

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ УТОЧНЕННЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ PTS MATHCAD

Уласевич В.П., Каковко В.И.

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях при проектировании различных конструктивных систем зданий и сооружений наметилась тенденция на использование стержневых систем сложной геометрической структуры (рам, ферм, различных комбинированных систем) из стальных тонкостенных холодногнутых профилей (СТХП), обладающих повышенной деформативностью. Вычисление перемещений и внутренних сил в таких стержневых системах требует применения методов, позволяющих предельно близко приблизить их расчетные модели к реальной их работе. При этом, если в стержневых системах из стальных прокатных и сварных профилей допустим к их расчету метод перемещений без учета продольных деформаций, то при проектировании стержневых систем из СТХП, обладающих низкой продольной жесткостью, пренебрегать учетом ее влиянием на общее напряженно-деформированное (НДС) состояние не допустимо. Кроме того, стержни из СТХП обладают в процессе деформирования под воздействием поперечной нагрузки, вызывающей изгиб, повышенной деформативностью.

Таким образом, дальнейшее совершенствование моделей эффектов воздействий сложной геометрической структуры путем учета продольных деформаций и повышенной деформативности входящих в нее стержней из СТХП под воздействием нагрузки и другими воздействиями – задача актуальная как в теоретическом, так и в практическом плане.

1. Краткий анализ методов расчета моделей стержневых систем

Прописной истиной является истина о том, что выполнить *точно* оценку действительной несущей способности конструктивной системы зданий и сооружений, изготовленной из конкретного строительного материала (сталь, дерево, железобетон и др.) на сегодняшний день нет возможности. Истинно и то, что все конструкции, испытывающие силовые воздействия деформируются нелинейно. И все же несущую способность конструктивных систем зданий и сооружений мы оцениваем, заменив их расчетными моделями, но здесь важно, чтобы принятая расчетная модель определяла искомые параметры наиболее близко к их действительным величинам. Проблема безошибочного выбора расчетной модели для рассчитываемой конструкции – одна из важнейших для проектировщика на стадии ее расчета.

Другой не менее важной проблемой следует признать проблему выбора метода расчета принятой расчетной модели, так как правильный ее выбор связан со знанием всего набора современных методов расчета и способов их численной реализации. Поэтому уместно провести краткий анализ существующих методов оценки моделей эффектов воздействий стержневых систем.

С энергетической точки зрения явление деформирования расчетной модели под воздействиями можно охарактеризовать как процесс обмена энергиями двух систем, или полей сил – внутренних и внешних. Работа консервативных сил (упругости, гравитационных, центробежных, электростатического взаимодействия и др.) не зависит от пути перехода системы из одного положения в другое, а определяется только ее начальным и конечным состояниями. Полная энергия системы равна работе внутренних и внешних сил на соответствующих перемещениях. Энергия системы, находящейся в устойчивом равновесии, минимальна. Исходя из этих положений, в классической строительной механике сформулированы два вариационных принципа расчета деформируемых систем:

– принцип вариации усилий (принцип Кастилиано), согласно которому «из всех статически возможных внутренних усилий, истинные усилия, обеспечивающие совместность деформаций тела, дают минимальное значение энергии деформации тела или, численно равной ей, работы внутренних сил»;

– принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа), согласно которому «из всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, истинные перемещения дают минимальное значение полной энергии тела».

Для стержневых систем реализация этих принципов в современной форме приводит к формированию математической модели в виде систем линейных канонических уравнений *метода сил* и *метода перемещений* соответственно.

Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки. К недостаткам метода сил можно отнести необходимость в процессе решения выбирать основную систему и вычислять сложные интегралы, что трудно формализуется при создании универсальных программ для ПК, и усложняет расчет. Метод перемещений лишен этих недостатков, но имеет один существенный – *трудность учета влияния продольных сил*.

