БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

Каримова Татьяна Ивановна

НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск — 2006

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук **Яблонский Олег Леонидович**, Белорусский государственный университет, кафедра функционального анализа.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Егоров Александр Дмитриевич**, Институт математики НАН Беларуси, отдел стохастического анализа.

кандидат физико-математических наук; **Ковальчук Андрей Николаевич**, Белорусский государственный университет, кафедра высшей математики и математической физики.

Оппонирующая организация — учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины"

Защита состоится 20 июня 2006 г. в 12^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д.02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская,8, юридический факультет, ауд. 407, тел. ученого секретаря 209 55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "17" мая 2006 г.

И. о. ученого секретаря совета
по защите диссертаций, доктор
физико-математических наук,
профессор

Н.В. Лазакович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Современная теория дифференциальных уравнений широко использует теорию обобщенных функций или распределений разработанную Л. Шварцем. К сожалению сразу же был выявлен существенный недостаток этой теории: невозможно определить ассоциативную операцию умножения обобщенных функций. Поэтому область применения данной теории ограничивается только линейными задачами.

Около двадцати лет назад в работах Ж. Коломбо и его последователей были рассмотрены вложения обобщенных функций в алгебры объектов. Эти объекты были названы новыми обобщенными функциями или мнемофункциями. Основная идея построения подобных алгебр обобщенных функций состоит в том, что новой обобщенной функцией называется класс последовательностей гладких функций. Наиболее обширная из такого рода алгебр была предложена Ю.В. Егоровым, а общий метод построения был дан А.Б. Антоневичем и Я.В. Радыно. Опираясь на эти идеи Н.В. Лазакович, З. Лозанов-Црвенкович, С. Пилипович, М. Обергуггенбергер и др. построили алгебры новых обобщенных случайных процессов.

Исследованиями однородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов занимались А.Н. Ковальчук, Н.В. Лазакович, Е.Б. Розин, С.П. Сташуленок, О.Л. Яблонский и др. Для неоднородных уравнений частным случаем этой задачи занималась И.В. Кашникова.

В данной диссертационной работе исследуются неоднородные уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, поэтому тема исследований является актуальной.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертационная работа выполнена на кафедре функционального анализа БГУ в рамках госбюджетной научной темы НИР БГУ: 887/24 "Алгебраические и топологические структуры в теории дифференциальных и операторных уравнений" (№ госрегистрации 20011616).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является полная классификация ассоциированных решений неоднородных уравнений в дифференциалах содержащих обобщенный процесс броуновского движения в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Описание предельного поведения конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов в одномерном и многомерном случае. Нахождение необходимых и достаточных условий для описания способов аппроксимации неоднородных стохастических θ-интегралов от новых классов случайных процессов.

2. Построение всех ассоциированных решений неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

3. Исследование систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются уравнения и системы уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Предметом исследований являются ассоциированные решения указанных уравнений.

Методология и методы проведенного исследования. В диссертационной работе наряду с классическими методами теории дифференциальных уравнений, стохастического и нестандартного анализа, использовались методы теории новых обобщенных функций и обобщенных случайных процессов.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Их новизна состоит в том, что:

1. Дано полное описание предельного поведения неоднородных конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов в одномерном и многомерном случаях. Найдены необходимые и достаточные условия сходимости этих сумм к стохастическим θ-интегралам для новых классов случайных процессов.

2. Построены все ассоциированные решения неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, содержащих обобщенный случайный процесс броуновского движения.

3. Доказана теорема существования и единственности решения систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Исследованы ассоциированные решения подобных систем.

Практическая значимость полученных результатов. Основные результаты диссертации имеют теоретический характер. Рассмотренные в работе задачи имеют непосредственное приложение к исследованию решений стохастических дифференциальных уравнений и могут быть использованы при решении конкретных прикладных задач физики, химии, биологии и экономики, где в качестве моделей используются такие уравнения.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Полное описание предельного поведения неоднородных конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов в одномерном и многомерном случае

2. Построение всех ассоциированных решений неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, содержащих обобщенный случайный процесс броуновского движения.

3. Доказательство критерия существования и единственности решений систем неоднородных уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Описание ассоциированных решений систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты, приведенные в выносимой на защиту диссертации, получены автором лично. Роль научного руководителя О.Л. Яблонского состояла в постановке рассмотренных в диссертации вопросов, и анализе полученных результатов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на:

международных математических конференциях «Еругинские чтения VIII» (Брест, 2002) и «Еругинские чтения X» (Могилев, 2004);

III и IV региональной конференции молодых ученых и студентов «Современные проблемы математики и выч. техники» (Брест, 2003 и 2005);

— международной математической конференции AMADE 2003 (Минск, 2003);

— IX Белорусской математической международной конференции (Гродно, 2004);

VII межвузовской научно-методической конференции молодых ученых (Брест, 2005);

Результаты работы докладывались на научном семинаре кафедры функционального анализа БГУ (научные руководители профессор А.Б. Антоневич и член-корреспондент НАН Беларуси Я.В. Радыно).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 научных работах. Среди них 4 статьи в научных журналах и 7 тезисов докладов на научных конференциях. Общее количество страниц опубликованных материалов составляет 41 с.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем диссертации — 125 с., список использованных источников состоит из 81 наименований на 8 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дано общее описание изучаемой проблематики и краткий обзор современного состояния исследований по теме, рассмотрены основные методы и направления исследования.

В **первой главе** даются определения понятий броуновского движения, стохастических интегралов и стохастических дифференциальных уравнений.

