ОБОБЩЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМЫ КАРТАНА И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Андреев А.С., БГУ, Минск

Понятие главного расслоения имеет важное значение при изучении геометрических структур на дифференцируемых многообразиях. Основные определения и результаты сформулированы в терминах главных расслоений. Другой подход к изучению этой теории основан на идеях Э. Картана и был разработан Ш. Эресманом. Понятие главного расслоения в нем заменено на понятие группоида Ли. Хотя главное расслоение и группоид Ли различаются только формально, использование группоидов Ли допускает более эффективные применения теории групп Ли.

Будем рассматривать группоид Ли $\Pi^k(B)$ k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия B ($\dim B = n$), т.е.

$$\Pi^k(B) = \left\{ j_x^k \varphi \middle| x \in B, \varphi \in Diff_{loc} B \right\}.$$

На группоиде Ли $\Pi^k(B)$ можно выделить следующие структуры.

1) канонический морфизм группоидов Ли
$\pi_{k-1}^k : \Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B)$: $j_x^k\varphi \mapsto j_x^{k-1}\varphi$;
2) представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли J^kTB k-струй векторных полей на B;
3) скобка с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \to A\Pi^{k-1}(B)$, являющаяся морфизмом векторных расслоений;
4) представление группоида Ли $\Pi^k(B)$ как группоида Ли изоморфизмов слоев векторного расслоения, сохраняющих скобку с усечением;
5) фундаментальная форма на $\Pi^k(B)$ со значениями в алгеброиде Ли $A\Pi^{k-1}(B)$.

Перечисленные структуры являются обобщениями аналогичных структур на расслоениях реперов высшего порядка и рассматривались в работах В. Гийемина и Ш. Штернберга, П. Либермана, П. Молино; Нго Ван Кё; Д. Алексеевского и других авторов.

При изучении псевдогрупп Эли Картан ввел фундаментальную форму, которая играет важную роль при исследовании псевдогрупп и G-структур. В частности, деформация псевдогрупповых структур строится с использованием фундаментальной формы. При помощи фундаментальной формы также строятся обобщенные G–структуры.

Фундаментальная форма Картана на главном расслоении реперов рассматривалась многими авторами. Мы будем строить обобщение классической формы Картана на α-вертикальном подрасслоении J^kTB со значениями в алгеброиде Ли.

Зафиксируем точку $x \in B$. Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ – k–репер в точке $y \in B$. Напомним, что $\xi = j^k_x\varphi$ может быть рассмотрен как изоморфизм алгебр Ли с усечением $J^{k-1}_xTB \to J^{k-1}_yTB$. Т.к. пространства J^k_yTB и $T_\xi\Pi^k(B)$ изоморфны, то k-репер ξ может быть рассмотрен также как изоморфизм $J^{k-1}_xTB \to T_\xi\Pi^{k-1}(B)$, который определяется следующим образом.

Если $\xi = j^k_x\varphi$ и X – локальное векторное поле на B, то k–репер ξ задает отображение

$$j^{k-1}_xX \mapsto (\varphi_*X)^{(k-1)}_{\xi^{(k-1)}}.$$

Определим фундаментальную форму θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ следующим образом.

Пусть $p \in T^\alpha_\xi\Pi^k(B)$ – α-вертикальный касательный вектор в точке ξ, где ξ – обратимая k–струя диффеоморфизма φ с истоком в точке x и устьем в точке $y = \varphi(x)$, т.е. $\xi = j^k_x\varphi$. Тогда можно представить касательный вектор $p \in T^\alpha_\xi\Pi^k(B)$ как поднятие векторного поля X, т.е. $p = X^{(k)}_\xi$. Вектор $X^{(k)}_\xi$ получается правым умножением на k–струю ξ касательного вектора $X^{(k)}_{\bar y} \in A\Pi^k(B)$, т.е.

