ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Кулеш Е.Е., ГрГУ, Гродно

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с рациональной правой частью

$$y_x(y_{xxx}-18yy_{xx}-9y_x^2+24y^3+F)_x=y_t, \quad (1)$$

где $F=Ay_{xxx}+By_{xx}+Cyy_x+Dy_x+Ey^2+Gy+H$, коэффициенты $A,...,H$ – аналитические в некоторой области функции от x, t. Исследуем уравнение (1) на наличие свойства Пенлеве. Чтобы уравнение (1) имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы соответствующее ему уравнение

$$y_{xxxx}-18yy_{xx}-9y_x^2+24y^3+F=0 \quad (2)$$

обладало этим свойством. В связи с этим исследуем вначале уравнение (2). Отметим, что уравнение (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, где t параметр. Выполним замену

$$y=f_x^2\upsilon(\xi,t)+\beta(x,t),\ \xi=f(x,t).$$

В результате получим уравнение вида (2) с новыми коэффициентами $\widetilde{A},...,\widetilde{H}$ соответственно. Функции $f(x,t)$ и $\beta(x,t)$ подберем таким образом, чтобы имели место равенства

$$Af_x+14f_{xx}=0,\ \ 16f_xf_{xxx}+39f_x^2+9Af_xf_{xx}+Bf_x^2-18\beta f_x^2=0.$$

Тогда получим $\widetilde{A}=0$ и $\widetilde{B}=0$. В старых обозначениях уравнение (2) примет вид

$$y_{xxxx}-18yy_{xx}-9y_x^2+24y^3+Cyy_x+Dy_x+Ey_x^2+Gy+H=0. \quad (3)$$

Если искать решение уравнения (3) в виде ряда

$$y=(x-x_0)^{-2}+q(x-x_0)^{-1}+p_0+p_1(x-x_0)+...+p_{r-2}(x-x_0)^{r-2}+..., \quad (4)$$

где $q=q(t), p_k=p_k(t), k=0,1,2,...,\ x_0=x_0(t)$, то для определения r получим уравнение $r^4-14r^3+53r^2-28r-96=0$, откуда $r=-1,3,4,8$. Значит, коэффициенты p_1,p_2,p_6 и x_0 должны быть произвольными функциями от t. Разложим функции $C,...,H$ по целым неотрицательным степеням $x-x_0$, например

$$C=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\dots,\ \text{где}\ C_k=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k C(x_0,t)}{\partial x^k}.$$

Подставляя ряд (4) в уравнение (3), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x-x_0$, получим

$$q=-\frac{1}{42}C_0,\quad p_0=\frac{17}{7056}C_0^2-\frac{1}{18}C_1+\frac{1}{36}E_0.$$

Из первого резонансного условия найдем

$$D_0=\frac{41}{252}C_0C_1-\frac{1}{168}C_0^3-\frac{11}{126}C_0E_0-C_2+\frac{1}{2}E_1 \qquad (5)$$

Для выполнения второго резонансного условия необходимо требовать

$$C_0=0\quad G_0=E_2-\frac{1}{9}E_0^2 \qquad (6)$$

Поскольку $C_0=C(x_0,t)$, а $x_0(t)$ – произвольная функция, то $C\equiv 0$. Рассуждая аналогично, из условий (5), (6) получим

$$D=\frac{1}{2}E_x,\quad C=0,\quad G=\frac{1}{2}E_{xx}-\frac{1}{9}E^2. \qquad (7)$$

Далее найдем

$$p_3=\frac{1}{6}E_0p_1-\frac{1}{216}E_0E_1+\frac{1}{36}E_3.$$

$$p_4=\frac{5}{168}E_1p_1+\frac{5}{84}E_0p_2+\frac{3}{4}p_1^2-\frac{1}{46656}E_0^3-\frac{5}{3024}E_0E_2-\frac{1}{756}E_1^2+\frac{1}{28}E_4+\frac{1}{84}H_0;$$

$$p_5=\left(\frac{1}{192}E_0^2+\frac{1}{24}E_2\right)p_1+\frac{1}{32}E_1p_2+\frac{3}{4}p_1p_2+\frac{1}{16}E_5+\frac{1}{96}H_1-$$

$$-\frac{25}{124416}E_1E_0^2-\frac{1}{432}E_1E_2.$$

Третье резонансное условие выполнено, если $E_2=0, E_1=0, H_2=0$, т. е. если $E_x=0$ и $H_{xx}=0$. Пусть $E=3a$, $H=bx+c$, где a,b,c – функции от t. Условия (7) при этом примут вид

$$D=0,\quad C=0,\quad G=-a^2.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$y_{xxxx}-18yy_{xx}-9y_x^2+24y^3+3ay^2-a^2y+bx+c=0.$$

