порядка $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ непрерывна на Π^3, спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π и $\sum\limits_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \left[\varphi^T(k)\right]^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, то статистика $\hat{f}^T(\lambda_s)$, задаваемая равенством (5) является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

<u>**Доказательство.**</u> Найдём дисперсию оценки $\hat{f}^T(\lambda_s)$.

$$D\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k_1=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \sum_{k_2=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k_1)\varphi^T(k_2)\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^T(\lambda_{s+k_1}), \hat{I}^T(\lambda_{s+k_2})\right\}.$$

Если $k_1 \neq k_2$, то $D\hat{f}^T(\lambda_s) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ по теореме 1.

Если $k_1 = k_2$, то $D\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum\limits_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \left[\varphi^T(k)\right]^2 \times$

$$\times\left[\frac{2\pi}{T}\iiint\limits_{\Pi^3} f_4^X(y_1+\lambda_{s+k}, y_2-\lambda_{s+k}, y_3-\lambda_{s+k})\Phi_T(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 + \right.$$

$$+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_{s+k}; x_1-\lambda_{s+k})dx_1 \int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_{s+k}; x_2+\lambda_{s+k})dx_2 +$$

$$\left. +\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_{s+k}; x_1+\lambda_{s+k})dx_1 \int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_{s+k}; x_2-\lambda_{s+k})dx_2\right].$$

Из условия теоремы следует, что $D\hat{f}^T(\lambda_s) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Теорема доказана.

Литература. 1. Hideaki Sakai, Takashi Soeda and Hidekatsu Tokumaru. «On the relation between fitting autoregression and periodogram with application.», The Annals of Statistics, 1979, Vol.7, No 1, 96-107. **2.** Труш Н. Н. «Асимптотические методы статистического анализа временых рядов», Мн.:БГУ, 1999.

АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВНОЙ ПЛОТНОСТИ ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ БЕЗРИСКОВОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Казанцева О.Г., БГУ, г. Минск

В работе предложена аппроксимация условной плотности вероятностей двумерного процесса, используемого в двухфакторной модели безрисковой процентной ставки.

Рассмотрим двухфакторную модель безрисковой процентной ставки $r(t)$, представленной в виде пары стохастических дифференциальных уравнений (1)

$$\begin{cases} dr(t) = k_1(r(t) - l(t))dt + \sigma_1\sqrt{r}dW_1(t), \\ dl(t) = k_2(l(t) - \theta)dt + \sigma_2\sqrt{r}dW_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

Средние, дисперсии процессов и ковариация $r(t)$ и $l(t)$:

$$E[r(t) \mid r(v), l(v)] = \frac{\theta}{k_1 - k_2}[k_1(1 - e^{-k_2(t-v)}) - k_2(1 - e^{-k_1(t-v)})] +$$

$$+ r(v)e^{-k_1(t-v)} + l(v)\frac{k_1}{k_1 - k_2}(e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}), \tag{2}$$

$$E[l(t)|l(v)] = \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + l(v)e^{-k_2(t-v)}; \tag{3}$$

$$D[r(t)|r(v), l(v)] = \left(\frac{k_2\theta}{(k_1 - k_2)k_1} + \frac{r(v)}{k_1} - \frac{l(v)}{k_1 - k_2}\right)\sigma_1^2 e^{-2k_1(t-v)} + \frac{\theta\sigma_1^2}{2k_1} +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\frac{k_2\theta}{k_1(2k_1 - k_2)} - \frac{r(v)}{k_1} + \frac{l(v)}{2k_1 - k_2}\right)\sigma_1^2 e^{-2k_1(t-v)} + \frac{k_1\sigma_1^2(l(v) - \theta)e^{-k_2(t-v)}}{(k_1 - k_2)(2k_1 - k_2)} +$$

$$+ 2\sigma_2^2\frac{k_1^2(l(v) - \theta)e^{-k_2(t-v)}}{(k_1 - k_2)(2k_1 - k_2)k_2} + 2k_1^2\sigma_2^2\left(\frac{\theta}{k_1 + k_2} + \frac{r(v)}{k_2} - \frac{l(v)}{k_2}\right)\frac{e^{-(k_1+k_2)(t-v)}}{(k_1 - k_2)^2} + \tag{4}$$

$$+ k_1^3\sigma_2^2\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{k_2 r(v)}{k_1} - l(v)\right)\frac{e^{-2k_2(t-v)}}{(-2k_2 + k_1)k_2(k_1 - k_2)^2} + \frac{k_1\theta\sigma_2^2}{2k_2(k_1 + k_2)} +$$