Отметим особо, что в линейно деформируемых системах справедлив принцип независимости действия сил. В тоже время использование его при расчете систем из стержней со значительными перемещениями узлов – недопустимо.

Для того чтобы принять линейную математическую модель, находящуюся под внешними силовыми воздействиями, кроме допущений о неизменяемости геометрии в процессе ее деформирования и подчиненности ее закону Гука, исключают возможность выключения стержней конструктивной системы из работы путем потери ими устойчивости.

Глубокий анализ достоинств и недостатков вариационных, классических и численных методов расчета, а также технические возможности современных ЭВМ и развитие программного обеспечения для использования *матричных операций* вычислительной математики позволили создать численный метод решения задач строительной механики, известный как *метод конечных элементов (МКЭ)*, в основу которого положен классический метод перемещений. Идея метода конечных элементов (МКЭ) первоначально получила свое развитие в 70-х годах прошлого столетия применительно к дискретному решению континуальных задач в виде пластин и оболочек, а поэтому может быть легко приспособлена и к расчету стержневых расчетных моделей.

2. Матричный метод перемещений стержневых систем

Ниже излагаются основные положения алгоритма матричного метода расчета стержневых систем сложной геометрической структуры, построенного на методе перемещений (деформаций), изложенном в [1], а также его реализация в компьютерной программе на языке программирования математической среды MathCAD. Его основная отличительная особенность состоит в возможности учета продольных деформаций. В этом случае *основная система метода перемещений* образуется путем наложения на все узлы рассчитываемой модели *жестких связей*, препятствующих как повороту, так и горизонтальному смещению концов ее стержней. В результате достигается основная цель – повысить точность классического метода перемещений путем учета продольных деформаций стержней.

Для стержневой системы, порядка $k=m \cdot n$ (где m – число связей в узлах; n – число узлов системы) матричная система уравнений имеет вид

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{P_u\} + \{P_s\} + \{R\}, \quad (1)$$

где: $[K]$ – матрица внешней жесткости свободной системы; $\{\Delta\}$ – вектор неизвестных перемещений ее узловых точек; $\{P_u\}$ – вектор внешних нагрузок, действующих в узлах рамы в глобальной системе; $\{P_s\}$ – вектор реакций начала и конца стержня, от воздействия распределенных по его длине поперечных нагрузок, температурных воздействий, предварительного натяжения с учетом граничных условий закрепления стержней в узлах, приложенных с обратным знаком к узлам системы; $\{R\}$ – вектор опорных реакций, на которые наложены опорные связи (если в узле нет связей, то соответствующие им величины равны нулю).

Простой анализ составляющих правой части матричной системы уравнений (1) указывает, что точность метода перемещений определена методикой вычисления составляющих вектора опорных реакций $\{P_s\}$ на стадии определения напряженно-деформированного состояния стержневой системы в *основной системе*.

Особенность МКЭ – необходимость иметь возможность нагрузки, как внешние силовые воздействия, прикладывая в узлах стержневой системы. Если в реальных конструктивных системах нагрузка на узлы от вышележащих конструкций действительно прикладываются к узлам, то МКЭ является точным методом расчета в расчетах по недеформированной схеме равновесия. Если же нагрузку, действующую по длине стержня искусственно приводят к узловой принятой основной системы метода перемещений, то решение, следует считать приближенным. Повысить точность результатов решения в МКЭ можно разбивая стержни на более мелкие участки путем введения достаточного количества узлов. Здесь необходимо отметить, что при этом необходимо проявлять осторожность, так как опыт использования программных комплексов с МКЭ подсказывает, что большое количество дискретизации стержней может привести к обратному эффекту.

Есть другой путь повысить точность решения методом перемещений – получить решение в аналитическом виде для гибкого стержня, закрепленного в основной системе узлами, не допускающими как поворот узла, так и его продольное перемещение (рисунок 1).