Во **второй главе** приводится определение алгебры обобщенных случайных процессов, вводятся стохастические θ интегралы и изучается предельное поведение неоднородных конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов, содержащих обобщенный процесс броуновского движения в одномерном и многомерном случаях. Показано, что это предельное поведение полностью описывается стохастическими θ-интегралами.

Подобными вопросами для однородных сумм занимались А.Н. Ковальчук, Н.В. Лазакович, С.П. Сташуленок, О.Л. Яблонский. Для неоднородных сумм И.В. Кашниковой рассматривались только интегралы Ито и Стратоновича.

Глава состоит из трех разделов. В первом разделе приводится конструкция алгебры обобщенных случайных процессов[1] и доказывается ряд вспомогательных результатов.

Пусть везде далее $T = [0, a]$ – отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$, а $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – полное вероятностное пространство.

Расширенной прямой $\widetilde{\mathbb{R}}$ называется следующее фактор-множество $\widetilde{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}/M$, где $\overline{\mathbb{R}} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\mathrm{M} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{\mathbb{R}} :$
$\exists n_0\ \forall n > n_0\ x_n = 0\}$.

Аналогичным образом определяется $\widetilde{T} = \overline{T}/M$, где $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$,
$a \in \mathbb{R}$, $\overline{T} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in T\}$.

Рассмотрим множество $G(T, \Omega)$ последовательностей случайных функций $f_n : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:
1. $f_n(t, \cdot)$ является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ для всех $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$;
2. $f_n(\cdot, \omega) \in \mathbb{C}^{\infty}(T)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и почти всех $\omega \in \Omega$.

---

[1] Н.В. Лазакович. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов // Доклады АН Беларуси. — 1994. – Т. 38, №5. — С. 23–27.

Будем говорить, что последовательности $F = (f_n(t,\omega))$ и $G = (g_n(t,\omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0, что для любых $t \in T$ и почти всех $\omega \in \Omega$ $f_n(t,\omega) = g_n(t,\omega)$ при $n > n_0$.

Через $G(\widetilde{T},\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентности исходного множества $G(T,\Omega)$. Очевидно, что $G(\widetilde{T},\Omega)$ образует алгебру с покоординатным сложением и умножением.

Множество $G(\widetilde{T},\Omega)$ – *алгебра обобщенных случайных процессов*, а ее элементы – *обобщенные случайные процессы*.

Будем говорить, что *обобщенный случайный процесс*

$$\widetilde{F} = [(f_n(t,\omega))] \in G(\widetilde{T},\Omega)$$

ассоциирует классический случайный процесс с непрерывными, интегрируемыми и т.д. траекториями, если $f_n(t,\omega)$ при $n \to \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$ или в $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ сходится к данному процессу в соответствующем пространстве непрерывных, интегрируемых и т.д. функций.

Пусть $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ – стандартный, непрерывный справа поток σ-алгебр, т.е. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ для $t < s$, $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

Везде далее через $B(t)$, $t \in T$, будем обозначать одномерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$-броуновского движения.

Обобщенным случайным процессом броуновского движения называется элемент алгебры $G(\widetilde{T},\Omega)$, ассоциирующий $B(t)$.

Рассмотрим множество

$$H = \{\widetilde{h} = [(h_n)] \subset \widetilde{\mathbb{R}}_{>0}\},\ h_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Обобщенным дифференциалом произвольного элемента $\widetilde{F} = [(f_n)] \in G(\widetilde{T},\Omega)$ по приращению $\widetilde{h} \in H$ называется следующий элемент алгебры $G(\widetilde{T},\Omega)$

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{F} = [(f_n(t+h_n,\omega) - f_n(t,\omega))].$$

Пусть $X(t)$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс.

Стохастическим θ-интегралом $\theta \in [0,1]$ от процесса $X(t)$ по процессу броуновского движения $B(t)$ называется предел по вероятности следующего выражения

$$(\theta)\int\limits_0^t X(s)dB(s) = \operatorname*{lip}_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m}(\theta X(t_k) + (1-\theta)X(t_{k-1}))(B(t_k) - B(t_{k-1})),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$ – разбиение отрезка $[0,t], \theta \in [0,1]$, а $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}|t_k - t_{k-1}|$ – диаметр разбиения.

При $\theta = 0$ получаем стохастический интеграл Ито, при $\theta = 1/2$ - стохастический интеграл Стратоновича.

В качестве обобщенного случайного процесса броуновского движения в дальнейшем будем рассматривать следующий элемент $G(\widetilde{T}, \Omega)$

$$\widetilde{B} = [(B_n(t))], \ B_n(t) = (B * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} B(t+s)\rho_n(s)ds, \tag{1}$$

где $\rho_n(t) \in D(\mathbb{R})$, $\rho_n(t) \geq 0$, $supp\ \rho_n \subset [0, 1/n]$ и $\int\limits_0^{1/n} \rho_n(t)dt = 1$.

Пусть $h_n > 0$, тогда для любого $t \in T$, $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.1[2] *Пусть $t \geq 0, h_n > 0, n \in \mathbb{N}$, тогда имеет место следующее равенство*

$$E(B_n(t+h_n) - B_n(t))^2 =$$
$$= h_n \iint\limits_{\substack{0 \leq s, \tau \leq 1/n \\ |s-\tau| \leq h_n}} \left(1 - \frac{|s-\tau|}{h_n}\right) \rho_n(s)\rho_n(\tau)dsd\tau = h_n K(n, h_n). \tag{2}$$

В разделе 2.2 рассматриваются суммы вида

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, B_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n)).$$

Заметим, что они возникают при решении уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

В данном разделе с помощью стохастических θ-интегралов дано полное описание предельного поведения неоднородных конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов, содержащих обобщенный процесс броуновского движения. Найдены оценки скорости сходимости.

