2. Регуляризованные процессы и сравнение эффективности использования регуляризованных процессов и нерегуляризованных процессов, локально сходящихся с квадратичной скоростью

Для регуляризованных процессов на первом шаге решается линейная система:

$$\left(\alpha E+\left(\alpha E+\overline{f'(x_n)}\right)f'(x_n)\right)\Delta x_n=-\beta_n\left(\alpha E+\overline{f'(x_n)}\right)\left(f(x_n)+g(x_n)\right), \tag{10}$$

β_n вводятся по формулам (3) – (7), α=1e-16.

Очередное приближение находится по формулам:

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n,\ n=0,1\ldots$$

Регуляризованные процессы оказались эффективными при начальных приближениях, при которых якобиан системы обращается в нуль.

Регуляризованный метод оказался намного эффективнее остальных процессов, причём результат получен практически во всех случаях, чего нельзя сказать о нерегуляризованных методах. Также нужно отметить, что с помощью регуляризованного метода получен результат приблизительно в четыре раза быстрее, чем в случае нерегуляризованных процессов. Среди регуляризованных методов лучшим оказался процесс (10),(6) (получен результат вдвое быстрее), процессы (10),(3); (10),(5) и (10),(7) оказались приблизительно сравнимыми. Регуляризованные процессы существенно расширяют область сходимости процессов. Специальная схема организации процесса позволяет лишь не намного (примерно на 25 %) увеличить объём вычислительной работы на каждом шаге итерационного процесса.

Литература. 1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближённое решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. **2.** Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. **3.** Мадорский В.М. О некоторых подходах к построению нелокальных итерационных процессов // Труды международной научной конференции «Статистический и прикладной анализ временных рядов». – Брест: БрГУ, 1997.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Гаджиева Л.Э., БГУ, Минск

Наиболее простым и удобным способом определения устойчивой случайной величины является задание её характеристической функции.

Для того чтобы случайная величина ξ была устойчивой (пишут

$\xi \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$), необходимо и достаточно, чтобы её характеристическая функция $\psi_\xi(t)$ допускала представление (см.[4])

$$\ln\psi_\xi(t)=\begin{cases}-\sigma^\alpha|t|^\alpha(1-i\beta sign(t)tg\frac{\alpha\pi}{2})+i\mu t, \alpha\neq1\\ -\sigma\ |t|\ (1+i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)\ln|t|)+i\mu t, \alpha=1\end{cases} \qquad (1)$$

где $\alpha\in(0,2]$, $\sigma\geq0$, $\beta\in[-1,1]$ и $\mu\in R$.

Практические исследования невозможны без компьютерного моделирования. Сложность проблемы генерирования устойчивых случайных величин состоит в том, что вид характеристической функции не позволяет получить аналитического выражения ни для функции распределения, ни для плотности распределения. Исключение составляют частные случаи устойчивого распределения – распределение Гаусса ($S_2(\sigma,0,\mu)=N(\mu,2\sigma^2)$), Коши ($S_1(\sigma,0,\mu)$) и Леви ($S_{1/2}(\sigma,1,\mu)$, $S_{1/2}(\sigma,-1,\mu)$) для которых применимы обычные методы моделирования. Во всех остальных случаях, чтобы получить плотность распределения, необходимо проводить численное интегрирование.

Действительно, по формуле обращения (см.[1], стр.302), если

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_\xi(t)|dt<\infty, \qquad (2)$$

то $p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\psi_\xi(x)dx$.

Имеем:

$$|\psi_\xi(t)|=\begin{cases}|\exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha(1-i\beta sign(t)tg\frac{\alpha\pi}{2})+i\mu t\}|, \alpha\neq1\\ |\exp\{-\sigma\ |t|\ (1+i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)\ln|t|)+i\mu t\}|, \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha\}, \alpha\neq1\\ \exp\{-\sigma\ |t|\}, \alpha=1\end{cases},$$

и следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_\xi(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha\}dt<\infty.$$

Таким образом условие (2) выполняется. Так как плотность распределения является действительной функцией, то

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\psi_\xi(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha(1-i\beta sign(t)tg\frac{\alpha\pi}{2})+i\mu t\}dx, \alpha\neq 1\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\exp\{-\sigma\ |t|\ (1+i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)\ln|t|)+i\mu t\}dx, \alpha=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha\}\cos\{\beta\sigma^\alpha t|t|^{\alpha-1}tg\frac{\alpha\pi}{2}+\mu t-tx\}dx, \alpha\neq 1\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\sigma\ |t|\ \}\cos\{i\beta\frac{2}{\pi}t\ln|t|)+\mu t-tx\}dx, \alpha=1\end{cases}\tag{3}$$

Далее можно проводить численное интегрирование правой части равенства (3), заменяя бесконечные пределы конечными и применяя, например, составную формулу трапеций (см.[2],стр. 164). Для контроля правильности вычислений можно использовать условие нормировки.

Зная плотность распределения вероятностей, можно смоделировать непрерывную случайную величину стандартным методом исключения (см.[3], стр.61). Используем следующий алгоритм.