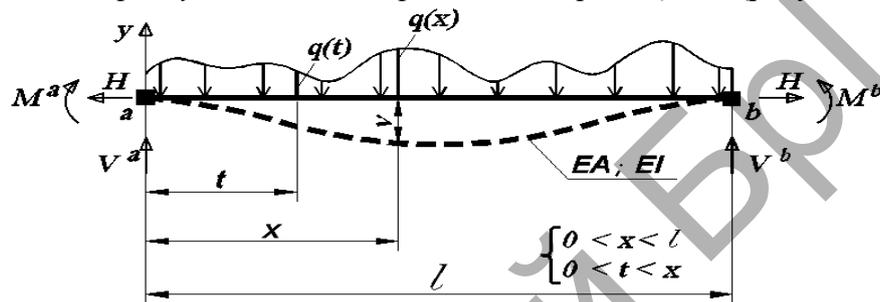


Рисунок 1 – Деформированное состояние прямолинейного гибкого стержня

Аналитическое решение дифференциального уравнения гибкого стержня в интегральных квадратурах, находящегося под воздействием сплошной поперечной нагрузкой $q(x)$, полученное В.П.Уласевичем и изложенное в [1] при граничных условиях

$$v|_{x=0} = 0; \quad v|_{x=l} = 0; \quad v''|_{x=0} = \frac{M^a}{EI}; \quad v''|_{x=l} = \frac{M^b}{EI},$$

относительно прогибов v и изгибающих моментов M_s , но содержащее в себе основные неизвестные – распор H и опорные моменты M^a, M^b , имеет вид

$$v = -\frac{1}{H} \left[R_b x - \int_0^x (x-t)q(t)dt + M^a - (M^a - M^b) \frac{x}{l} - M_s \right], \quad (2)$$

$$M_s = \frac{r_s}{a_1} sh(a_1 x) - \frac{1}{a_1} \int_0^x sh(a_1(x-t))q(t)dt + \frac{M^a}{sh(a_1 l)} sh(a_1(l-x)) + \frac{M^b}{sh(a_1 l)} sh(a_1 x), \quad (3)$$

где $a_1 = \sqrt{\frac{H}{EI}}; \quad R_b = \frac{1}{l} \int_0^l (x-t)q(t)dt; \quad r_s = \frac{1}{sh(a_1 l)} \int_0^l sh(a_1(l-t))q(t)dt.$ (4)

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{H \cdot l}{EA} + \left(\frac{H}{EA} - \frac{1}{2} \right) \frac{D(H)}{H^2} + \left[H \cdot (c_h^a - c_h^b) + \left(\alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{P_n \cdot l}{EA} \right) \right] \right] = 0; \\ & \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{th(al) - al}{H \cdot l \cdot th(al)} - c_\varphi^a \right) \cdot M^a - \frac{sh(al) - al}{H \cdot l \cdot sh(al)} \cdot M^b = - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0; M^a=0; M^b=0}; \\ & \frac{sh(al) - al}{H \cdot l \cdot sh(al)} \cdot M^a - \left(\frac{th(al) - al}{H \cdot l \cdot th(al)} - c_\varphi^b \right) \cdot M^b = - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=l; M^a=0; M^b=0}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где $D(q, H) = \int_0^l \left(R_b - \int_0^x q(t)dt - \frac{1}{l} (M^a - M^b) - \frac{dM_s}{dx} \right)^2 dx$ – силовая характеристика стержня;

$c_u^a, c_u^b, c_\varphi^a, c_\varphi^b$ – коэффициенты линейной и угловой податливости левой и правой опор стержня соответственно; l – длина стержня; α – коэффициент линейного расширения стали; Δt – расчетный перепад температуры.

