равномерно распределенная до сечения $x = b \le 1$.

Проведен численный анализ полученных решений. Исследованы условия появления ложного резонанса.

Литература. **1.** Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с. **2.** Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Колебания круглых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок различных форм // Проблемы прочности. – 2003. – № 4. – С. 32–39. **3.** Леоненко Д. В. Локальные динамические нагружения круговых трехслойных пластин // Материалы, технологии, инструменты. – 2002. – Т. 7, № 4. – С. 8–13. **4.** Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин под действием резонансных поверхностных нагрузок //Весці НАНБ. Сер. фіз.-техн. навук. – 2003. – № 3. – С. 111–116. **5.** Леоненко Д В. Локальные динамические нагружения упругого трехслойного стержня // BEM & FEM – 2003. Труды XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». Т. 1 (Тезисы докладов). – СПб.: 24–26 сентября, 2003. – С. 120–122.

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ ЗА БЕСКОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА С АРИФМЕТИЧЕСКИМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ.

Лис А. В., БГУ, Минск

Пусть $U(t)$ - случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, $t \in R$, $t \ge 0$, допускающий представление

$$U(t) = u + V(t) - S(t), \tag{1}$$

в частности, для $t \ge 0$ пусть $U(t)$ обозначает размер активов страховой компании в момент времени t. В классической модели предполагается, что премии поступают непрерывно с постоянной интенсивностью $c > 0$. Пусть $N(t)$ - процесс количества исков, X_i - величина иска, тогда $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ - общий размер выплат к моменту времени t. Предполагается, что $N(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ, а X_i - независимые одинаково распределенные величины с производящей функцией моментов $M_X(r)$. Если $U(0) = u$ - размер активов компании в момент времени 0, то в классической модели ([1])

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t). \tag{2}$$

В данной статье предполагается, что процесс поступления премий представим в виде $V(t) = c \cdot t + B(t)$, где $B(t)$ - броуновское движение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 \cdot t$. Предположим, что процессы $N(t), B(t)$ и случайные величины X_i являются независимыми. Таким образом, в нашей модели величина активов

$$U(t) = u + c \cdot t + B(t) - S(t). \tag{3}$$

Определим

$$T = \min\{t;\ t \geq 0,\ U(t) < 0\} \tag{4}$$

как момент разорения, полагая, что $T = \infty$ означает, что разорение не происходит. Далее будем обозначать $\psi(u) = P(T < \infty)$ - вероятность разорения, зависящую от начального размера активов u. Для классической модели известен результат ([1], [2]):

$$\psi(u) = \frac{e^{-R \cdot u}}{E\left[e^{-R \cdot U(T)}|_{T<\infty}\right]}, \tag{5}$$

где R - согласующий коэффициент, определяющийся как положительное решение уравнения $\lambda + c \cdot r = \lambda \cdot M_X(r)$.

Обратимся к рассмотрению нашей модели, и вычислим $E[e^{-r \cdot U(t)}]$:

$$U(t) = u + V(t) - S(t)$$

$$E\left[e^{-r \cdot U(t)}\right] = E\left[e^{-r \cdot u - r \cdot V(t) + r \cdot S(t)}\right] = e^{-r \cdot u} \cdot E\left[e^{-r \cdot V(t)}\right] \cdot E\left[e^{r \cdot S(t)}\right] = e^{-r \cdot u} \cdot M_V(-r) \cdot M_S(r)$$

где $M_V(\cdot)$, $M_S(\cdot)$ - производящие функции моментов процессов $V(t)$ и $S(t)$ соответственно:

$$M_V(r) = E\left[e^{r \cdot V(t)}\right] = E\left[e^{r \cdot c \cdot t + r \cdot B(t)}\right] = \exp\left\{r \cdot c \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot r^2}{2}\right\},$$

$$M_S(r) = M_N(\ln M_X(r)) = e^{\lambda \cdot t \cdot (M_X(r) - 1)},$$

таким образом

$$E\left[e^{-r \cdot U(t)}\right] = \exp\left\{-r \cdot u - r \cdot c \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot r^2}{2} + \lambda \cdot t \cdot (M_X(r) - 1)\right\}$$

С другой стороны

$$E\left[e^{-r \cdot U(t)}\right] = E\left[e^{-r \cdot U(t)}|_{T \leq t}\right] \cdot P(T \leq t) + E\left[e^{-r \cdot U(t)}|_{T > t}\right] \cdot P(T > t) \tag{6}$$

Рассмотрим математическое ожидание в первом слагаемом правой части.

