

Фрагментарная сшивка решения комплексных задач по физике

*А.А. Гладышук,
доцент кафедры физики УО «Брестский государственный
технический университет», к.ф.-м.н.
Т.Л. Кушнер,
заведующий кафедрой физики БрГТУ, к.ф.-м.н., доцент
О.Ф. Савчук,
ассистент кафедры физики БрГТУ
e-mail: phys@bstu.by*

***Аннотация.** В статье на примере комплексной задачи по физике «Электростатическое поле в вакууме» рассмотрено фрагментарное решение задачи, посвященной одной теме, которое позволяет студенту ознакомиться с необходимым материалом и методическими приемами для решения собственного индивидуального задания. Обращено внимание на математическое сопровождение решения задачи, которое студент технического вуза осваивает одновременно. Предложенная методика решения задачи не является единственно возможной и может варьироваться преподавателем.*

***Ключевые слова:** физика, электростатика, комплексные задачи.*

Fragmentary stitching of solution of complex tasks in physics

*A.A. Gladyschuk,
Ph.D., Associate Professor, Department of Physics
T.L. Kushner,
Ph.D., Associate Professor, Head of Department of Physics
O.F. Savchuk,
Assistant of Department of Physics,
Brest State Technical University*

***Abstract.** The article deals with the example of a complex task «Electrostatic Field in Vacuum». It is considered fragmentary solution of a task devoted to one theme, which allows a student to get acquainted with necessary material and methodic ways for the solution of personal individual task. Attention is paid to mathematical accompaniment of the solution of a task, which a student of a technical university masters at the same time. The offered procedure of the solution of the task is not the only possible one and can be varied by the teacher.*

***Keywords:** physics, electrostatics, complex tasks.*

Анализ существующих сборников задач по физике показывает, что по курсу физики для технических университетов имеется примерно 700 задач, исчерпывающих содержание этого курса в фактическом и идейном

плане и реализующих нетривиальное взаимодействие идей и подходов. Можно выделить примерно 200 задач, решение которых представляется совершенно необходимым, что составляет около 10 задач на одну тему курса [1-3].

В качестве одной из возможных альтернатив предлагается использование комплексных задач [4, 5]. Это – задачи, в которых на едином материале рассматривается весь комплекс вопросов и идей достаточно большой темы курса. Любое задание имеет до 100 вариантов условий.

Универсальность комплексных задач позволяет использовать их не только для обучения, но и как материал для контроля полученных знаний. Методически обсуждение комплексных задач со студентами на практических занятиях несколько отличается от традиционно принятой формы, и требует от преподавателя разумной импровизации. Как правило, студентом комплексная задача, как единое целое, не решается. Преподаватель разбивает условно всю комплексную задачу на блоки, каждый из которых представляет собой отдельную задачу, объединенную с другими общим условием и темой. По завершении изучения темы каждому студенту выдается индивидуальная комплексная задача, которая является его обязательным домашним заданием. Следует отметить, что такой подход решает еще одну важную проблему: организацию самостоятельной работы студентов под руководством преподавателя. В качестве примера рассмотрим задачу по теме «Электростатическое поле в вакууме».

Условие: Система заряженных тел может состоять из точечных зарядов, прямолинейных стержней, тонкого кольца, а также тонкого сплошного диска или диска с круглым отверстием. Тонкий диск или тонкое кольцо могут быть расположены в одной из координатных плоскостей, перпендикулярных плоскости рисунка, и симметрично началу координат (рис. 1). Тонкие прямолинейные стержни A_1B_1 и A_2B_2 лежат в плоскости рисунка и перпендикулярны одной из координатных осей.

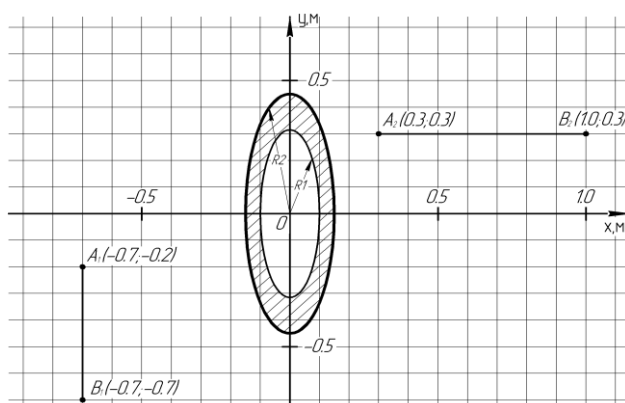


Рис.1. Расположение заряженных тел

Электрические заряды могут быть распределены следующим образом:
 а) точечные заряды q_1, q_2 и q_3, q_4 , расположенные в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно, имеют разные величины и знаки зарядов;

b) тонкие прямолинейные стержни A_1B_1 и A_2B_2 равномерно заряжены с линейной плотностью заряда τ_1 и τ_2 , соответственно;

c) тонкое кольцо с радиусом R_2 равномерно заряжено с линейной плотностью заряда τ_1 ;

d) тонкий диск с радиусом R_2 равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда σ . Тонкий диск может быть сплошным или с круглым отверстием радиусом R_1 .