$$+\left(\frac{k_1\, l(v)}{k_2(k_1 - k_2)} - \frac{\theta}{k_1 - k_2} - \frac{r(v)}{k_2}\right)\frac{2k_1\sigma_2^2 e^{-k_1(t-v)}}{-2k_2 + k_1} +$$

$$+\left(\frac{k_1\, l(v)}{2k_1 - k_2} - \frac{1}{2}\frac{k_2\theta}{2k_1 - k_2} - r(v)\right)\frac{\sigma_2^2 k_1 e^{-2k_1(t-v)}}{(k_1 - k_2)^2}.$$

$$D[l(t)|r(v), l(v)] = \sigma_2^2\frac{k_1(l(v) - \theta)e^{-k_2(t-v)}}{(k_1 - k_2)k_2} + + \frac{\theta\sigma_2^2}{2k_2} + \tag{5}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}k_1\theta + k_2 r(v) - k_1\, l(v)\right)\sigma_2^2 e^{(-2k_2(t-v))}}{k_2(-2k_2 + k_1)} + \left(-\frac{k_2\theta}{k_1 - k_2} - r(v) + \frac{k_1\, l(v)}{k_1 - k_2}\right)\frac{\sigma_2^2 e^{-k1(t-v)}}{-2k_2 + k_1}.$$

Условная плотность вероятности $p(t, r, l|\, v, r(v), l(v))$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова (2):

$$\frac{\partial p}{\partial t}=k_1\frac{\partial}{\partial r}[(r-l)p]+\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rp]+k_2\frac{\partial}{\partial l}[(l-\theta)p]+\frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}[rp], \tag{6}$$

с начальным условием $\lim\limits_{t\downarrow v} p(t,r,l\,|v,r(v),l(v))=\delta(r-r(v))\delta(l-l(v)),\ v<t.$

К сожалению, решение этого эллиптического уравнения в частных производных с переменными коэффициентами в аналитическом виде получить не удается. Поэтому попытаемся получить аппроксимацию этого решения.

Для получения идеи о том, как может выглядеть решение, сначала зафиксируем переменную l. Тогда производные по l в уравнении (6) исчезают, и в оставшемся уравнении величина l рассматривается как параметр, т.е. получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (штрих обозначает производную по r)

$$p_t=k_1\left([(r-l)p]'+(\sigma_1^2/2k_1)[rp]''\right), \tag{7}$$

его решением является плотность нецентрального χ^2 распределения с 2(q+1) степенями свободы и параметром нецентральность $2u$:

$$p_1(t,r|v,r(v))=c\,e^{-u-s}(s/u)^{q/2}I_q(2\sqrt{us}), \tag{8}$$

где $u=cr(v)e^{-k_1(t-v)}$, $s=cr$, $c=2k_1(1-e^{-k_1(t-v)})^{-1}/\sigma_1^2$, $q=2k_1l/\sigma_1^2-1$. Здесь $I_q(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q.

Теперь в уравнении (6) зафиксируем переменную r, рассматривая ее как параметр. Производные по r в (6) исчезнут, и мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p_t=k_2\left([(l-\theta)p]'+(\sigma_2^2r/2k_2)p''\right). \tag{9}$$

Решением этого уравнения является плотность нормального распределения

$$p_2(t,l|v,l(v))=\frac{\sqrt{k_2}}{\sigma_2\sqrt{\pi r}\sqrt{1-e^{-2k_2(t-v)}}}\exp\left(-k_2\frac{(l-\theta-(l(v)-\theta)e^{-k_2(t-v)})^2}{\sigma_2^2r(1-e^{-2k_2(t-v)})}\right). \tag{10}$$

На основе этих рассуждений в качестве аппроксимации решения уравнения (6) можно попробовать взять произведение функций (8) и (10).

Однако интеграл от произведения ни по одной из двух переменных в аналитическом виде не вычисляется и существование интеграла по обеим переменным не очевидно.

Поведенный анализ позволяет предположить, что решение $p(r, l)$ уравнения (6) можно аппроксимировать произведением функций, одна из которых (от переменной l) имела бы вид нормальной плотности с дисперсией, пропорциональной переменной r, а другая – такая, чтобы после интегрирования $p(r, l)$ по l получалась плотность вероятностей нецентрального χ^2 распределения, аппроксимация будет тем лучше, чем больше числовых характеристик аппроксимации будет совпадать с точными их значениями, определяемыми формулами (2)–(5).