Для этого представим $U(t)$ в виде

$$U(t)=U(T)+U(t)-U(T)=U(T)+[V(t)-V(T)]-[S(t)-S(T)]=$$

$$=U(T)+c\cdot(t-T)+[B(t)-B(T)]-[S(t)-S(T)]$$

Заметим, что $B(t)-B(T)\overset{d}{=}B(t-T)$, а $S(t)-S(T)$ имеет составное пуассоновское распределение с параметром $\lambda\cdot(t-T)$, в силу чего искомое математическое ожидание может быть представлено в виде

$$E\left[e^{-r\cdot U(t)}|T\le t\right]=E\left[\exp\left\{-r\cdot U(T)-r\cdot c\cdot(t-T)+\frac{\sigma^2\cdot(t-T)\cdot r^2}{2}+\lambda\cdot(t-T)\cdot(M_X(r)-1)\right\}|T\le t\right]$$

Пусть $\overline{R}$ является положительным решением уравнения

$$-r\cdot c+\frac{\sigma^2\cdot r^2}{2}+\lambda\cdot(M_X(r)-1)=0$$

тогда выражение (6) упростится:

$$e^{-\overline{R}\cdot u}=E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}|_{T\le t}\right]\cdot P(T\le t)+E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}|_{T>t}\right]\cdot P(T>t).$$

При $t\to\infty$ слева имеем $e^{-\overline{R}\cdot u}$, а первое слагаемое правой части стремится к $E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}|_{T<\infty}\right]\cdot\psi(u)$. Покажем, что второе слагаемое стремится к 0 при $t\to\infty$.

Из (3) имеем:

$$E[U(t)]=u+c\cdot t-\lambda\cdot t\cdot\mu_X,$$

$$Var[U(t)]=Var[B(t)]+Var[S(t)]=\sigma^2\cdot t+\lambda\cdot t\cdot p_X^2$$

где $\mu_X=E[X_i]$, $p_X^2=E[X_i^2]$.

Тогда

$$E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}|_{T>t}\right]\cdot P(T>t)=$$

$$=E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}\Big|_{T>t,\ 0\le U(t)\le u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3}}\right]\cdot P(T>t,\ 0\le U(t)\le u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3})+$$

$$+E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}\Big|_{T>t,\ U(t)>u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3}}\right]\cdot P(T>t,\ U(t)>u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3})\le$$

$$\le P(U(t)\le u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3})+\exp\left\{-\overline{R}\cdot\left(u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3}\right)\right\}\le$$

$$\le t^{-1/3}+\exp\left\{-\overline{R}\cdot\left(u+(c-\lambda\cdot\mu_X)\cdot t-\sqrt{\sigma^2+\lambda\cdot p_X^2}\cdot t^{2/3}\right)\right\}$$

где последнее неравенство следует из неравенства Чебышева. Отсюда следует, что если $c-\lambda\cdot\mu_X>0$, то $E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}|_{T>t}\right]\cdot P(T>t)\underset{t\to\infty}{\to}0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если размер активов страховой компании представим в виде

$$U(t)=u+c\cdot t+B(t)-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i,$$

где u - начальный капитал компании, $B(t)$ - броуновское движение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2\cdot t$, $N(t)$ - пуассоновский процесс с параметром λ, X_i - независимые одинаково распределенные величины, имеющие второй момент, причем процессы $B(t)$, $N(t)$ и случайные величины X_i являются независимыми и выполнено соотношение $c-\lambda\cdot E[X_i]>0$, а $\overline{R}$ является положительным решением уравнения

$$-r\cdot c+\frac{\sigma^2\cdot r^2}{2}+\lambda\cdot(M_X(r)-1)=0,$$

где $M_X(r)$ - производящая функция моментов случайной величины X_i, то вероятность разорения выражается следующим соотношением

$$\psi(u)=\frac{e^{-\overline{R}\cdot u}}{E\left[e^{-\overline{R}\cdot U(T)}|T<\infty\right]}.$$

Литература. 1. Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. Actuarial Mathematics. Schaumburg: Society of Actuaries, 1997. 2. Panjer H., Willmot G. Insurance Risk Models. Schaumburg: Society of Actuaries, 1992.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО СРАВНЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Макевич П.В., БГУ, г.Минск

Работа посвящена исследованию возможности эффективного применения метода Кармаркара для решения задачи линейного программирования:

$$c'x \to \max$$

$$Ax\leq b, \qquad (1)$$

где c – n-вектор, b – m-вектор, A – mxn матрица, причем $m\geq n$ и $c\neq 0$.

Идея метода Кармаркара решения задачи (1) основана на построении последовательности проекций градиентов целевой функции на множество планов. В основе метода лежит специальный проективный алгоритм Кармаркара [1, 2].

Пусть задана текущая внутренняя точка x^k. Получение следующей *внутренней* точки зависит от заранее определенного коэффициента безопасности γ,