В качестве представителя обобщенной функции $\widetilde{f}$, ассоциирующей функцию $f(x,\ y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, рассмотрим следующую последовательность $f_n = f * \rho_n = \int\limits_0^{1/n}\int\limits_0^{1/n} f(x+u, y+v)dudv$, где $\rho_n(u,v) \in D(\mathbb{R}^2)$, $\rho_n(u,v) \geq 0$, $supp\ \rho_n(u,v) \subset [0, 1/n]^2$, $\int\limits_0^{1/n}\int\limits_0^{1/n} \rho_n(u,v)dudv = 1$

---

[2] Яблонский О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов //Доклады НАН Беларуси. - 2000. -Т.44,№2. - С.22-26.

Пусть $\mathbb{C}^p_B(\mathbb{R}^2)$ – множество функций p раз непрерывно дифференцируемых как функции двух переменных и ограниченных на $\mathbb{R}^2$ вместе со своими частными производными до порядка p включительно.

Теорема 2.2 *Пусть $f(x,y) \subset C^2_B(\mathbb{R}^2), f \not\equiv const$. Конечная сумма*

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, B_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))$$

сходится в $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ и равномерно по $t \in T$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ тогда и только тогда, когда числовая последовательность $K(n, h_n)$ сходится при $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

Следствие 2.3 *Пусть $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$ и $\theta \in [0, 1/2]$, тогда:*

$$\sup_{t\in T} E\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t+(k-1)h_n, B_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))-$$

$$-(\theta)\int\limits_0^t f(s,B(s))dB(s)\Bigg)^2 \leqslant \frac{C}{n} + Ch_n + C\big((1-K(n,h_n))/2-\theta\big)^2 \qquad (3)$$

Рассмотрим случай, когда $\theta \in [1/2,\ 1]$. Для него справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.3 *Пусть $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$, $f \not\equiv const$. Конечная сумма*

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + kh_n, B_n(\tau_t + kh_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))$$

сходится в $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ и равномерно по $t \in T$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ тогда и только тогда, когда числовая последовательность $K(n, h_n)$ сходится при $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

Следствие 2.6 *Пусть $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$ и $\theta \in [1/2, 0]$ Тогда если $n \to \infty$, $h_n \to 0$ и $K(n,h_n) \to (2\theta - 1)$, то*

$$\sup_{t\in T} E\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + kh_n, B_n(\tau_t + kh_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))-$$

$$-(\theta)\int\limits_0^t f(s,B(s))dB(s)\Bigg)^2 \to 0.$$

В разделе 2.3 рассматривается предельное поведение итовских конечных сумм в многомерном случае для неоднородных функций.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - полное вероятностное пространство, $\overline{B}(t) = (B^1(t), B^2(t), ..., B^m(t))$ - m-мерный стандартный процесс броуновского движения.

Рассмотрим произвольную последовательность $h_n > 0$, $h_n \to 0$, $n \to \infty$. Для любой фиксированной точки t из отрезка T имеет место представление:

$$t = \tau_t + m_t h_n, h_n > 0, n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \tau_t \in [0, h_n), m_t \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Обозначим

$$S_n f(t, \overline{B}(t)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n)) \times$$

$$\times [B_n^i(\tau_t + kh_n) - B_n^i(\tau_t + (k-1)h_n)],$$

где

$$B_n^i(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} B^i(t+s)\rho_n^i(s)ds, \ \rho_n^i(t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}), \ \rho_n^i(t) \geq 0, \ supp \ \rho_n^i \subset [0, \frac{1}{n}],$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \rho_n^i(s)ds = 1, i = \overline{1, m}, \ \overline{B}_n(t) = (B_n^1(t), B_n^2(t), ..., B_n^m(t)),$$

$$f_n(t, t_1, t_2, ..., t_m) = \int_0^{\frac{1}{n}} ... \int_0^{\frac{1}{n}} f(t+s, t_1+s_1, ..., t_m+s_m) \times$$

$$\times \overline{\rho}_n(s, s_1, ..., s_m) ds ds_1 ds_2 ... ds_m,$$

а $\overline{\rho}_n$ - неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0, \frac{1}{n}]^{m+1}$ и $\int_0^{\frac{1}{n}} ... \int_0^{\frac{1}{n}} \overline{\rho}_n(s, s_1, ..., s_m) ds ds_1 ds_2 ... ds_m = 1$.

Обозначим

$$K^i(n, h_n) = \iint\limits_{\substack{0 < s, \tau \leq \frac{1}{n}, \\ |s-\tau| \leq h_n}} (1 - |s-\tau| h_n^{-1}) \rho_n^i(s) \rho_n^i(\tau) ds d\tau. \tag{5}$$

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условия сходимости суммы $S_n f(t, \overline{B}(t))$.

