

## АНАЛИЗ НДС НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЛИТЫ НА ЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Семенюк С.Д., Кумашов Р.В.

**Введение.** В условиях современного строительства, оснащенного высокопроизводительными механизмами и осуществляемого в сжатые сроки, важно обеспечить непрерывную и бесперебойную доставку строительных материалов и изделий к возводимым сооружениям. Это возможно осуществить при четко организованной работе автомобильного транспорта, обеспеченного быстро возводимыми дорогами, надежными в эксплуатации при любых погодных условиях.

В настоящее время при возросшей численности автопарка во всех отраслях народного хозяйства обычные дороги /грунтовые, гравийно-щебеночные/ не удовлетворяют полностью требованиям повышения производительности автотранспорта. Плохое состояние автодорог вызывает частые простои, аварии автотранспорта и других машин и механизмов, преждевременный их износ, приводит к перерасходу горюче-смазочных материалов.

Затрачиваемые на непрерывный ремонт дорог большие средства и трудовые ресурсы обычно не дают должного эффекта, а применение монолитных покрытий капитального типа обходится очень дорого.

Применение сборно-разборных покрытий из железобетонных плит позволяет избежать чрезмерного расхода материалов и средств. Будучи надежными в эксплуатации, эти дороги отвечают требованиям, выдвигаемым нуждами народного хозяйства. Такие дороги можно строить в любое время года, на любом грунте и сразу же эксплуатировать; строительство их поддается полной механизации, не требуется специального оборудования и машин. Сборные плиты могут изготавливаться как в заводских, так и в полигонных условиях без применения специального оборудования.

Однако, неравномерные деформации основания и несимметричность приложения нагрузки приводят к возникновению в сечениях дорожных плит изгибающих и крутящих моментов, что пагубно сказывается на эксплуатационных характеристиках данных плит. В общем случае плиты работают на поперечный изгиб с кручением, в частности – на поперечный изгиб. Поэтому требуется учитывать влияние каждого из воздействий на несущую способность железобетонных плитных конструкций при их проектировании и изготовлении.

**Статический расчет.** Статический расчет плиты на упругом полупространстве выполняется способом Жемочкина. Данный подход позволяет рассчитывать плиты на произвольном линейно-упругом деформируемом основании любой формы в плане и загруженные произвольной нормальной к срединной плоскости плиты внешней нагрузкой [1].

Алгоритм статического расчета железобетонной плиты на упругом полупространстве предусматривает шаговый метод последовательных приближений с использованием итерационного метода упругих решений для вычисления относительных деформаций в элементарных площадках.

Плита разбивается на  $m \times n$  прямоугольных участков (рисунок 1). В середине каждого участка ставится связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием, а в центре плиты вводится защемление. Принимается, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение реактивных давлений в пределах участка [2].

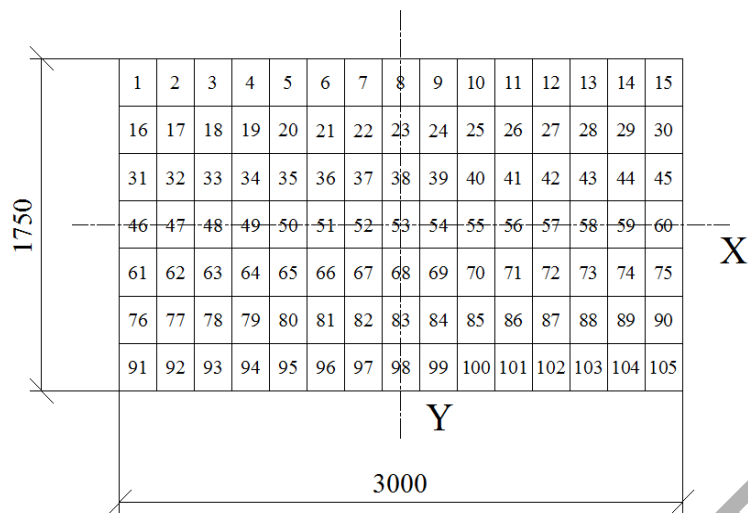


Рисунок 1 – Пример разбивки плиты на прямоугольные участки

Система канонических уравнений способа Жемочина имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \delta_{ik} R_k + \varphi_{0x} y_i + \varphi_{0y} x_i + u_0 + \Delta_{ip} = 0 \right); \\ - \sum_{k=1}^n R_k y_k + M_{px} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k x_k + M_{py} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k + Q = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u_0$ ,  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$  – линейное и угловые перемещения введенного защемления на плите;  $Q$ ,  $M_{px}$ ,  $M_{py}$  – равнодействующая внешних сил, действующих на плиту, и ее моменты относительно координатных осей;  $R_k$  – реактивные усилия.