Основное достоинство функции прогибов (2), изгибающих моментов (2) а также ее производных в том, что они непрерывны и дифференцируемы. Это позволило в [1] на основании равенства полных линейных и угловых деформаций разработать систему трех разрешающих уравнений в замкнутом виде относительно входящих в них неизвестных – распора H и опорных моментов M^a, M^b в виде

При известных значениях M^a и M^b вертикальные реакции V^a и V^b равны

$$V^a = R_b - \frac{1}{l}(M^a - M^b); \quad V^b = \int_0^l q(t)dt - V^a. \quad (6)$$

После расчета всех стержней в основной системе рамы по уравнениям (5), есть возможность с учетом (6) сформировать вектор $\{P_s\}$ в локальной системе координат. Тогда векторы $\{P_s\}$ вычислим в глобальной системе координат так

$$\{P_s\} = [T_\alpha]^T \cdot \{P'_s\}, \quad (7)$$

а связь реакций узлов всей системы $\{r\}$ (2) с реакциями и перемещениями концов ее элементов $\{\delta'\}$ может быть определены по формуле

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\} = [T_\alpha]^T \cdot \{ [K'] \cdot \{\delta'\} \} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\delta\}, \quad (9)$$

Вектор перемещений в глобальной системе координат вычисляем по выражению

$$\{\Delta\} = [K^*]^{-1} \cdot (\{P_u^*\} + \{P_s^*\}), \quad (10)$$

Действительные реакции $\{r'\}$ по концам каждого стержня рамы в местной системе координат рамы в свободной от связей системе рамы равны

$$\{r'\} = [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\Delta\} - \{P'_s\}. \quad (11)$$

Искомые перемещения и изгибающие моменты вычисляем по уравнениям (2) и (3).

Программа расчета стержневых систем CsdCAD в MathCAD. Выбирается основная система расчетной модели путем наложения требуемого количества связей. Вводят информацию о количестве узлов системы, количестве стержней системы, их жесткостях. Вводят координаты узлов, коэффициенты линейной и угловой податливости начала и конца каждого стержня, узловые и распределенные на стержнях вертикальные нагрузки. Далее начинается работа программы: исходные данные преобразуются к требуемому виду, определяются длины элементов и углы наклона каждого стержня по отношению к положительному направлению оси x , формируется вектор $\{FE_{geom.}\}$, формируется и решается для каждого стержня с распределенной нагрузкой система нелинейных уравнений (5), позволяющая определить вектор опорных реакций $\{P'_s\}$. Формируется матрица преобразований координат и диагональная матрица $\{E\}$, необходимая для вычеркивания столбцов и строк из матрицы жесткости всей системы, формируется вектор узловых нагрузок $\{P_u\}$, и вектор опорных реакций стержней $\{P'_s\}$ по (8), которые в сумме дают вектор нагрузок $\{P\}$. Затем формируется матрица жесткости всей системы K_0 . Алгоритм формирования матрицы жесткости всей системы показан на рисунке 2. Сначала формируется матрица жесткостей $[K_0]$ без учета связей в узлах системы. Затем, путем умножения матрицы $[K_0]$ на диагональную матрицу $[E]$, формируется вектор $\{K_{so}\}$, содержащий окончательную матрицу внешней жесткостей $[T]$ и две вспомогательные матрицы $[S]$ и $[Q]$, необходимые для работы вычислительного ядра программы. Далее решается уточненная матричная система уравнений (1). В результате, определяются перемещения узлов и усилия в стержнях системы, и формируются результаты в графическом виде средствами графических построений.

```

K0 := for s ∈ 1 .. (cols(XY) · 3)
      for n ∈ 1 .. (cols(XY) · 3)
        Ts,n ← 0
      for q ∈ 1 .. cols(FE)
        EI ← RGDT1,q
        EA ← RGDT2,q
        l ← FEgeom1,q
        a ← FEgeom2,q
        Ksl ← KE(EA, EI, a, l)1, FEtype1,q

        i ← FE1,q
        j ← FE2,q
        f(n) ← 3 · (n - 1)
        (a b c) ← [(f(i) + 1) (f(i) + 2) (f(i) + 3)]
        (x y z) ← [(f(j) + 1) (f(j) + 2) (f(j) + 3)]
        for k ∈ a, b, c, x, y, z
          for t ∈ a, b, c, x, y, z
            p ← (k - f(i)) if k = a ∨ k = b ∨ k = c
            p ← (k - f(j) + 3) if k = x ∨ k = y ∨ k = z otherwise
            m ← (t - f(i)) if t = a ∨ t = b ∨ t = c
            m ← (t - f(j) + 3) if t = x ∨ t = y ∨ t = z otherwise
            Tk,t ← Tk,t + Kslp,m

T