Теорема 2.5 *Пусть* $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^{m+1})$, $f \neq const$ *и последовательность* $h_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причем* $1/n^2 = o(h_n)$. *Конечная сумма* $S_n f(t, \overline{B}(t))$ *сходится в* $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и равномерно по* $t \in T$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *тогда и только тогда, когда числовые последовательности* $K^i(n, h_n)$, $i = \overline{1, m}$ *сходятся при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

Следствие 2.9 *Пусть* $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^{m+1})$ *и* $\theta_i \in [0, 1/2], i = \overline{1, m}$. *Тогда, если* $h_n > 1/n^2$, *то*

$$\sup_{t \in T} E\left(S_n f(t, \overline{B}(t)) - \sum_{i=1}^{m} (\theta_i) \int\limits_0^t f(s, \overline{B}(s)) dB^i(s)\right)^2 \leq$$

$$< C \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1 - K^i(n, h_n)}{2} - \theta_i\right)^2 + \frac{C}{n^{\frac{2}{3}} h_n^{\frac{1}{3}}} + C h_n. \qquad (6)$$

Аналогичные теоремы справедливы и для сумм с опережением. Пусть

$$S_n^+ f(t, \overline{B}(t)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + k h_n, \overline{B}_n(\tau_t + k h_n)) \times$$

$$\times [B_n^i(\tau_t + k h_n) - B_n^i(\tau_t + (k-1) h_n)].$$

Теорема 2.6 *Пусть* $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^{m+1})$ *и последовательность* $h_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причем* $1/n^2 = o(h_n)$. *Конечная сумма* $S_n^+ f(t, \overline{B}(t))$ *сходится в* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и равномерно по* $t \in T$ *тогда и только тогда когда числовые последовательности* $K^i(n, h_n), i = \overline{1, m}$ *сходятся при* $h_n \to 0$, $n \to \infty$.

Следствие 2.11 *Пусть выполнены условия теоремы 2.6, тогда если* $K^i(n, h_n) \to (2\theta_i - 1), \theta_i \in [1/2, 1], i = \overline{1, m}$ *при* $h_n \to 0$, $n \to \infty$ *причем* $1/n^2 = o(h_n)$ *то*

$$\sup_{t \in T} E(S_n^+ f(t, \overline{B}(t)) - \sum_{i=1}^{m} (\theta_i) \int\limits_0^t f(s, \overline{B}(s)) dB^i(s))^2 \to 0.$$

В **третьей главе** с позиции алгебр обобщенных случайных процессов рассматриваются стохастические неоднородные дифференциальные уравнения с θ-дифференциалами, $\theta \in [0, 1]$. Аналогичные задачи в однородном случае рассматривались в работах А.Н. Ковальчука, Н.В. Лазаковича, О.Л. Яблонского и др., а в неоднородном случае для уравнений Ито и Стратоновича И.В. Кашниковой. Глава состоит из трех разделов.

Раздел 3.1 содержит вспомогательные результаты, которые будут использованы для исследований предельного поведения решений конечно-разностных уравнений с осреднением и решений уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

Рассмотрим следующую задачу Коши в алгебре обобщенных случайных процессов $G(\widetilde{T}, \Omega)$

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}\tilde{X}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{t}, X(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{B}(\tilde{t}) + \tilde{g}(\tilde{t}, X(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{t}; \\ \tilde{X}(\tilde{t})\Big|_{[\tilde{0},\tilde{h})} = \tilde{X}_0(\tilde{t}), \end{cases} \tag{7}$$

где $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ – обобщенные функции, $\widetilde{B}$ – обобщенный процесс броуновского движения, $d_{\widetilde{h}}$ - обобщенный дифференциал, $\widetilde{h} = [(h_n)] \in H$, $\widetilde{h} + \widetilde{t} \in \widetilde{T}$, $\widetilde{X}_0 \in G(\widetilde{T}, \Omega)$ – "начальное условие".

Несложно видеть, что на уровне представителей задача (7) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) - f_n(t, X_n(t))[B_n(t+h_n) - B_n(t)] + g_n(t, X_n(t))h_n, \\ X_n(t)|_{[0,h_n)} = X_n^0(t), \quad t \in T. \end{cases} \tag{8}$$

Для описания предельного поведения решений задачи Коши (8) введем в рассмотрение уравнение:

$$X(t) = x + (\theta)\int_0^t f(s, X(s))dB(s) + \int_0^t g(s, X(s))ds, \quad t \in T. \tag{9}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0,1]$ и стохастический интеграл в правой части (9) это стохастический θ-интеграл.

Лемма 3.1 *Пусть $f \in \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^2)$ и $g \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда, если "начальное условие" $X_n^0(t)$ системы (8) принадлежит $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ и является $\mathcal{F}_{t+1/n}$ измеримым для любого $t \in [0, h_n)$, то $X_n(t)$ принадлежит $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ и является $\mathcal{F}_{t+1/n}$ измеримым для любого $t \in T$ и справедливо следующее неравенство:*

$$E(X_n(t+h_n) - X_n(t))^{2p} \leqslant Ch_n^{2p} + Ch_n^p, \quad p = 1,\ 2, \ldots.$$

В разделе 3.2 на основании предыдущего доказывается, что пределом решений конечно-разностных уравнений являются решения стохастических интегральных уравнений с θ-интегралами, причем $\theta \in [0, 1/2]$. Для значений θ из отрезка $[1/2,\ 1]$ решения стохастических уравнений могут быть приближены решениями конечно-разностных уравнений только с введением опережения. Доказанные теоремы носят необходимый и достаточный характер. Также даются оценки скорости сходимости.

Следующая теорема показывает связь между уравнением (9) и системой (8).

Теорема 3.1 *Пусть* $\theta \in [0,\ 1/2]$, $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$ *и* $g \in \mathbf{C}^1_B(\mathbb{R}^2)$, *"начальное условие" задачи Коши (8)* $X^0_n(t)$ *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ *и является* $\mathcal{F}_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t \in [0,\ h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (8)* $X_n(t)$ *и решения уравнения (9)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X^0_n(t) - x]^2 + \frac{C}{n^{2/3}h^{1/3}} +$$

$$+C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2,\ \text{если}\ 1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2};$$

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X^0_n(t) - x]^2 + Ch_n$$

$$+C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2,\ \text{если}\ 1/n^{1/2} \leq h_n.$$

Следствие 3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда, если* $\underset{t\in[0,h_n)}{sup} E[X^0_n(t) - x]^2 \to 0$ *и* $K(n,h_n) \to (1-2\theta)$, $\theta \in [0,1/2]$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$, *так что* $1/n^2 = o(h_n)$, *то* $\underset{t\in T}{sup} E[X_n(t) - X(t)]^2 \to 0$.