Алгоритм 1:

Шаг 0. Подбираем мажорирующую функцию $g(x)$, $g(x)\geq p_\xi(x)\geq 0$.

Шаг 1. Моделируем случайный вектор $(x,y)\in G$, где $G=\{(x,y):0\leq y\leq g(x)\}$.

Шаг 2. Если $y>p_\xi(x)$, то (x,y) исключаем и вновь повторяем шаг 1; если же $y\leq p_\xi(x)$, то значение x принимается в качестве реализации случайной величины ξ.

Таким образом, разработан метод компьютерного моделирования устойчивых случайных величин, однако он требует существенных затрат машинного времени и влечёт за собой погрешность, связанную с численным интегрированием.

Сформулируем теорему (см.[4],стр.55), которая устанавливает выражение устойчивой случайной величины через равномерно распределённую и экспоненциальную случайные величины, с моделированием которых не возникает существенных проблем.

Теорема. Пусть V- случайная величина, которая равномерно распределёна на $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, а W- независимая от V экспоненциально распределённая случайная величина с EW=1, тогда случайная величина X, заданная следующими формулами

1. $\alpha \neq 1$

$$X = D_{\alpha,\beta}\frac{\sin\alpha(V+C_{\alpha,\beta})}{(\cos V)^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(V-\alpha(V+C_{\alpha,\beta}))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

2. $\alpha = 1$

$$X = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta V\right)tgV - \beta\ln\left(\frac{\pi/2\, W\cos V}{\pi/2+\beta V}\right)\right],$$

где $C_{\alpha,\beta} = \frac{arctg(\beta tg\frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}$, $D_{\alpha,\beta} = (\cos(arctg(\beta tg\frac{\pi\alpha}{2})))^{-\frac{1}{\alpha}}$ является устойчивой с $\sigma=1$, $\mu=0$ ($X \sim S_\alpha(1,\beta,0)$).

Теорема даёт формулы для генерирования устойчивой случайной величины с $\sigma=1$, $\mu=0$. Следующее свойство позволяет сгенерировать устойчивую случайную величину для всех допустимых значений параметров.

Если $X \sim S_\alpha(1,\beta,0)$ и $Y = \begin{cases}\sigma X+\mu, \alpha\neq 1\\ \sigma X+\frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln\sigma+\mu, \alpha=1\end{cases}$, то случайная величина Y является устойчивой с $\sigma\neq 1, \mu\neq 0$ ($Y \sim S_\alpha(\alpha,\beta,\mu)$). На основании данного утверждения и теоремы был разработан алгоритм моделирования устойчивой случайной величины.

Алгоритм 2:

Шаг 0. Полагаем $k1 = rand()$; $k2 = rand()$;

Шаг 1. Генерируем V- случайную величину, которая равномерно распределёна на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, и W- независимую от V экспоненциально распределённую случайную величину с EW=1.

$$V = -\pi/2+\pi(0.5+k1)/32768; \quad W = -\ln((0.5+k2)/32768);$$

Шаг 2. Вычисляем вспомогательные значения:

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{arctg(\beta tg\frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}; \qquad D_{\alpha,\beta,\sigma} = \sigma(\cos(arctg(\beta tg\frac{\pi\alpha}{2})))^{-\frac{1}{\alpha}};$$

Шаг 3. Генерируем устойчивую случайную величину по формулам.

A) $\alpha \neq 1$

$$X = D_{\alpha,\beta,\sigma}\frac{\sin\alpha(V + C_{\alpha,\beta})}{(\cos V)^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha,\beta}))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \mu.$$

B) $\alpha = 1$

$$X = \sigma\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right)tgV - \beta\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}W\cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right)\right] + \mu + \frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln(\sigma).$$

Литература. **1.** *Ширяев А.Н.* Вероятность.- М.: Наука,1989. **2.** *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. -М.: Наука,1989. **3.** *Харин Ю.С., Степанова М.Д.* Практикум на ЭВМ по математической статистике.- Минск: изд-во "Университетское",1987. **4.** *Aleksander Janicki, Adam Izydorczyk.* Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym .- WNT, Warszawa. 2001.

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Громыко Ю. В., БГУТ, Гомель

Рассматриваются свободные осесимметричные колебания упругой трехслойной кольцевой пластины. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в легком заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины. Работой заполнителя в тангенциальном направлении пренебрегаем. Деформации малы.

Однородная система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение получена вариационным методом:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r) = 0; \quad L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r) = 0;$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r) - M_0\ddot{w} = 0, \qquad (1)$$

где M_0 – коэффициент зависящий от физических и геометрических параметров слоев; L_i – дифференциальные операторы; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате;

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3}h_kK_k^+; \quad K_k + \tfrac{4}{3}G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \tfrac{2}{3}G_k \equiv K_k^-; \quad a_2 = c(h_1K_1^+ - h_2K_2^+);$$

$$a_3 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+; \quad a_4 = c^2\left[h_1K_1^+ + h_2K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+\right];$$