Диэлектрическая проницаемость среды равна $\epsilon = 1$. Координаты точек A_1, B_1 и A_2, B_2 заданы в метрах. На всех телах, кроме точечных зарядов, равномерно распределен заряд (вариативно может меняться знак).

Задание 1. Согласно рисунку Вашего варианта, самостоятельно выберите точку C с координатой X_c (или Y_c) на оси, перпендикулярной плоскости тонкого диска. Найдите величину и направление вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}_{1,2}$, создаваемого точечными зарядами q_1 и q_2 в точке C .

Решение: Подготовим рисунок, иллюстрирующий условие задания. На нем изобразим только точечные заряды q_1 и q_2 , расположенные в точках A_1 и B_1 , соответственно (рис. 2). В нашем случае точечные заряды имеют различные знаки. Поскольку тонкий диск расположен в плоскости, перпендикулярной оси OX , то выберем точку C с координатой X_c (значение самой координаты пока не задаем).

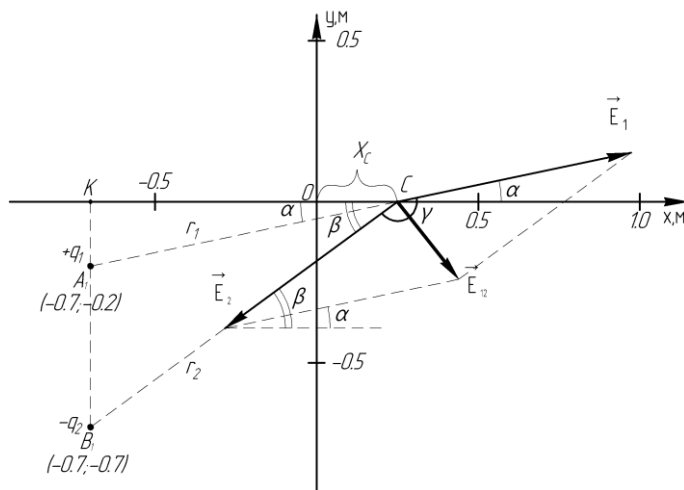


Рис. 2. Напряженность электростатического поля, создаваемого точечными зарядами

Примечание 1. Напряженность \vec{E} является основной силовой характеристикой электростатического поля. Согласно закону Кулона напряженность электростатического поля, создаваемая точечным зарядом, равна:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (1)$$

Обратим внимание, что закон Кулона сформулирован только для точечных зарядов.

Силловые линии электростатического поля – это условные линии, в любой точке которых направление вектора напряженности электростатического поля совпадает с касательной.

Заметим также, что силловые линии электростатического поля принято начинать на положительных зарядах и заканчивать на отрицательных зарядах, поэтому вектор \vec{E}_1 направлен от положительного заряда по линии, соединяющей точку A_1 с точкой C (см. рис. 2), а вектор \vec{E}_2 – направлен соответственно к отрицательному заряду $-q_2$.

Из рис. 2 следует, что величины напряженностей E_1 и E_2 электростатического поля в точке C согласно (1) равны соответственно:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2}. \quad (2)$$

Расстояние r_1 (или r_2) можно найти, построив прямоугольный треугольник с вершинами A_1 (или B_1), C и K (см. рис. 2). Здесь точка K – это точка пересечения линии, соединяющей точечные заряды q_1 и q_2 , с осью координат OX . В нашем случае точка K имеет координаты $(-0,7; 0)$. Гипотенуза полученного треугольника – это расстояние от точечного заряда до точки C , которое можно определить по теореме Пифагора.

