РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ВЛАГОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА ПО КИНЕТИКЕ ОДНОМЕРНОГО ВОДОПОГЛОЩЕНИЯ

Афонин А.В., БГТУ, Брест

При проведении теплотехнических расчетов, позволяющих определять нестационарные температурно-влажностные поля, возникающие в капиллярно-пористых строительных материалах, требуется иметь данные о коэффициентах переноса тепла и влаги, характеризующих данный материал и входящих в уравнения тепломассопереноса. Одним из таких коэффициентов является коэффициент влагопроводности (коэффициент диффузии жидкой влаги).

В работе [1] была предложена методика оценки коэффициента влагопроводности материала по данным о кинетике одномерного водопоглощения. Экспериментальная часть методики состоит в измерении изменяющейся со временем массы образца материала в виде прямоугольного параллелепипеда, покрытого со всех граней, кроме нижней, гидроизоляцией, и приведенного в момент времени $t = 0$ нижней гранью в соприкосновение с водой.

Уравнения, описывающие перенос влаги и изменение массы образца со временем, имеют вид [1]:

$$\rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где ρ_0 – объемная масса материала; $\omega(x,t)$ – весовая влажность (отношение массы влаги, содержащейся в участке материала, к массе этого участка в сухом состоянии), зависящая от координаты x и времени t; $\beta(\omega)$ – коэффициент влагопроводности материала.

Начальное условие предполагает, что образец в начальный момент времени (при $t = 0$) был сухим:

$$\omega(x,0) = 0,\ 0 < x \le L, \tag{2}$$

где L – длина образца.

Граничные условия означают, что на погруженной в воду нижней грани образца влажность максимальна

$$\omega(0,t)=\omega_{max},\ t\geq 0, \tag{3}$$

где ω_{max} – максимальная весовая влажность материала, а плотность потока влаги через гидроизолированную верхнюю грань равна нулю:

$$-\beta(\omega)\frac{\partial\omega}{\partial x}=0,\ x=L,\ t\geq 0. \tag{4}$$

Изменение массы образца со временем описывается уравнением:

$$m(t)=m(0)+\rho_0 S\int_0^L \omega(x,t)dx, \tag{5}$$

где S – площадь поперечного сечения образца.

Величины ρ_0 и ω_{max} можно вычислить по формулам:

$$\rho_0=\frac{m(0)}{SL},\ \omega_{max}=\frac{m(T)-m(0)}{m(0)}. \tag{6}$$

где T – некоторый момент времени, при достижении которого можно считать, что образец полностью насытился влагой, то есть $m(t)=m(T)$ при $t\geq T$.

Задача состоит в определении по заданной функции $m(t)$ и размерам образца S и L коэффициента влагопроводности как функции влажности $\beta(\omega)$.

Для решения этой задачи предположим, что величина β зависит от координат и времени не посредством величины ω, а произвольным образом. Уравнение (1) при этом запишется как:

$$\rho_0\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(x,t)\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right). \tag{7}$$

Необходимым и достаточным (при монотонности функции ω по переменным x и t, которая выполняется в данной задаче) условием того, что величина β представляет собой функцию от ω, то есть $\beta(x,t)=\beta(\omega(x,t))$, является уравнение:

$$\frac{\partial\beta(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\beta(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными β и ω, зависящими от координат и времени. При этом должны выполняться условия (2)-(5).

Проинтегрируем уравнение (7) по переменной x:

$$-\beta(x,t)\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}=\rho_0\left(\int_x^L\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial t}d\xi+C(t)\right), \tag{9}$$

где $C(t)$ – некоторая функция от времени. Заметим, что при $x=L$ интеграл в правой части (9) равен нулю, поэтому для того, чтобы выполнялось граничное условие (4), необходимо и достаточно, чтобы было $C(t)\equiv 0$.

Выразим величину β из формулы (9):

$$\beta(x,t)=-\rho_0\int_x^L\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial t}d\xi\Big/\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), будем иметь одно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для одной неизвестной величины ω:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x\partial t}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right)\int_x^L\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial t}d\xi+\\+\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right)^2\int_x^L\frac{\partial^2\omega(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi+\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right)^2\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}=0\end{gathered} \tag{11}$$

В качестве граничных условий к этому уравнению следует взять соотношения (2), (3), (5), а также учесть, что в момент времени T образец полностью насытится влагой:

$$\omega(x,t)=0 \quad \text{при } t=0,\ 0<x\le L, \tag{12}$$

$$\omega(x,t)=\omega_{max} \text{ при } 0\le t\le T,\ x=0, \tag{13}$$

$$\int_0^L\omega(\xi,t)d\xi=\frac{m(t)-m(0)}{\rho_0 S} \text{ при } 0\le t\le T, \tag{14}$$

$$\omega(x,t)=\omega_{max} \text{ при } t=T,\ 0\le x\le L. \tag{15}$$

Уравнение (11) с условиями (12)-(15) описывает изменение влажности образца во времени и пространстве при заданном изменении массы образца $m(t)$

таким образом, чтобы выполнялось уравнение диффузии (1), в котором коэффициент влагопроводности является функцией влажности.

Это уравнение может быть линеаризовано относительно малой поправки $\delta\omega(x,t)$ к функции $\omega(x,t)$ с помощью итерационного метода Ньютона. Полученное линейное уравнение можно решать численно на прямоугольной сетке с координатами (x,t). Матрица системы линейных алгебраических уравнений на этой сетке является блочно-трехдиагональной, поэтому следует применять метод прогонки.

В качестве начального приближения к методу Ньютона может быть принято полученное в работе [1] численное решение уравнения (1) с граничными условиями (2)-(4) и коэффициентом $\beta(\omega)$, подобранным вручную таким образом, чтобы как можно более точно выполнялось соотношение (5).

Полученное таким путем решение уравнения (11) с условиями (12)-(15) следует подставить в соотношение (10) и вычислить искомый коэффициент влагопроводности $\beta(\omega)$.

Литература. 1. Афонин А.В., Никитин В.И., Шабанов Д.Н. Оценка параметров влагопроводности строительных материалов для теплотехнических расчетов // Вестник Брестского государственного технического университета. №2(20), 2003. Серия "Водохозяйственное строительство, теплоэнергетика, экология". – Брест, 2003. – 104 с. – С. 98-100.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗРЕДУКТОРНЫХ И РЕДУКТОРНЫХ ПРИВОДОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Бескровный А.В., Туренкова А.В., ГГТУ, г. Гомель

В работе [1] была получена наиболее полная математическая модель анализа электропотребления безредукторных электромеханических преобразователей периодического движения, в том числе и с пружинной нагрузкой на валу. Для полного анализа целесообразности применения безредукторных колебательных приводов необходимо провести их сравнение с редукторными приводами. Для этого необходимо создать математическое и программное обеспечение для анализа всех типов приводов, желательно на одной программной базе.