Теорема 3.2 *Пусть* $\theta \in [0,1/2]$, $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathbf{C}^1_B(\mathbb{R}^2)$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^2 = o(h_n)$, *причем* $\underset{t\in[0,h_n)}{sup} E[X^0_n(t) - x]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (8) в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ *и равномерно по* $t \in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность* $K(n,h_n)$.

Чтобы получить аналогичные теоремы для уравнения (9) в случае когда $\theta \in [1/2, 1]$ рассмотрим следующую задачу Коши с опережением:

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(t+h_n, X_n(t+h_n))\times \\ \qquad \times(B_n(t+h_n) - B_n(t)) + g_n(t+h_n, X_n(t+h_n))h_n; \\ X_n(t)\Big|_{[0,h_n)} = X^0_n(t), t \in T \end{cases} \tag{10}$$

С помощью принципа сжимающих отображений несложно показать, что данная задача имеет решение, однако в общем случае оно будет не единственным. Но, и в этом случае справедливы теоремы, аналогичные предыдущим.

Теорема 3.3 *Пусть* $\theta \in [1/2,\ 1]$, $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$ *и* $g \in \mathbf{C}^1_B(\mathbb{R}^2)$, *"начальное условие" задачи Коши (10)* $X^0_n(t)$ *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ *и является* $\mathfrak{F}_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t \subset [0,\ h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (10)* $X_n(t)$ *и решения уравнения (9)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X^0_n(t) - x]^2 + \frac{C}{n^{2/3}h^{1/3}} +$$

$$+C(K(n, h_n) - (2\theta - 1))^2, \text{ если } 1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2};$$

$$\sup_{t\subset T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X^0_n(t) - x]^2 + Ch_n$$

$$+C(K(n, h_n) - (2\theta - 1))^2, \text{ если } 1/n^{1/2} \leq h_n.$$

Следствие 3.2 *Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда, если* $\underset{t\in[0,h_n)}{sup}\ E[X^0_n(t) - x]^2 \to 0$ *и* $K(n, h_n) \to (2\theta - 1)$, $\theta \in [1/2,\ 1]$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$, *так что* $1/n^2 = o(h_n)$, *то* $\underset{t\in T}{sup} E[X_n(t) - X(t)]^2 \to 0$.

Теорема 3.4 *Пусть* $\theta \in [1/2,\ 1]$, $f \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathbf{C}^1_B(\mathbb{R}^2)$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^2 = o(h_n)$, *причем* $\underset{t\subset[0,h_n)}{sup}\ E[X^0_n(t) \quad x]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (10) в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$ *и равномерно по* $t \in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность* $K(n, h_n)$.

Замечание 3.1 Очевидно, что все предыдущие результаты верны, если в уравнении (9) неслучайное начальное условие x заменить на $\mathfrak{F}_0$ измеримую случайную величину из $\mathbf{L}^2(\Omega, A, P)$.

В разделе 3.3 приводится теорема, описывающая ассоциированные решения задачи Коши (7).

Известно[3] что, для существования и единственности решений задачи Коши (7) в $G(\widetilde{T}, \Omega)$ необходимо и достаточно чтобы для любых представителей $(f_n) \in \widetilde{f}$, $(g_n) \in \widetilde{g}$, $(B_n) \in \widetilde{B}$, $(X_n) \in \widetilde{X}$, $(X^0_n) \in \widetilde{X}^0$ выполнялось условие

$$\frac{d^l}{dt^l}X^0_n(h_n - s, \omega) \quad \frac{d^l}{dt^l}X^0_n(s, \omega) - \frac{d^l}{dt^l}[f_n(s, X^0_n(s, \omega))\times$$

$$\times[B_n(h_n + s, \omega) - B_n(s, \omega)]] - \frac{d}{dt^l}g_n(s,\ X^0_n(s, \omega))h_n \to 0, \qquad (11)$$

при $s \to +0$ для почти всех $\omega \in \Omega$ и любых $l = 0, 1, 2, ...$

---

[3] Кашникова И.В. Аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обощенных случайных процессов: Дис. ... к-та физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 1998. – 102с.

Теорема 3.6 *Пусть выполнено условие (11),* $f \in \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^2)$ *и* $\underset{t\in[0,h_n)}{sup}\ E[X_n^0(t)-x]^2 \to 0$, *тогда ассоциированными решениями задачи Коши (7) являются решения уравнения (9) при* $\theta \in [0,1/2]$.

В **четвертой** главе рассматриваются ассоциированные решения систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. В ней приводятся необходимые и достаточные условия сходимости решений систем конечно-разностных уравнений с осреднением к решениям систем стохастических неоднородных уравнений в θ-интегралах. Найдены также оценки скорости сходимости. Системами подобных однородных уравнений занимался А.Н. Ковальчук. Неоднородный случай рассматривается впервые. Глава состоит из трех разделов.

Первый раздел содержит вспомогательные утверждения, которые будут использоваться в следующем разделе.

Во втором разделе рассматривается предельное поведение решений систем конечно-разностных уравнений с осреднением, которые содержат неоднородные функции.