Так как \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – вектора, то суммарная напряженность электростатического поля в точке C в соответствии с принципом суперпозиции будет равна векторной сумме $\vec{E}_{1,2} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Примечание 2. Принцип суперпозиции. Напряженность электростатического поля в данной точке равна векторной сумме всех напряженностей, создаваемых в данной точке отдельными точечными зарядами:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (3)$$

Векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 можно сложить по правилу параллелограмма и, воспользовавшись теоремой косинусов, вычислить значение вектора напряженности поля $\vec{E}_{1,2}$ в точке C .

Примечание 3. Теорема косинусов. Если в треугольнике известны две стороны a и b и угол θ между ними, то третья сторона c находится, как

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}. \quad (4)$$

Аналогично в точке C определяется напряженность, создаваемая точечными зарядами q_3 и q_4 . После чего вычисляется результирующий вектор напряженности электростатического поля \vec{E}_C в точке C , создаваемый всеми четырьмя точечными зарядами.

Задание 2. Найдите величину и направление вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}_{A_1B_1}$ в точке C , создаваемого тонким стержнем A_1B_1 , равномерно заряженным с линейной плотностью заряда τ_1 .

Решение: Подготовим рисунок, на котором изобразим только тонкий заряженный стержень A_1B_1 и точку C с координатой X_c , в которой необхо-

димо вычислить создаваемую стержнем напряженность электростатического поля (рис. 3).

Выделим произвольно (т.е. в любом месте) на стержне A_1B_1 (считаем, что стержень несёт положительный заряд) элементарный участок dl с точечным зарядом $dq = \tau \cdot dl$ и построим прямоугольный треугольник, вершинами которого будут dl , K и C . Тогда катеты прямоугольного треугольника будут соответственно равны $(l+0,2)$ и $(0,7+X_C)$, а гипотенузой будет являться r – расстояние от произвольно выделенного участка dl до точки C .

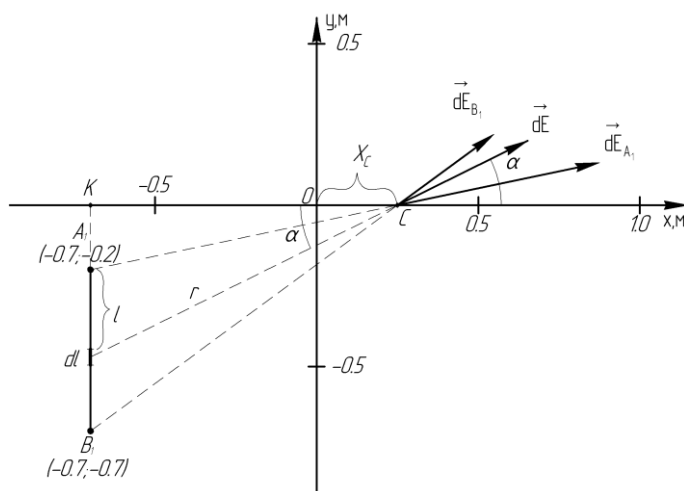


Рис. 3. Напряженность электростатического поля, создаваемого тонким заряженным стержнем

Тогда согласно (1):

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (5)$$

Обратим внимание, что длина l здесь задается произвольно. Угол между катетом $(0,7+X_C)$ и гипотенузой r обозначим через α .

Так как требуется вычислить напряженность электрического поля в точке C , создаваемую заряженным стержнем, то нетрудно заметить, что при переходе от одного выбранного элемента длины стержня к другому направление вектора \vec{dE} также будет меняться от начального направления \vec{dE}_A (см. рис. 3) до конечного направления \vec{dE}_B . Это вынуждает процедуру нахождения вектора $\vec{E}_{A_1B_1}$ разбить на два этапа: вначале найти проекции вектора $\vec{E}_{A_1B_1}$ на оси координат $E_{A_1B_1}^x$ и $E_{A_1B_1}^y$, а затем по теореме Пифагора найти величину самого вектора. Например,

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2} \cos\alpha. \quad (6)$$

Выражение, аналогичное (6), требуется записать для каждого элемента длины заряженного стержня dl , на которые условно разбит стержень A_1B_1 . Но эту задачу нам поможет решить интегрирование, т.е. суммирова-

ние всех проекций на соответствующую ось векторов напряженности, создаваемых отдельными элементами длины стержня в точке C (см. принцип суперпозиции в Примечании 2).