```

```

Ksol := q ← 1
        s ← 1
        for i ∈ 1 .. cols(Ej)
          if E1,i = 1
            Qq,i ← i
            q ← q + 1
          for i ∈ 1 .. rows(Q)
            Si,i ← Pq(Qi,i), i
            for j ∈ 1 .. rows(Q)
              Tj,j ← K0(Qi,i), (Qj,i)

(T)
(S)
(Q)

```

Рисунок 2 – Алгоритм формирования глобальной матрицы жесткостей

Примеры расчета рам по программе CsdCAD. По разработанной программе в статье представлены две расчетные модели рам и показаны результаты их расчета рам стержней, нагруженных равномерно распределённой нагрузкой. Результаты расчета изложены в таблицах 1 и 2.

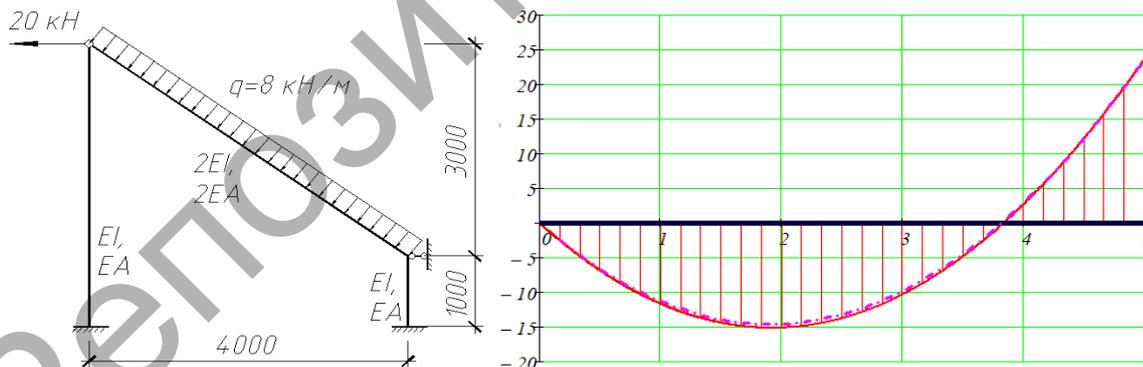


Рисунок 3 – Расчетная схема рамы и эпюры изгибающих моментов в стержне, нагруженном поперечной распределенной нагрузкой [2]

Таблица 1 – Результаты расчета рамы [2], представленной на рисунке 3

Условия деформирования стержня рамы с учетом продольных деформаций	M_{T1} , кНм	M_{T2} , кНм	M_{T3} , кНм	M_{T4} , кНм	M_{T5} , кНм
Расчет выполнен по МКЭ, [2, стр. 52] при $EI=1000$ кНм ² , $EA=10000$ кН	11.288	14.575	9.863	-2.849	-23.562
Расчет по разработанной программе при $EI=1000$ кНм ² , $EA=10000$ кН	11.648	15.105	10.308	-2.652	-23.566