Значит, вместо (1) будем рассматривать уравнение

$$y_x(y_{xxxx}-18yy_{xx}-9y_x^2+24y^3+3ay^2-a^2y+bx)_x=y_t. \quad (8)$$

где a и b – функции от t. Проверим выполнение необходимого условия наличия свойства Пенлеве для уравнения (8). С этой целью будем искать решение уравнения (8) в виде ряда

$$y=\varphi^{-2}+q\varphi^{-1}+p_0+p_1\varphi+p_2\varphi^2+...+p_{r-2}\varphi^{r-2}+..., \tag{9}$$

где $q=q(t), p_k=p_k(t), k=0,1,2,..., \varphi=\varphi(x,t), \varphi_x=1$, т. е. $\varphi=x-\psi(t)$. Причем к резонансным числам, что были указаны ранее добавится еще $r=6$. Подставляя (9) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, непосредственно убеждаемся, что p_1, p_2, p_4, p_6 и φ_t действительно являются произвольными независимыми между собой функциями от t.

Проверим далее выполнение необходимого условия наличия свойства Пенлеве для уравнения (8), если считать $\varphi_x\neq 1$. Будем искать решение уравнения (8) в виде ряда

$$y=q_2\varphi^{-2}+q_1\varphi^{-1}+p_0+p_1\varphi+p_2\varphi^2+...+p_{r-2}\varphi^{r-2}+..., \tag{10}$$

где, $q_1=q_1(x,t)$, $q_2=q_2(x,t)$, $p_k=p_k(x,t)$, $k=0, 1, 2,...$, $\varphi=\varphi(x,t)$, $\varphi_x\neq 1$, $\varphi_x\varphi_t\neq 0$. Подставляя (10) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, убедимся, что резонансные условия выполняются.

Теорема 1. Чтобы уравнение (1) имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы оно приводилось к виду (8).

Выполним преобразование

$$y=\varphi^{-2}(1+u_1);\ \frac{\partial^k y}{\partial x^k}=\varphi^{-2-k}\left((-1)^k\frac{(2+k-1)!}{(k-1)!}+u_{k+1}\right),\ k=\overline{1,4}, \tag{11}$$

где $u_k=u_k(x,t), k=\overline{1,5}$. С учетом формул (11) из уравнения (8) получим для u_k систему типа Брио и Буке

$$\begin{aligned}&\varphi(u_k)_x=(k+1)u_1+u_{k+1},\ k=\overline{1,4},\\&\varphi(u_5)_x=-144u_1+144u_2-72u_3+18u_4+6u_5+\Phi(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,(u_1)_t),\end{aligned} \tag{12}$$

где Φ – нелинейная функция своих аргументов. Резонансные числа системы (12) найдем из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-r & 1 \\ -144 & 144 & -72 & 18 & 6-r \end{vmatrix} = 0.$$

Получим $r = -1,3,4,6,8$, то есть резонансные числа системы (12) совпадают с резонансными числами уравнения (8). Тогда формальный ряд (9), представляющий решение уравнения (8) сходится в силу теоремы, доказанной в работе [1].

Литература. 1. Кулеш Е.Е. О сходимости полярных разложений решений нелинейных уравнений в частных производных // Веснiк ГрДУ. Сер. 2. – 2003. – №1(19). – С.11–15.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Курочка О.Н., Юдов А.А., БрГУ, г. Брест

Пусть заданы два подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) пространства M.

__Определение__. Два подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного G-пространства M называются эквивалентными (или G-эквивалентными), если существует элемент $a \in G$ такой, что

$$g(x_o)=T_a(f(x_o)),\ \forall x_o \in D_o. \qquad (1)$$

__Определение__. Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

Классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

__Теорема 1__. Два подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного G-пространства $M=G/H$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^{*}(\omega^i)=\hat{g}^{*}(\omega^i), \qquad (2)$$

$i=1, 2,\dots, r$, где ω^i – базисные левоинвариантные формы на группе Ли G (т. е. базис в $\overline{G}^{*}$), а $\hat{f}$ и $\hat{g}$-канонические лифты подмногообразий (D_o, f) и (D_o, g).

__Следствие 1__. Подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного G-пространства M тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны (в группе G) их канонические лифты.