РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЕЛИЧИН МОМЕНТОВ СГЛАЖЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ БАРТЛЕТТА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОКОН

Акиндина М.А., БГУ, Минск

Рассмотрим комплекснозначный симметричный устойчивый стационарный случайный процесс с дискретным временем $X(t)$, $t \in Z = \{0,\pm1,...\}$ с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$.

Пусть $x(1),x(2),\ldots,x(T)$ – $T=L\times M$ - последовательных наблюдений за процессом $X(t)$, $t\in Z$, которые разбиты на L равных непересекающихся отрезков, содержащих по $M=2k(n-1)+1$ наблюдений (L не зависит от T), где $n\in N, k \in N \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$, причем при $k=\frac{1}{2}$ будем предполагать, что $n=2n'+1$, $n'\in N$.

Исследуем следующую статистику:

$$\hat{f}_T(\lambda)=\int_{\Pi} W_T(\upsilon)\overline{f}_T(\lambda+\upsilon)d\upsilon, \qquad (1)$$

где $\overline{f}_T(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_M^l(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, является периодограммой Бартлетта, а $I_M^l(\lambda)$ - модифицированная периодограмма, построенная по наблюдениям l–го интервала, $l=\overline{1,L}$, и определенная в [1], $W_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, – спектральное окно, являющееся неотрицательной, четной, 2π-периодической функцией, для которой: $\int_{\Pi} W_T(\lambda)d\lambda=1$.

Причем $W_T(\lambda)=M_TW(M_T\lambda)$, где $M_T \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty$, $\frac{M_T}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, а $W(\lambda)$- действительная, четная, функция, для которой выполняется: $\int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)d\lambda=1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |W(\lambda)|d\lambda<\infty$.

Пусть

$$H_M(\upsilon) = A_M H^{(M)}(\upsilon). \qquad (2)$$

$A_M = \left[\int_\Pi \left|H^{(M)}(\upsilon)\right|^\alpha d\upsilon\right]^{-1/\alpha}$, $H^{(M)}(\upsilon) = \operatorname{Re} \sum_{m=-k(n-1)}^{k(n-1)} e^{-i\upsilon m} h_k(m;n)$; где $h_k(m;n)$ - окно просмотра данных, позволяющее представить $H^{(M)}(\upsilon)$ в виде

$H^{(M)}(\upsilon) = \dfrac{2\pi}{\int_\Pi \left(\dfrac{\sin\frac{n\upsilon}{2}}{\sin\frac{\upsilon}{2}}\right)^{2k} d\upsilon} \left(\dfrac{\sin\frac{n\upsilon}{2}}{\sin\frac{\upsilon}{2}}\right)^{2k}$. Функции типа $H^{(M)}(\upsilon)$ называют полиномиальными ядрами типа Джексона.

Статистика $\tilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, была исследована в работах [1], [2]. Показано, что она является асимптотически несмещенной оценкой, дисперсия и среднеквадратическое уклонение которой стремятся к нулю при $T\to\infty$.

Теорема [2]. *Пусть случайный процесс $X(t)$, $t\in Z$, является m-зависимым, его спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена на множестве Π, удовлетворяет условиям Гельдера в точке $\lambda_0\in\Pi$ порядка $0<\gamma\le1$, причем $f(\lambda_0)>0$, последовательность функций $\left|H_M(\lambda)\right|^\alpha$, определенная (2), является ядром на Π, для которого справедливо* $\int_\Pi \left|H_M\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T} - \upsilon\right) H_M\left(\lambda_0 - \frac{x_2}{M_T} - \upsilon\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}} d\upsilon \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, x_1, $x_2\in[-1,1]$, $|x_1-x_2|\ge\varepsilon_T>0$, $\varepsilon_T \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, $\varepsilon_T T \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty$, *а для функции $W(x)$, $x\in R$, выполняются условия* $\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x)dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\gamma |W(x)| dx < \infty$, $0<\gamma\le1$. *Тогда для статистики $\tilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, заданной равенством (1), справедливо*