На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dX^i(t) = f^i(t, X(t))dB(t) + g^i(t, X(t))dt, i = \overline{1,r}, t \in [0, a]$$

с начальным условием $X^i(0) = x^i$.

В алгебре обобщенных случайных процессов $G(T, \Omega)$ ей будет соответствовать следующая задача Коши

$$\begin{cases} d_{\widetilde{h}}\widetilde{X}^i(\widetilde{t}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{t}, \widetilde{X}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{B}^j(\widetilde{t}) + \widetilde{g}^i(\widetilde{t}, \widetilde{X}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{t}, \\ \widetilde{X}^i(\widetilde{t})|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})} = \widetilde{X}^{0i}(\widetilde{t}), \quad i = \overline{1,r}, \end{cases} \tag{12}$$

где $\widetilde{0} = [(0)]$, $\widetilde{h} = [(h_n)] \in \widetilde{T}$, $\widetilde{f}^{ij} = [(f_n^{ij})] \in G(\widetilde{\mathbb{R}^{r+1}})$ и $\widetilde{g}^i = [(g_n^i)] \in G(\widetilde{\mathbb{R}^{r+1}})$ ассоциируют функции f^{ij} и g^i, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,m}$ соответственно, а $\widetilde{B}^j = [(B_n^j)] \in G(\widetilde{T}, \Omega)$ – обобщенный процесс броуновского движения и "начальное условие" $\widetilde{X}^{0i} = [(X_n^{0i})] \in G(\widetilde{T}, \Omega)$ ассоциирует $x^i \in \mathbb{R}$.

На уровне представителей задача (12) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} X_n^i(t + h_n) - X_n^i(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t, X_n(t))[B_n^j(t + h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n(t))h_n, \\ X_n^i(t)|_{[0,h_n)} = X_n^{0i}(t), \quad i = \overline{1,k}, \quad t \in [0; T], \end{cases} \tag{13}$$

где $B_n^j(t) = (B^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s)\rho_n^j(s)ds$, $\rho_n^j(t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n^j > 0$, $supp\ \rho_n^j(t) \subset [0,1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s)ds = 1$, $j = \overline{1,m}$, $B(t) = (B^1(t),\dots,B^m(t))$ – m-мерный стандартный процесс броуновского движения, $f_n^{ij} = (f^{ij} * \overline{\rho}_n)$, $g_n^i = (g^i * \bar{\rho}_n)$, $f^{ij} \subset \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, а $\overline{\rho}_n$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0,1/n]^{r+1}$ и

$$\int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} \overline{\rho}(s, s_1, \dots s_r) ds ds_1 \dots ds_r = 1.$$

Система уравнений, ассоциированных системе (13) имеет вид

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^{m} (\theta_j) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, \ i = \overline{1,r}, \quad (14)$$

где

$$X(t) = (X^1(t), X^2(t), \dots, X^r(t)), \ x = (x^1, x^2, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r,$$
$$g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1}), \ f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1}), \ i = \overline{1,r}, \ j = \overline{1,m}.$$

Пусть последовательности $K^i(n, h_n)$ из формулы (5).

Теорема 4.1 *Пусть* $\theta_j \in [0, \ 1/2]$, $f^{ij} \in \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $g^i \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, *"начальное условие" задачи Коши (13)* $X_n^{0i}(t)$ *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и является* $\mathcal{F}_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t \in [0, \ h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (13)* $X_n^i(t)$ *и решения системы (14)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t \in T} E||X_n(t) - X(t)||^2 \leqslant C \sup_{t \in [0, h_n)} E||X_n^0(t) - x||^2 + Cn^{3/2}h_n +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{m} (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2, \text{ если } 1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4},$$

$$\sup_{t \in T} E||X_n(t) - X(t)||^2 \leqslant C \sup_{t \in [0, h_n)} E||X_n^0(t) - x||^2 + \frac{C}{n^{2/3} h_n^{1/3}} +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{m} (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2, \text{ если } 1/n^{5/4} \leq h_n \leq 1/n^{1/2},$$

$$\sup_{t \in T} E||X_n(t) - X(t)||^2 \leqslant C \sup_{t \in [0, h_n)} E||X_n^0(t) - x||^2 + Ch_n +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{m} (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2, \text{ если } 1/n^{1/2} \leq h_n.$$

Теорема 4.2 *Пусть* $f^{ij} \in \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,m}$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^{3/2} = o(h_n)$, *причем* $\underset{t\in[0,h_n)}{sup} E[X_n^{0i}(t) - x^i]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (13) в* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и равномерно по* $t \in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности* $K^j(n, h_n)$, $j = \overline{1,m}$.

Чтобы получить аналогичные теоремы для уравнения (14) в случае когда $\theta \in [1/2, 1]$ рассмотрим следующую задачу Коши с опережением:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t+h_n, X_n(t+h_n))\times \\ \times[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t+h_n, X_n(t+h_n)), \\ X_n^i(t)|_{[0,h_n)} = X_n^{0i}(t), \quad i = \overline{1,r}, \quad t \in [0;T]. \end{cases} \tag{15}$$

С помощью принципа сжимающих отображений несложно показать, что данная задача имеет решение, однако в общем случае оно будет не единственным. Но, и в этом случае справедливы теоремы, аналогичные предыдущим.