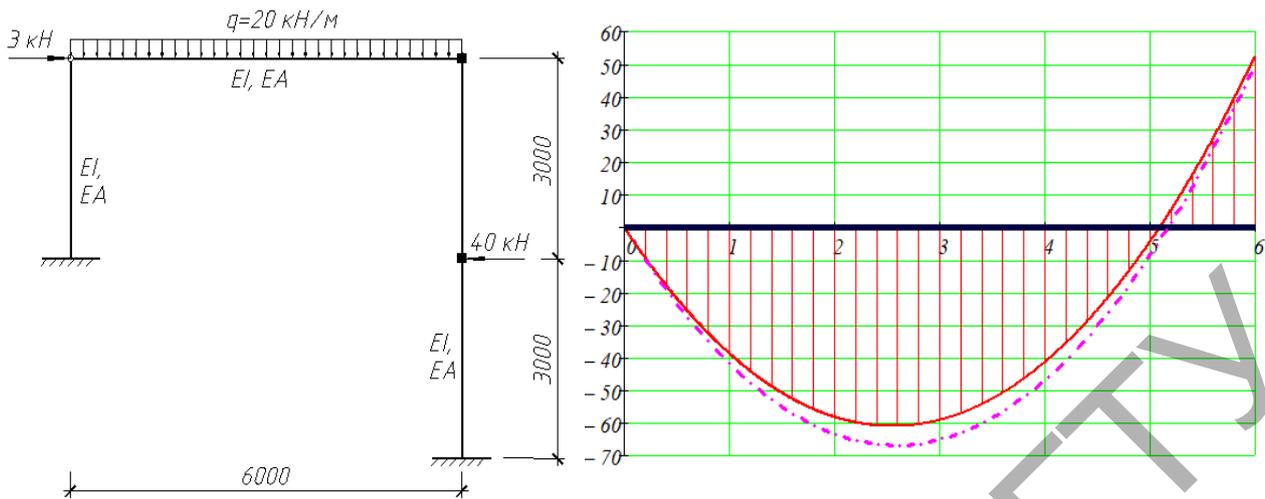
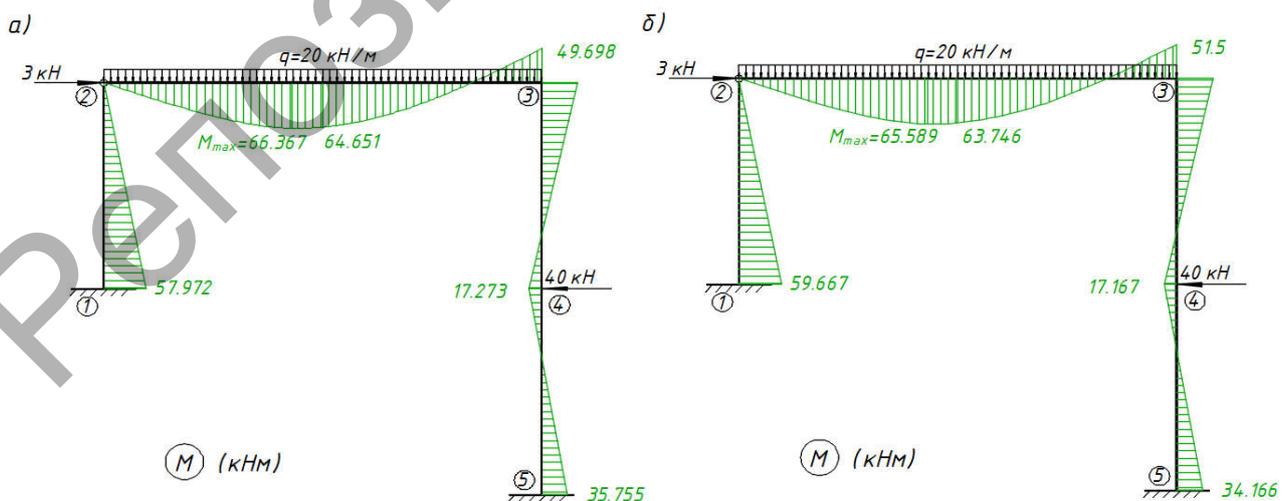