$$X^{(k)}_\xi = X^{(k)}_{\bar y}\cdot\xi.$$

Поставим в соответствие касательному вектору $p = X_{\xi}^{(k)}$ касательный вектор $X_{\tilde{y}}^{(k)}$ с помощью правого умножения на ξ^{-1}. К $X_{\tilde{y}}^{(k)}$ применим операцию усечения π_{k-1}^{k} и переместим полученный вектор в точку $\tilde{x} \in \Pi^{k-1}(B)$, получив тем самым элемент $\left(\varphi_*^{-1}X\right)_{\tilde{x}}^{(k-1)}$ алгеброида Ли $A\Pi^{k-1}(B)$. Таким образом, *фундаментальная форма* θ^k является α–вертикальной 1-формой на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. Она принимает значения в алгеброиде Ли $A\Pi^{k-1}(B)$ и определяется как композиция следующих отображений:

$$\chi : T_{\xi}^{\alpha}\Pi^k(B) \to J_y^k TB : X_{\xi}^{(k)} \mapsto X_{\tilde{y}}^{(k)};$$

$$\pi_{k-1}^{k} : J_y^k TB \to J_y^{k-1} TB : X_{\tilde{y}}^{(k)} \mapsto X_{\tilde{y}}^{(k-1)};$$

$$\xi^{-1} : J_y^{k-1} TB \to J_x^{k-1} TB : X_{\tilde{y}}^{(k)} \mapsto \left(\varphi_*^{-1}X\right)_{\tilde{x}}^{(k-1)},$$

т.е.

$$\theta^k = \xi^{-1} \circ \pi_{k-1}^{k} \circ \chi^{-1}.$$

Все эти отображения сохраняют структуру алгебры Ли с усечением. Следовательно, в каждой точке $\xi \in \Pi^k(B)$, $\xi = j_x^k\varphi$ 1-форма θ^k определяет морфизм алгебр Ли с усечением $T_{\xi}^{\alpha}\Pi^k(B) \to J_x^{k-1}TB$.

Форма θ^k является обобщением классической формы Картана на главном расслоении реперов. Выберем произвольную точку $x \in B$. Рассмотрим каноническую форму θ^k на α-слое $\Pi^k(B)_x$. Пусть $\psi : \mathcal{E}^n \to B$, $\psi(O) = x$ – диффеоморфизм $\mathcal{E}^n$ и открытой окрестности точки $x \in B$. Для любого элемента $\xi \in \Pi^k(B)_x$, $\xi = j_x^k\varphi$ композиция k-струй $j_x^k\varphi \circ j_O^k\psi$ является репером порядка k на расслоении реперов $R^k(B)$. Форма $\theta_{\mathcal{E}^n}^k := j_x^k\left(\psi^{-1}\right) \circ j_y^k\left(\varphi^{-1}\right) \circ \pi_{k-1}^{k} \circ \gamma^{-1}$ является фундаментальной 1-формой Картана на расслоении реперов $R^k(B)$.

Отметим основные свойства формы θ^k.

Теорема 1. Фундаментальная форма θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ обладает:

следующими свойствами:

1) в каждой точке $x \in B$ форма θ^k эквивариантна относительно правого действия группы G_x^k;

2) форма θ^k левоинвариантна;

3) ограничение формы θ^k на алгеброиде Ли $A\left(\Pi^k(B)\right)$ совпадает с усечением π_{k-1}^k;

4) k-струйное продолжение диффеоморфизма базы оставляет инвариантной фундаментальную форму θ^k.

Классическая форма Картана на главном расслоении реперов позволяет характеризовать продолжения многообразия. Аналогичным свойством обладает и построенная нами фундаментальной форма θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. Т.е. справедлива следующая

Теорема 2. Автоморфизм $(\Psi,\psi)_k$ группоида Ли $\Pi^k(B)$ с усечением является k-струйным продолжением диффеоморфизма многообразия B тогда и только тогда, когда $(\Psi,\psi)_k$ оставляет инвариантной фундаментальную форму θ^k, т.е.

$$\Psi^*\theta^k = \theta^k.$$

G–структура порядка k на многообразии B определяется подгруппоидом Ли Ω группоида Ли $\Pi^k(B)$. Сужение формы θ^k является фундаментальной формой G–структуры Ω.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MAPLE ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДРАЙЗИНА

Асмыкович О.И., БГУ, Минск

Рассмотрим стационарную линейную неоднородную дескрипторную [1] систему с запаздыванием:

$$A_0\dot{x}(t) + Ax(t) + A_1x(t-1) = f(t), \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), -1 \le t < 0, x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

где $x \in R^n$, $A_0, A, A_1 \in C_{n,n}$, $\det A_0 = 0$, $f(t), \varphi(t)$ - кусочно-непрерывные n-вектор