1) $\tilde{\Delta} = \left|M\tilde{f}_T(\lambda_0) - [f(\lambda_0)]^{p/\alpha}\right| \le S_1 \dfrac{1}{M_T^\gamma} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, *где* $S_1 = \frac{p}{\alpha} F_0^{p/\alpha - 1} \times$

$$\times\left(B_1(\lambda_0) \int_{\Pi} W(\lambda) |\lambda|^{\gamma} d\lambda + B_1(\lambda_0) \frac{\alpha \pi^{\gamma+2k\alpha}}{2^{2k\alpha}(\gamma+1)(2k\alpha-1)} + 2F_0 \frac{(\pi-\rho)\pi^{4k\alpha-1}}{\rho^{2k\alpha}} \right), 0<\rho<\pi,$$

$$2)\ \left| D\tilde{f}_T(\lambda_0) \right| \le \frac{D_1}{L} \frac{1}{n^t} = \frac{1}{L} \left\{ V_{p,\alpha} \{ f(\lambda_0) \}^{2p/\alpha} \int_{\Pi} W^2(x)dx + C_1 C_2 \right\} \frac{1}{n^t} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$$

где $t = \frac{2k^2\alpha^2 - 1 - 2k^2\alpha^2 s}{2k\alpha + 1 + 2k^2\alpha^2}$, $V_{p,\alpha} = \frac{\Gamma(2p)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{\alpha}\right)\pi \sin p\pi}{2\Gamma^2(p)\Gamma^2\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)\sin^2 \frac{p\pi}{2}} - 1,$

$$3)\ \nabla = M \left| \tilde{f}_T(\lambda_0) - \{ f(\lambda_0) \} \right|^2 \le \left\{ \frac{D_1}{L} + S_1^2 \right\} n^{-\frac{2\gamma}{k\alpha+1}} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$$

$$C_1 = \frac{2p^2 e \max\limits_{\upsilon\in\Pi} f(\upsilon) \Gamma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha^2 \left\{ f\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T}\right) f\left(\lambda_0 - \frac{x_2}{M_T}\right) \right\}^{\frac{1}{2} - \frac{p}{\alpha}} \Gamma^2\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)},$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2k\alpha} \left(\pi^{2k\alpha+1} + 2(\pi)^{k\alpha} \right),$$

$B_1(\lambda_0)$, M_T *и* $W(\lambda)$ *определены выше,* $H_M(\lambda)$ *определено соотношением (2),* $\Gamma(x)$ – *гамма-функция числа* x, $0 < s \le \frac{1}{k\alpha+1}$, $k \ge \frac{2\gamma+1}{\alpha}$, $0 < p < \frac{\alpha}{2}$, $0<\alpha\le 2$, $\lambda_0 \in \Pi$.

Проведем сравнение величины $I(\gamma) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\gamma} |W(x)| dx \right\}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} W^2(x)dx$, $0<\gamma\le 1$, в выражении для среднеквадратического уклонения сглаженной периодограммы Бартлетта для следующих спектральных окон:

Прямоугольное спектральное окно $U(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Статистика Журбенко $Z(x) = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{2\gamma}|x|^{\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}, |x| \le 1, \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$

Статистика Парзена $P(x)=\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^4, x\in R.$

Статистика Тьюки-Хеннинга $T(x)=\frac{\sin x}{2\pi x}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-x^2}\right), x\in R.$

Статистика Бартлетта $B(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2, x\in R.$

Статистика Абеля $A(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, x\in R.$

Результаты вычислений занесем в таблицу

Таблица 2

γ	U(x)	Z(x)	P(x)	T(x)	B(x)	A(x)
	I(γ)	I(γ)	I(γ)	I(γ)	I(γ)	I(γ)
0,1	1,223	1,611	1,218	1,289	1,215	1,183
0,2	1,15	1,367	1,395	1,411	1,381	1,265
0,3	1,094	1,203	1,627	1,573	1,632	1,419
0,4	1,051	1,086	1,929	1,785	2,02	1,687
0,5	1,016	1	2,223	2,058	2,651	2,159
0,6	0,99	0,934	2,835	2,413	3,774	3,054
0,7	0,969	0,882	3,506	2,873	6,048	5,01
0,8	0,954	0,84	4,386	3,475	10,073	10,631
0,9	0,943	0,806	5,549	4,272	33,92	41,023
1,0	0,935	0,778	7,094	5,344	∞	∞

Из таблицы 2 можно сделать вывод, что наиболее предпочтительными для всего диапазона $\gamma\in(0,2]$ является статистика Журбенко и прямоугольное спектральное окно, причем

а) при $\gamma\in(0;0,5)$ лучше использовать прямоугольное спектральное окно;

б) при $\gamma\in(0,5;2]$ лучше использовать статистику Журбенко.

Литература. **1.** Демеш Н.Н., Акинфина М.А. // Вестник БГУ. Серия физ. мат. инф. - 2001, №1. – С. 75-79. **2.** Акинфина. – Минск, 1999. – 26 с. – Деп. В БелИСА. 16.06.99, № Д199971.