Рисунок 4 – Расчетная схема рамы и эпюры изгибающих моментов в стержне, нагруженном поперечной распределенной нагрузкой [3, стр. 368]

Таблица 2 – Результаты расчета (рисунок 3) по разработанной программе

Условия деформирования стержня рамы	M_{T1} , кНм	M_{T2} , кНм	M_{T3} , кНм	M_{T4} , кНм	M_{T5} , кНм	M_{T6} , кНм
Без учета продольных деформаций при $EA=10000$ кН	41.717	63.435	65.152	46.87	8.587	-49.695
С учетом продольных деформаций при $EA=10000$ кН	38.680	58.225	59.079	41.262	4.361	-52.477

Результаты расчета всех стержней рамы без учета продольных деформаций и с учетом продольных деформаций всех ее стержней, представлен на эпюрах изгибающих моментов (рисунок 5).



а) – расчет без учета продольных деформаций; б) – тоже с учетом продольных деформаций
Рисунок 5 – Эпюры изгибающих моментов по результатам расчета программы

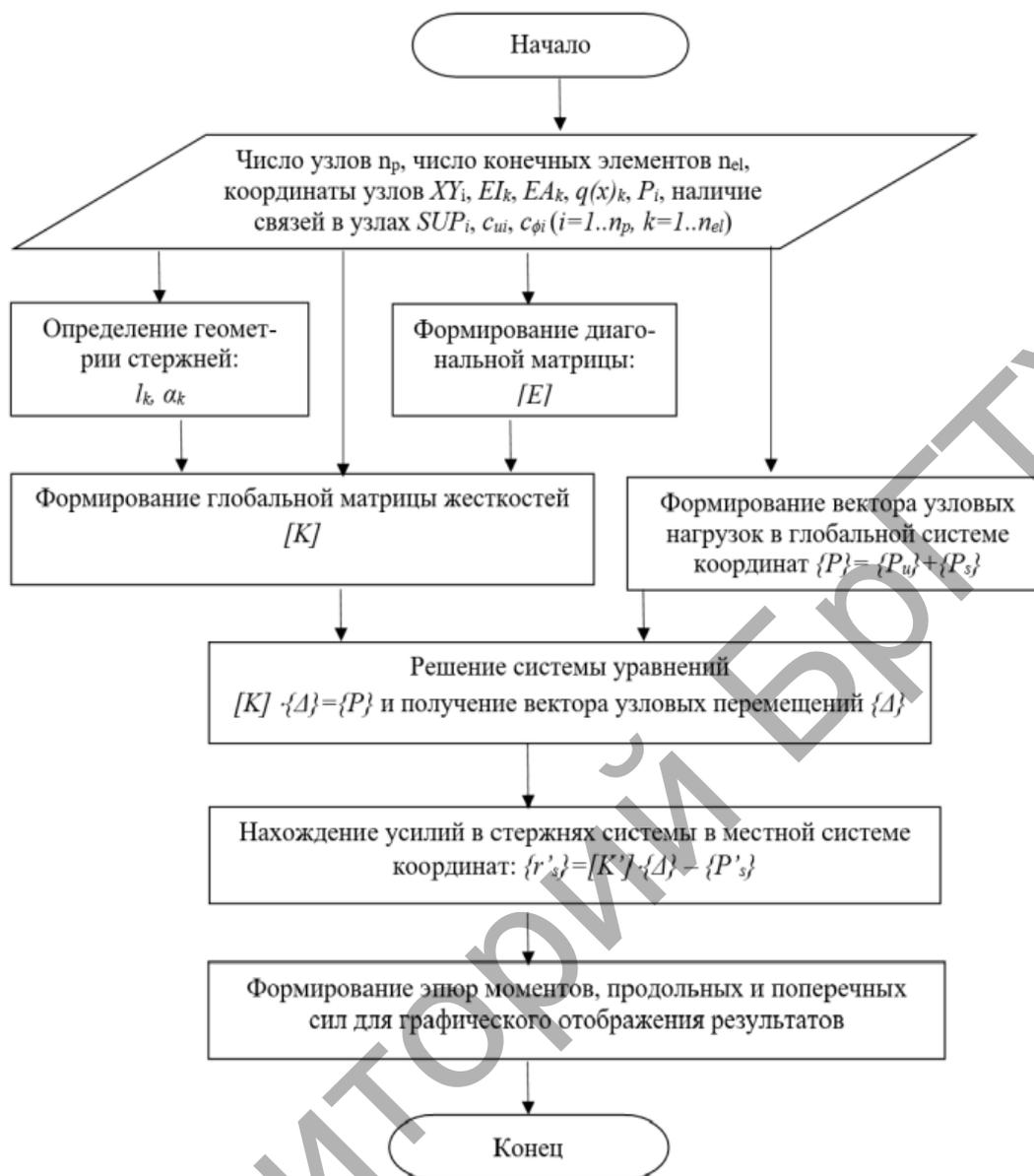


Рисунок 6 – Блок-схема алгоритма и компьютерной программы CsdCAD

Сравнительный анализ результатов расчета показал высокую точность разработанного нами алгоритма и компьютерной программы CsdCAD, что легко доказать сравнив результаты, представленные на рисунке 4.4 с результатами, полученными док. тех.наук, профессором А.А. Борисевичем [3, рис. 9.40].

Общая схема работы алгоритма и компьютерной программы CsdCAD видна из анализа блок-схемы, представленной на рисунке 6.

Заключение. В статье изложена аналитико-численная методика расчета плоских стержневых систем произвольной геометрической структуры, построенная на основе разрешающих уравнений в аналитической форме для прямолинейного гибкого стержня [1], разработанном алгоритме в матричной форме, и численной его реализации в компьютерной программе CsdCAD средствами программирования PTS MathCAD.

Компьютерная программа CsdCAD, разработанная средствами программирования математической среды PTS MathCAD, содержит три функционально увязанные между собой части (см. блок-схему программы на рисунке 6): блок ввода исходной информации; вычислительное ядро программы; блок обработки результатов расчета. Наибольшую ценность компьютерной программы представляет вычислительное ядро, в котором реализован алгоритм вы-