Из прямоугольного треугольника с вершинами dl , K и C согласно рис. 3, запишем:

$$\cos \alpha = \frac{0,7 + X_C}{r}. \text{ Откуда, } r = \frac{0,7 + X_C}{\cos \alpha}. \quad (7)$$

$$\text{Из того же треугольника: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,2 + l}{0,7 + X_C}. \quad (8)$$

Чтобы выразить dl , необходимо продифференцировать равенство (8): слева по углу α , справа – по величине l . Тогда имеем:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{1}{0,7 + X_C} dl.$$

Откуда выразим

$$dl = \frac{0,7 + X_C}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha, \quad (9)$$

где X_C – фиксированная координата.

Подставив выражения для r из (7) и dl из (9) в (6), получаем:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \tau_1 \cdot \frac{1}{0,7 + X_C} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha. \quad (10)$$

Эта процедура в математике называется заменой переменных, и в выражении (10), в результате, осталась только одна переменная величина – угол α . Конечно, может быть выбрана и другая переменная.

Тогда, интегрируя выражение (10), в соответствии с принципом суперпозиции найдем проекцию вектора напряженности $\vec{E}_{A_1 B_1}$ на ось OX , т.е. $E_{A_1 B_1}^x$. Запишем интеграл выражения (10):

$$E_{A_1 B_1}^x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_1 \frac{0,7 + X_C}{0,2} \int \cos \alpha \, d\alpha. \quad (11)$$

Примечание 4. Из таблицы неопределенных интегралов известно:

$$\int \cos \alpha \, d\alpha = \sin \alpha + C,$$

$$\int \sin \alpha \, d\alpha = -\cos \alpha + C, \text{ где } C \text{ – постоянная интегрирования.}$$

В нашем случае тонкий стержень $A_1 B_1$ имеет конечную длину, поэтому значения угла α будут меняться в диапазоне от α_1 для точки A_1 до α_2 для точки B_1 (рис. 3). Здесь значения углов α_1 и α_2 будут являться нижним и верхним пределами интегрирования, т.е. интеграл в выражении (11) вычисляется как определенный:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha = \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1. \quad (12)$$

Значения углов α_1 и α_2 вычисляются из соответствующих прямоугольных треугольников (см. рис. 3). Длина стержня A_1B_1 определяется по координатам варианта, значение координаты X_c задайте при вычислении самостоятельно. Проекцию вектора напряженности $\vec{E}_{A_1B_1}$ на ось OY , т.е. $E_{A_1B_1}^y$, будем искать, действуя аналогичным образом. После чего определяется величина и направление напряженности электростатического поля $E_{A_1B_1}$ в точке C , создаваемого заряженным тонким стержнем A_1B_1 .

Аналогично заданию 2 находим величину и направление вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}_{A_2B_2}$, создаваемого стержнем A_2B_2 в точке C .

Задание 3. Найдите величину и направление вектора напряженности электростатического поля \vec{E}_{R_2} , создаваемого тонким заряженным кольцом в точке C . Тонкое кольцо радиусом R_2 равномерно заряжено с линейной плотностью заряда τ_1 .

Решение: Сделаем рисунок, на котором покажем только тонкое кольцо с радиусом R_2 и точку C с координатой X_c , в которой необходимо вычислить напряженность электростатического поля, создаваемого кольцом (рис. 4).

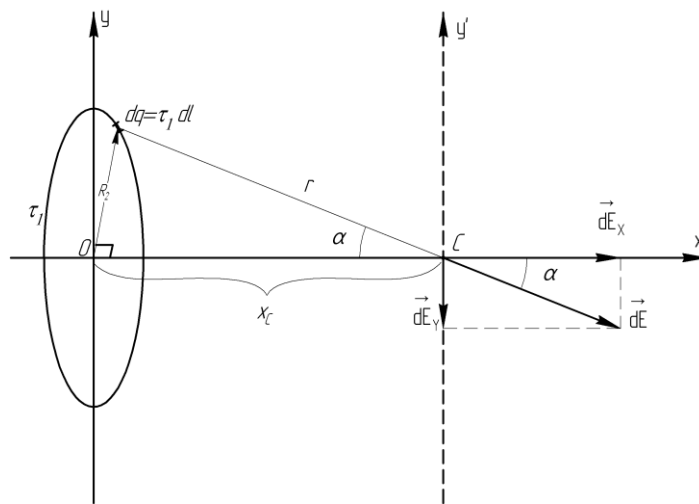


Рис. 4. Напряженность электростатического поля, создаваемого тонким кольцом

Тонкое заряженное кольцо радиусом R_2 необходимо также условно разбить на элементарные участки длиной dl , заряд на которых можно принять за точечный $dq = \tau_1 dl$.