В свою очередь каждый участок рассматривается как совокупность элементарных площадок, в пределах которых деформации считаются равномерно распределенными, а по высоте сечения элемента связанные гипотезой плоских сечений [3].

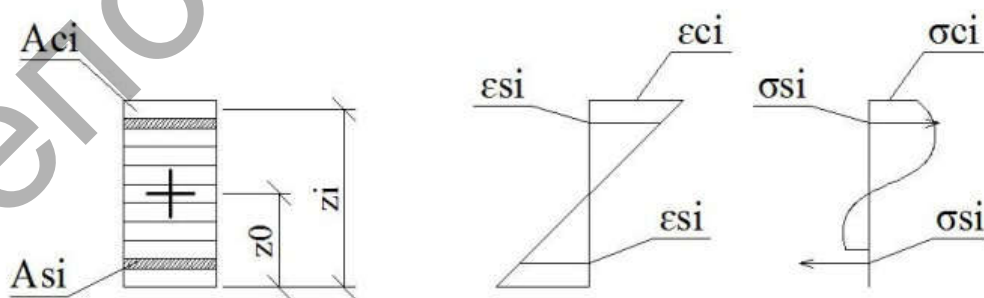


Рисунок 2 – Расчетное поперечное сечение плиты и распределение деформаций и напряжений

Армирование плиты заменяем элементарной площадкой эквивалентной толщины  $h = A_s / b$ , где  $A_s$  – суммарная площадь арматуры во взаимно перпендикулярных направлениях.

Связь между напряжениями и деформациями бетона принимаем в виде билинейной диаграммы (рисунок 2), в соответствии с которой эпюра нормальных напряжений в бетоне сжатой зоны представляется в виде прямоугольной трапеции [4]:

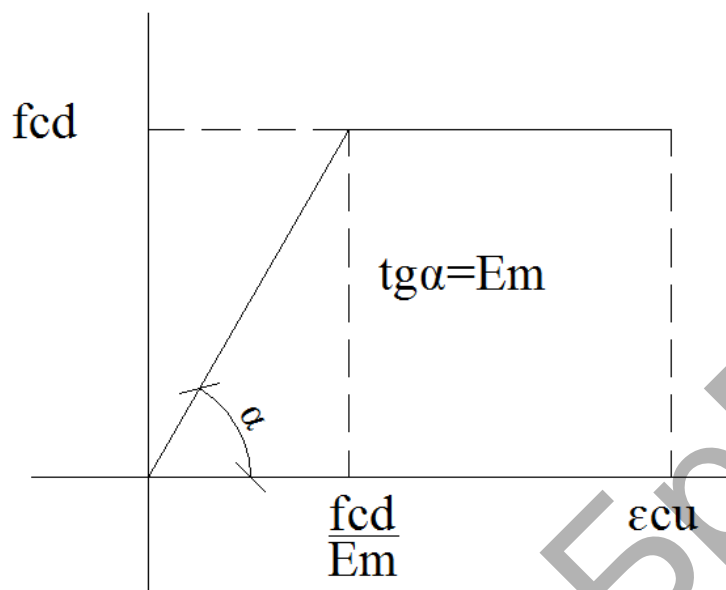


Рисунок 3 – График зависимости «напряжение-относительная деформация» для бетона

В качестве диаграммы деформирования арматуры, имеющей физический предел текучести, принимается билинейная диаграмма Прандтля [4].

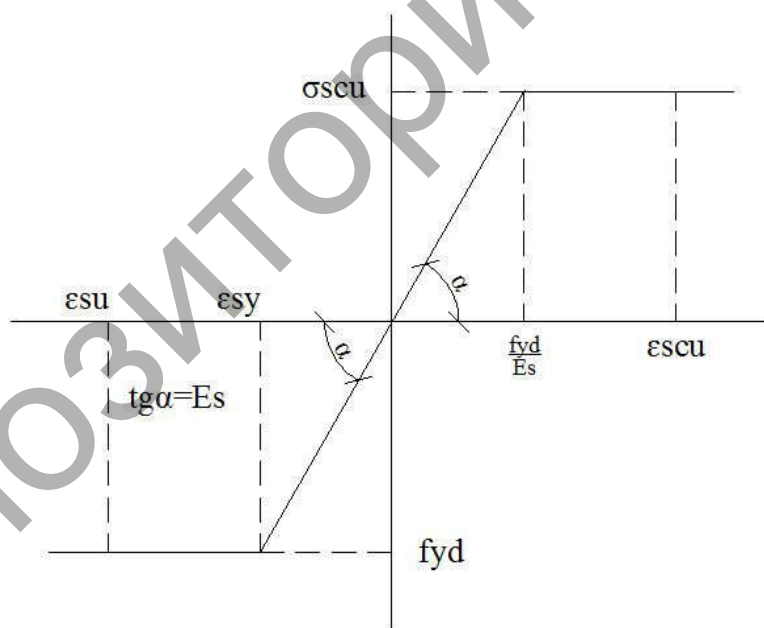


Рисунок 4 – График зависимости «напряжение-относительная деформация» для арматурной стали