Теорема 4.3 *Пусть* $\theta_j \subset [1/2,\ 1]$, $f^{ij} \subset \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $g \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, *"начальное условие" задачи Коши (13)* $X_n^0(t)$ *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и является* $\mathcal{F}_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t \in [0,\ h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (13)* $X_n(t)$ *и решения уравнения (14)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} E||X_n(t) - X(t)||^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E||X_n^0(t) - x||^2 + Cn^{3/2}h_n +$$

$$+C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n) - (2\theta_j - 1))^2, \text{ если } 1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4},$$

$$\sup_{t\in T} E||X_n(t) - X(t)||^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E||X_n^0(t) - x||^2 + \frac{C}{n^{2/3}h_n^{1/3}} +$$

$$+C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n) - ((2\theta_j - 1))^2, \text{ если } 1/n^{5/4} \le h_n \le 1/n^{1/2},$$

$$\sup_{t\in T} E||X_n(t) - X(t)||^2 \leqslant C \sup_{t\in[0,h_n)} E||X_n^0(t) - x||^2 + Ch_n +$$

$$+C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n) - (2\theta_j - 1))^2, \text{ если } 1/n^{1/2} < h_n.$$

Теорема 4.4 *Пусть* $f^{ij} \in \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $i = \overline{1,r}, j = \overline{1,m}$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^{3/2} = o(h_n)$, *причем* $\underset{t\in[0,h_n)}{sup} E[X_n^{0i}(t) -$

$x^i]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (13) в* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и равномерно по* $t \in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности* $K^i(n, h_n)$, $i = \overline{1, r}$.

В третьем разделе описываются ассоциированные решения системы (12).

Теорема 4.5 *Пусть для любых представителей* $(f_n^{ij}) \in \widetilde{f}^{ij}$, $(g_n^i) \in \widetilde{g}^i$, $(B_n^j) \subset \widetilde{B}^j$, $(X_n^i) \in \widetilde{X}^i$, $(X_n^{0i}) \in \widetilde{X}^{0i}$ *выполняются условие:*

$$\frac{d^l}{dt^l} X_n^{0i}(h_n - s, \omega) - \frac{d^l}{dt^l} X_n^{0i}(s, \omega) - \sum_{j=1}^{m} \frac{d^l}{dt^l} [f_n^{ij}(s, X_n^0(s, \omega)) \times$$

$$\times [B_n^j(h_n + s, \omega) - B_n^j(s, \omega)]] - \frac{d}{dt^l} g_n^i(s, \; X_n^0(s, \omega)) h_n \to 0 \qquad (16)$$

при $s \to +0$ *для почти всех* $\omega \in \Omega$ *и любых* $l = 0, 1, 2, \ldots$, *тогда решение задачи Коши (12) в* $G(\widetilde{T}, \Omega)$ *существует и единственно.*

Теорема 4.6 *Пусть выполнены условия теоремы 4.5,* $f^{ij} \in \mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i \in \mathbf{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $\sup\limits_{t \in [0, h_n)} E[X_n^{0i}(t) - x^i]^2 \to 0$, *тогда ассоциированными решениями задачи Коши (12) являются решения уравнения (14) при* $\theta \subset [0, 1/2]$.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность и благодарность научному руководителю доценту кафедры функционального анализа Яблонскому Олегу Леонидовичу за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе и профессору Лазаковичу Николаю Викторовичу за полезное обсуждение результатов работы и сделанные замечания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведения диссертационных исследований получены следующие основные результаты:

1. Дано полное описание предельного поведения неоднородных конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов в одномерном и многомерном случае [2, 4, 5, 7, 10].

2. Построены все ассоциированные решения неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, содержащих обобщенный случайный процесс броуновского движения [1, 3, 8].

3. Доказан критерий существования и единственности решений систем неоднородных уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Описаны ассоциированные решения систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов [9, 6, 11].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Русина Т.И. Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Неоднородный случай // Вестник БГТУ. Физика, математика, химия. – 2003. – №5(23). – С.46-56.

2. Русина Т.И., Яблонский О.Л. Аппроксимация стохастических интегралов в неоднородном случае // Весці НАН Беларусі. – 2004. – №1. – С.21-26.

3. Русина Т.И., Яблонский О.Л. Неоднородные уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процесов // Труды Института математики. – Минск, 2004. -Т.12 №2. – С.154-157.

4. Русина Т.И., Яблонский О.Л. Предельное поведение многомерных итовских конечных сумм с осреднением в неоднородном случае // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 36-42.

Материалы конференций

5. Русина Т.И. Аппроксимация стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов для неоднородного многмерного случая. // Материалы III респ. научной конф. молодых ученых и студентов "Современные проблемы математики и вычислительной техники": Тез. докл. междунар. мат. конф., Брест, 26 – 28 ноября 2003 г. — Брест, 2003.— С.224-227.

6. Каримова Т.И. Ассоциированные решения систем стохастических неоднородных уравнений в θ-интегралах. // Материалы IV респ. научной конф. молодых ученых и студентов "Современные проблемы математики и вычислительной техники": Тез. докл. междунар. мат. конф., Брест, 28 – 30 ноября 2005 г. — Брест, 2005.— С.130-132.

Тезисы докладов на конференциях

7. Русина Т.И. Об аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов. Неоднородный случай. // Еругинские чтения VIII: Тез. докл. междунар. мат. конф., Брест, 20 23 мая 2002 г. — Брест, 2002. — С.155.

8. Русина Т.И., Яблонский О.Л. Неоднородные уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процесов. // AMADE-2003: Тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 4-9 сентября 2003 г. — Минск, 2003. — С.154.

9. Русина Т.И. Неоднородные многомерные уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. // IX белорусская математическая конференция: Тез. докл. междунар. мат. конф., Гродно, 3-6 ноября 2004 г. — Гродно, 2004. — С.126.

