СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дуванова В.С., Савчук В.Ф., БрГУ, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве решается уравнение 1 рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A, т.е. задача некорректна. Для отыскания решения уравнения (1) предлагается итеративный метод

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^3 x_{n,+\delta} + 3\alpha y_\delta - 3\alpha^2 A y_\delta + a^3 A^2 y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Доказана сходимость метода (2). Получены оценки погрешности метода при точной правой части, при приближенной правой части и погрешность в счете. Доказаны теоремы.

<u>**Теорема 1.**</u> Итерационный процесс (2) при условии $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$ сходится, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

<u>**Теорема 2.**</u> Если выполняется условие $x = A^s z$, $s > 0$ и $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, то общая оценка погрешности для метода (2) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (3n\alpha e)^{-s} \|z\| + 3n\alpha\delta.$$

<u>**Теорема 3.**</u> Оптимальная оценка погрешности для метода (2) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{опт} \le (1+s) e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$$

и достигается при

$$n_{опт} = s(3\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

<u>*Замечание.*</u> Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но $n_{опт}$ от него зависит. Поэтому для уменьшения числа шагов n и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α как можно большим, из условия $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$.

С учетом погрешности округлений оценка погрешности метода (2) примет вид

$$\|x-z_n\| \le s^s(3n\alpha e)^{-s}\|z\| + 3n\alpha\delta + n\alpha\gamma, \quad n \ge 1.$$

ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ ДЛЯ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысик О.В., Засим В.В., БрГУ, г. Брест

Рассматривается в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Предположим, что при точной правой части y решение x существует (единственное). Будем искать его с помощью итеративного процесса вида

$$x_{n,\delta} = (E-\alpha A)^2 x_{n-1,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0 \tag{2}$$

в случае приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$.

Используется следующее правило останова по невязке. Задается уровень останова ε и момент останова m итерационного процесса (2) определяется условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{3}$$

Справедлива

<u>**Теорема.**</u> Пусть $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$, и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (2) выбран по правилу (3), тогда $m(\delta)\delta \to 0$, $x_{m,\delta} \to x$, $\delta \to 0$. Если при этом $x = A^s z$, $s > 0$, то справедливы оценки

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \tag{4}$$