Отметим, что для данного случая постоянными сохраняются R_2 , r и угол α (см. рис. 4). Очевидно, что при перемещении от одного участка dl кольца к другому вектор \vec{dE} будет вращаться вокруг точки C , образовав в

результате замкнутую коническую поверхность. Но ввиду симметрии этой поверхности, проекции вектора \vec{dE} на все другие направления кроме оси X в нашем случае будут взаимно компенсировать друг друга. Это объясняется тем, что для каждого участка отрезком dl с зарядом dq существует диаметрально противоположный такой же участок с таким же зарядом.

Тогда результирующая напряженность электростатического поля, создаваемая заряженным тонким кольцом будет направлена для нашего случая (рис. 4) по оси X , т.е. необходимо вычислить только $E_{R_2}^x$, поскольку теперь складываются только сонаправленные вектора \vec{dE}_x .

Так как $dE_x = dE \cdot \cos\alpha$ (см. рис. 4), то выразив заряд dq через линейную плотность заряда τ_1 ($dq = \tau_1 dl$), запишем:

$$dE_x = dE \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau_1 dl}{r^2} \cos\alpha. \quad (13)$$

Как видно из рис. 4, расстояние r между точечным зарядом dq и точкой C можно определить из прямоугольного треугольника с вершинами O , dl и C . В выражении (13) переменной является только одна величина dl . Произведя интегрирование по всей длине кольца, т.е. переменная dl меняется в пределах от 0 до $2\pi R_2$, получаем:

$$E_{R_2}^x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_1 \frac{X_C}{(R_2^2 + X_C^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R_2 = \frac{R_2}{2\epsilon_0} \tau_1 \frac{X_C}{(R_2^2 + X_C^2)^{3/2}}. \quad (14)$$

Задание 4. Найдите величину и направление вектора напряженности электростатического поля \vec{E}_C в точке C , создаваемого равномерно заряженным тонким диском с радиусом R_2 и поверхностной плотностью заряда σ . Точка C находится на оси симметрии диска, совпадающей с одной из координатных осей. В зависимости от варианта задания в тонком диске может быть вырезано круглое отверстие с радиусом R_1 .

Решение: Подготовим рисунок, иллюстрирующий условие задания, на котором покажем только тонкий диск с круглым отверстием и точку C с координатой X_C , в которой необходимо вычислить создаваемую диском напряженность электростатического поля (рис. 5).

Закон Кулона требует выделить на плоском диске элементарную поверхность $dS = dR dl$ (вставка (б) к рис. 5), где будет сосредоточен точечный заряд $dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot dR \cdot dl$. Для проведения вычислений разобьем условно диск на концентрические тонкие кольца dR , которые также условно поделим на одинаковые участки dl малой длины. Радиус концентрических тонких колец изменяется от R_1 до R_2 , а их длина соответственно от 0 до $2\pi R_1$ ÷ $2\pi R_2$.

Таким образом, вычисление напряженности электростатического поля в точке C разбивается на два этапа: 1-й – вычисление напряженности электростатического поля в точке C для тонкого кольца dR и радиусом R (см. задание 3); 2-й – суммарное вычисление напряженности электростатического поля в точке C для всех тонких колец dR и радиусами от R_1 до R_2 . В математике такую процедуру называют двойным интегрированием.

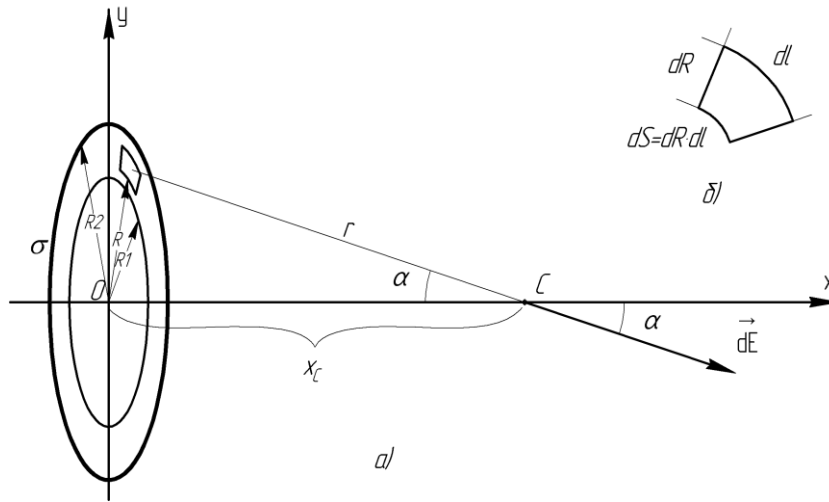


Рис. 5. Напряженность электростатического поля, создаваемого тонким диском (а), элементарная поверхность dS диска (б)

1-й этап: Напряженность электростатического поля в точке C , создаваемого тонким кольцом dR с радиусом R (где $R_1 \leq R \leq R_2$) можно вычислить аналогично заданию 3. Тонкое кольцо условно поделим на одинаковые малые участки длиной dl , и заряд dq , находящийся на участке длиной dl , примем за точечный.

