_m\ldots a_{m+n-1}|)^{1/n},$$

а $j=\max\{k\geq 1: a_k=0\}$.

Отметим, что из [1] для комплексного банахова пространства X и $B(X)$ – алгебры всех ограниченных операторов следует следующая теорема об отображении для (существенного) спектра Апостола.

Теорема 1. Пусть $T\in B(X)$, f аналитическая функция в окрестности спектра $\sigma(T)$. Тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливы равенства вида:

$$\sigma_\gamma(f(T))=f(\sigma_\gamma(T))\text{ и }\sigma_{e\gamma}(f(T))=f(\sigma_{e\gamma}(T)).$$

С помощью примера 2.5 работы [1] можно показать, что спектр Апостола $\sigma_\gamma(T)$ и существенный спектр Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$ неустойчивы относительно компактных возмущений. Однако в работе [2] доказана теорема об устойчивости существенного спектра Апостола относительно возмущений операторами конечного ранга:

Теорема 2. Пусть $T, F\in B(X)$, и пусть F – оператор конечного ранга. Тогда для существенного спектра Апостола справедливо равенство:

$$\sigma_{e\gamma}(T+F)=\sigma_{e\gamma}(T).$$

Кроме того $\sigma_{e\gamma}(T)$ устойчив относительно компактных коммутирующих операторов, хотя $\sigma_{\gamma}(T)$ неустойчив ни относительно операторов конечного ранга, ни относительно коммутирующих компактных операторов.

Заметим, что в работе [4] для $\sigma_{\gamma}(T)$, $\sigma_{e\gamma}(T)$ доказана:

Теорема 3. Пусть T, $A\in B(X)$, TA=AT, и A – квазинильпотентный оператор. Тогда для спектра Апостола и существенного спектра Апостола справедливы следующие равенства:

$$\sigma_{\gamma}(T+A)=\sigma_{\gamma}(T) \text{ и } \sigma_{e\gamma}(T+A)=\sigma_{e\gamma}(T).$$

В заключение отметим, что наиболее интересными для приложений является следующая характеристика существенного спектра Апостола [5]:

Теорема 4. Справедливо следующее равенство:

$$\sigma_{e\gamma}(T)=\cap\{\sigma_{\gamma}(T+S): TS=ST,\ S\in R(X)\},$$

где $R(X)$ – множество операторов конечного ранга, множество компактных операторов или множество операторов Рисса.

Литература. **1.** Müller V. On the regular spectrum // J.Oper.Theory. – 1994, Vol.31, P.363–380. **2.** Kordula V. The essential Apostol spectrum and finite-dimentional perturbations // Proc.R.Ir.Acad. – 1996, Vol.96A, P.105–109. **3.** Мартон М.В. Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига // Вестник Бгу – 2003, №1, С.61–66. **4.** Kordula V., Müller V. The distance from the Apostol spectrum // Proc.Amer.Soc. – 1996, Vol.124, P.3055–3061. **5.** Rakočević V. Generalized spectrum and commuting compact perturbations // Proc.Edin.Math.Soc. – 1993, Vol.36, P.197–209.

СЛУЧАЙ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысик О.В., БрГУ, г. Брест

Рассматривается в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax=y \tag{1}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A, для которого нуль является собственным значением (случай неединственности решения уравнения (1)).

Для отыскания решения используется итерационный процесс