числительных и логических процедур, разработанных на основе теоретических исследований, изложенных в статье [1].

Достоинство программы CsdCAD обоснованно системой нелинейных разрезающих уравнений (5), которая позволила не только учесть влияние продольных деформаций стержневой системы сложной геометрической структуры, но и выполнить расчет *отдельных стержней* в принятой основной системе по деформированной схеме, а после вычисления опорных реакций в узлах системы, позволила с *аналитической точностью вычислять перемещения и внутренние усилия в ее стержнях*. Сказанное подтверждают результаты многочисленных примеров, рассчитанных по компьютерной программ CsdCAD, два из которых приведены в настоящей работе.

Кроме того, разработанная методика расчета, алгоритм расчета и его реализация в компьютерной программе средствами программирования PTS MathCAD открывают возможность автору работы продолжать научные исследования с целью построения алгоритма и последующей его реализацией в компьютерной программе, позволяющей с аналитической точностью выполнять расчет моделей стержневых систем сложной геометрической структуры по деформационной схеме равновесия. Это позволит предельно близко приблизить расчетные их модели к конструктивным стержневым системам сложной геометрической структуры, обладающие повышенной деформативностью.

Список источников

1. Уласевич, В.П. Статический расчет гибких стержневых систем сложной геометрической структуры методом деформаций / В.П. Уласевич // Вестник БрГТУ. – 2018. № 1(109): Строительство и архитектура. – С. 73–77.
2. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие / В.И. Игнатюк. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.
3. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.