Выполнив действия, аналогичные заданию 3, получим, что напряженность электростатического поля в точке C , создаваемого одним тонким кольцом dR радиусом R , равна:

$$E_R^x = \frac{X_C}{2 \varepsilon_0} \sigma \frac{R dR}{(R^2 + X_C^2)^{3/2}}, \quad (15)$$

2-й этап: Найдем напряженность поля в точке C , создаваемую всеми тонкими кольцами dR . Для этого полученное выражение (15) проинтегрируем еще раз, но уже по переменной R , которая изменяется в пределах от R_1 до R_2 .

$$E_\sigma^x = \frac{X_C}{2 \varepsilon_0} \sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{R dR}{(R^2 + X_C^2)^{3/2}}. \quad (16)$$

Этот интеграл требует замены переменных: $R^2 + X_C^2 = y$, где y – новая переменная, тогда $dy = 2R dR$ (дифференцируем выражение $R^2 + X_C^2$, принимая X_C^2 за постоянную). Перепишем выражение (16) через новую переменную:

$$E_\sigma^x = \frac{X_C}{2 \varepsilon_0} \sigma \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dy}{y^{3/2}}. \quad (17)$$

Используя формулу табличных интегралов, вычислим неопределенный интеграл, как $\int \frac{dy}{y^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{y}} + C$.

Подставив пределы интегрирования в выражение (17) и возвращаясь к старой переменной $R^2 + X_C^2$, окончательно получаем:

$$E_{\sigma}^x = \frac{X_C}{2\varepsilon_0} \sigma \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{X_C}{2\varepsilon_0} \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} \right). \quad (18)$$

Подставив численные данные, вычисляем значение напряженности поля E_{σ}^x в точке C , которое создает тонкий заряженный диск. Значение координаты X_C сохраняется таким, как и в предыдущих заданиях.

Задание 5. Найдите графически и вычислите аналитически величину и направление результирующего вектора напряженности электростатического поля \vec{E}_C в точке C , создаваемую тонкими стержнями A_1B_1 и A_2B_2 , линейно заряженными с линейной плотностью заряда, τ_1 и τ_2 а соответственно, а также плоским тонким диском, несущим на себе заряд с поверхностной плотностью σ .

В условиях, когда на дисциплину «Физика» в технических вузах отводится все меньшее количество часов, возникает необходимость в поиске новых способов подачи материала на практических занятиях [6]. Авторы статьи предложили один из вариантов рассмотрения темы «Электростатическое поле в веществе», описали технологию и методику решения комплексной задачи на указанную тему.

Литература

1. Чопчиц, Н.И. Гладыщук, А.А. Современная парадигма физпрактикума по решению задач и комплексные задачи по физике: Сб. тезисов республиканского науч.-метод. конф. / Редкол.: А.А. Гладыщук [и др.]. – Брест, БрПИ, 1992. – С. 10.
2. Гладыщук, А.А. Концепция и практический опыт преподавания физики в Брестском политехническом институте: Сб. тезисов республиканского науч.-метод. конф. / Редкол.: А.А. Гладыщук [и др.]. – Брест, БрПИ, 1992. – С. 18.
3. Чопчиц, Н.И. и др. Комплексные задачи в курсе физики: Сб. методических материалов по вопросам преподавания физики в высшей школе республики. – Минск: БГУ, 1991. – 114 с.
4. Чопчиц, Н.И. Комплексные задачи по физике. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2014. – 108 с.
5. Барковская, М.М., Гладыщук, А.А., Савчук, О.Ф. Физика I: методические рекомендации. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2019. – 63 с.
6. Кушнер, Т.Л. Применение фронтальных и комплексных задач в дисциплинах физической направленности: Сб. материалов республиканского науч.-метод. конф., посвящ. 70-летию со дня рожд. Н.И. Чопчица / Редкол.: М.М. Барковская [и др.] – Брест: Изд-во БрГТУ, 2019. – С. 21–24.