10. Каримова Т.И. Аппроксимация многомерных стохастических θ-интегралов в алгебре обощенных случайных процессов в неоднородном случае. // VII межвузовская научно-методическая конференция молодых ученых: Тез. докл. междунар. мат. конф., Брест, 20 мая 2005 г. — Брест, 2005. — С. 33 34.

11. Каримова Т.И. Системы неавтономных стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обощенных случайных процессов. // Еругинские чтения X: Тез. докл. междунар. мат. конф., Могилев, 24 26 мая 2005 г. — Могилев, 2005. — С. 33.

РЕЗЮМЕ

КАРИМОВА ТАТЬЯНА ИВАНОВНА

НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ключевые слова: случайный процесс броуновского движения, стохастический интеграл, обобщенный случайный процесс, ассоциированное решение уравнения в дифференциалах.

Объектами исследования являются уравнения и системы уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Предметом исследований являются ассоциированные решения указанных уравнений. Цель работы полная классификация ассоциированных решений неоднородных уравнений в дифференциалах, содержащих обобщенный процесс броуновского движения в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Дано полное описание предельного поведения неоднородных конечных сумм элементов алгебры обобщенных случайных процессов в одномерном и многомерном случаях. Найдены необходимые и достаточные условия сходимости этих сумм к стохастическим θ-интегралам для новых классов случайных процессов.

2. Построены все ассоциированные решения неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов, содержащих обобщенный случайный процесс броуновского движения.

3. Доказана теорема существования и единственности решения систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Исследованы ассоциированные решения подобных систем.

Диссертация носит теоретический характер. Рассмотренные в работе задачи имеют непосредственное приложение к исследованию решений стохастических дифференциальных уравнений и могут быть использованы при решении конкретных прикладных задач физики, химии, биологии и экономики, где в качестве моделей используются такие уравнения.

РЭЗЮМЭ

КАРЫМАВА ТАЦЦЯНА ІВАНАЎНА

НЕАДНАРОДНЫЯ РАЎНАННІ Ў ДЫФЕРЭНЦЫЯЛАХ У АЛГЕБРЫ АБАГУЛЬНЕНЫХ ВЫПАДКОВЫХ ПРАЦЭСАЎ

Ключавыя словы: выпадковы працэс броўнаўскага руху, стахастычны інтэграл, абагульнены выпадковы працэс, асацыяванае рашэнне раўнання ў дыфферэнцыялах.

Аб'ектамі даследвання з'яўляюцца раўнанні і сістэмы раўнанняў у дыфферэнцыялах у прамым здабытку алгебр абагульненых выпадковых працэсаў. Прадметам даследвання з'яўляюцца асацыяваныя рашэнні гэтых раўнанняў. Мэта работы поўная класіфікацыя асацыяваных рашэнняў неаднародных раўнанняў у дыфферэнцыялах, якія ўтрымліваюць абагульнены працэс броўнаўскага руху ў прамым здабытку алгебр абагульненых выпадковых працэсаў.

У дысертацыйнай працы атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Дадзена поўнае апісанне лімітавых паводзін неаднародных канечных сум элементаў алгебры абагульненых выпадковых працэсаў у аднамерным і мнагамерным выпадках. Знойдзены неабходныя і дастатковыя ўмовы збежнасці такіх сум да стахастычных θ-інтэгралаў для новых класаў выпадковых працэсаў.

2. Пабудаваны ўсе асацыяваныя рашэнні неаднародных раўнанняў у дыфферэнцыялах у алгебры абагуленных выпадковых працэсаў, якія ўтрымліваюць абагульнены выпадковы працэс броўнаўскага руху.

3. Даказана тэарэма існавання і адзінасці рашэння сістэм неаднародных раўнанняў у дыфферэнцыялах у алгебры абагуленных выпадковых працэсаў. Даследаваны асацыяваныя рашэнні падобных сістэм.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Задачы, якія разглядаюцца ў ей маюць непасрэднае дачыненне да даследавання рашэнняў стахастычных дыфферэнцыяльных раўнанняў і могуць быць выкарыстаны пры рашэнні задач фізікі, хіміі, біялогіі і эканомікі, дзе ў якасці мадэлей выкарыстоўваюцца такія раўнанні.

SUMMARY

KARYMAVA TATSIANA IVANAUNA

NONHOMOGENEOUS EQUATIONS WITH DIFFERENTIALS IN THE ALGEBRA OF GENERALIZED STOCHASTIC PROCESSES

Keywords: random process of Brownian motion, stochastic integral, generalized random process, associated solutions of the equation with differentials.

The objects of the research are equations and systems of equations with differentials in direct product of the algebras of generalized stochastic processes. The subject of the research are the associated solutions of this equations. The purposes of the investigation are complete classification of associated solutions of nonhomogeneous equations with differentials. The following new results have been obtained in the thesis:

1. Complete describing of limiting behavior of nonhomogeneous finite sums of elements of the algebra of generalized stochastic processes is given. Necessary and sufficient conditions of convergence of sums above to stochastic θ-integrals for new classes of stochastic processes are found.

2. All associated solutions of the nonhomogeneous equations with differentials in the algebra of generalized stochastic processes including generalized process of Brownian motion has been given.

3. The theorem of existence and uniqueness of solution for system of nonhomogeneous equations with differentials in the algebra of generalized stochastic processes is proved. The associated solutions of these systems is researched.

The results of the thesis are theoretical. Considered problems have applications to investigation of solutions of stochastic differential equations. They can be used for solving practical problems in physics, chemistry, biology and economy, which modelling by these equations.

Подписано в печать 12.05.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 60 экз. Зак. 447.

Отпечатано с готового оригинала-макета заказчика
в Республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.