Имея это в виду, выбираем в качестве аппроксимации решения уравнения (6) функцию

$$p(t,r,l\,|\,r(v),l(v))=\frac{ce^{-\lambda-s}}{\sqrt{2\pi r\beta}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(l-\theta-(l(v)-\theta)e^{-k_2(t-v)})^2}{\beta^2 r}\right)\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{\lambda s}),\qquad(11)$$

где $\beta^2(t\,|\,v,r(v),l(v))=\dfrac{D[l(t)\,|\,r(v),l(v)]}{E[r(t)\,|\,r(v),l(v)]}$, $\lambda(t\,|\,v,r(v),l(v))=(E[r(t)|\,v,r(v),l(v)]-\theta)/2$,

$q=\theta/2-1$, $c(t\,|\,v)=\dfrac{2k_1}{\sigma_1^2(1-e^{-k_1(t-v)})}$, $s(t\,|\,v)=c(t\,|\,v)r$.

Подставим (11) в уравнение (6), чтобы оценить насколько оно отличается от точного решения.

$$Nev=-\frac{\partial p}{\partial t}+k_1\frac{\partial}{\partial r}[(r-l)p]+\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rp]+k_2\frac{\partial}{\partial l}[(l-\theta)p]+\frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}[rp].$$

Получается величина, пропорциональная плотности (11).

$$Nev=p(t,r,l\,|\,v,r(v),l(v))*hnev(t,r,l\,|\,v,r(v),l(v)),$$

где

$$hnev(t,r,l\,|\,v,r(v),l(v))=\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2c^2+\frac{\partial c}{\partial t}-k_1c\right)r+k1\left(\frac{1}{2}+q+lc\right)+\frac{1}{2}c\sigma_1^2(\lambda-2q-1)+$$

$$+k2+\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\left(\frac{q+1}{c}\right)\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\sigma_2^2}{\beta^2}+\frac{1}{2\beta^2}\frac{\partial\beta^2}{\partial t}+\frac{lk_1(1-2q)}{2r}+\frac{\sigma_1^2(4q^2-1)}{8r}+\frac{\sigma_1^2(l-a)^4}{\beta^4r^3}+$$

$$+\frac{(l-a)}{2r\beta^2}\left(2k_2(\theta-l)-2\frac{\partial a}{\partial t}\right)+\frac{(l-a)^2}{2r\beta^2}\left(k_1+\sigma_1^2c+\frac{1}{\beta^2}\left(\sigma_2^2-\frac{\partial\beta^2}{\partial t}\right)+\frac{\sigma_1^2(q-1/2)-k_1l}{r}\right)+$$

$$+\frac{I_{q+1}(2\sqrt{r\lambda c})}{I_q(2\sqrt{r\lambda c})}\sqrt{r\lambda c}\left(k_1(1-\frac{l}{r})-\sigma_1^2 c-\frac{1}{\lambda c}(\frac{\partial c}{\partial t}\lambda+\frac{\partial \lambda}{\partial t}c)+\frac{\sigma_1^2 q}{2r}+\frac{\sigma_1^2(l-a)^2}{2\beta^2 r^2}\right).$$

где $a(t\,|\,v,l(v))=E[l(t)|l(v)]$, и для краткости аргументы функций $\lambda(t\,|\,v,r(v),l(v))$, $c(t\,|\,v),\beta^2(t\,|\,v,r(v),l(v)),a(t\,|\,v,l(v))$ опущены.

Литература. **1.** Казанцева О.Г. Оценки параметров двухфакторной модели процентных ставок. Математические методы в финансах и эконометрика. Материалы конференции. Минск, 2002, стр. 46-51. **2.** Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов, М. 1965г., стр.478-486.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ BMAP/G/1 СО СКЛАДОМ С РАЗЛИЧНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ПРОИЗВОДСТВА ЗАГОТОВОК

Казимирский А.В., БГУ, г. Минск

1. Введение

Зачастую при разработке информационных систем, исследовании производственных процессов и т.д. можно встретиться с ситуацией, когда технологическую последовательность обработки требования можно разделить на несколько независимых частей. При этом в ряде случаев некоторые из них могут быть выполнены предварительно. Результаты предварительно выполненных частей обслуживания в системах вышеизложенного типа будем называть *заготовками*. Предполагается, что заготовки до их использования хранятся на *складе* заготовок, и если обслуживание начинается при непустом складе заготовок, то оно зависит от числа заготовок на складе и после обслуживания требования со склада исчезает и заготовка.

Очевидно, что может существовать ряд стратегий подготовки заготовок. В данной работе мы исследуем систему со следующей: как только очередь заявок оказывается пустой, обслуживающий прибор начинает производить группу заготовок, размер которой задан заранее и является константой.

2. Математическая модель

Рассмотрим модель так называемой однолинейной системы со складом заготовок. Данная система функционирует следующим образом. В систему поступает поток требований, которые помещаются в бесконечный буфер. Время