При заданном усилии от внешней нагрузки задается положение центра изгиба сечения плиты в предположении упругой работы бетона и арматуры

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n E_{oi} A_i z_i}{\sum_{i=1}^n E_{oi} A_i} \quad (2)$$

где  $E_{oi}$  – начальный модуль упругости бетона или арматуры  $i$ -той элементарной площадки;

$z_i$  – расстояние от выбранной оси элемента до центра тяжести  $i$ -той элементарной площадки;

$A_i$  – площадь сечения  $i$ -той элементарной площадки;

$n$  – количество элементарных площадок бетона и арматуры.

При определении прогибов и кривизны плиты ограничимся следующими допущениями:

1 – точки плиты, лежащие до загрузки на нормали к нейтральной поверхности, остаются в процессе изгиба на нормали к ее нейтральной поверхности;

2 – нормальными напряжениями в направлении, поперечном в нейтральной поверхности, допустимо пренебрегать.

Основываясь на этих допущениях мы сможем все компоненты напряжений выразить через прогиб плиты, являющийся функцией двух координат в плоскости плиты [5]. Эта функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Прогибы нейтральной поверхности плиты будем искать в виде особого решения и совокупности частных решений Клебша [6]:

$$W(x, y) = W_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(x, y);$$

$$W_0(x, y) = \frac{Pb^2}{16\pi D} \times \left\{ \left[ \left( \frac{x-t}{b} - \frac{t}{b} \right)^2 + \left( \frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] \times \ln \left[ \left( \frac{x-t}{b} - \frac{t}{b} \right)^2 + \left( \frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] + 2 \left( \frac{xt}{b^2} - \frac{yz}{b^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[ 1 + \ln \left( \frac{t^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right] - \left( \frac{t^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \ln \left( \frac{t^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) - \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\}; \quad (4)$$

$$W_1(x, y) = \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}; \quad W_2(x, y) = \frac{2xy}{b^2};$$

$$W_3(x, y) = \frac{x}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \quad W_4(x, y) = \frac{y}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \dots,$$

где  $W_0(x, y)$  – особое решение;  $W_n(x, y)$  – частное решение Клебша, априори удовлетворяющее уравнениями равновесия плиты с защемлённой нормалью под действием сосредоточенной силы и кинематическим граничным условиям в защемлении;  $t, z$  – координаты точки приложения сосредоточенной силы;  $A_n$  – неопределённые коэффициенты;  $b$  – некоторый линейный размер плиты.

При определении коэффициентов канонических уравнений способа Жемочкина для расчета прямоугольной плиты на произвольном упругом основании можно написать:

$$\delta_{ik} = \frac{(P=1)(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b} (F_{ik}^0 + F_{ik}^1) + \frac{(P=1)b^2}{D} \left[ A_{22} \left( \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + 2B_{22} \frac{xy}{b^2} + \dots \right], \quad (5)$$

где  $F_{ik}^0$  – безразмерная функция для определения перемещений точки  $i$  на поверхности упругого основания от действия единичной силы, равномерно распределённой по прямоугольному участку  $k$  поверхности полупространства;  $F_{ik}^1$  – корректирует  $F_{ik}^0$  применительно к рассматриваемой модели упругого основания.

При определении коэффициентов канонических уравнений цилиндрическая жесткость является нелинейной величиной и определяется следующим выражением

$$D = \int_{-z_0}^{h-z_0} \frac{z^2 E(z)}{1-\nu(z)^2} dz. \quad (6)$$

Так как аналитическое выражение функции  $E(z)$  неизвестно, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой прямоугольников. Тогда выражение для цилиндрической жесткости принимает вид

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i^2}{1-\nu_i^2} \cdot h_i \quad (7)$$

После решения системы канонических уравнений по найденным значениям реактивных усилий  $R_k$  находятся реактивное давление под плитой и распределение осадок  $S_k$ .

Кривизна нейтральной поверхности плиты в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а также относительное кручение поверхности будут равны

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

С учетом конечных разностей можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_x} &= -\frac{S_{i+1,j} - 2S_{i,j} + S_{i-1,j}}{\Delta x^2}; \\ \frac{1}{r_y} &= -\frac{S_{i,j+1} - 2S_{i,j} + S_{i,j-1}}{\Delta y^2}; \\ \frac{1}{r_{xy}} &= \left( S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j-1} - S_{i-1,j+1} + S_{i-1,j-1} \right) \cdot \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (9)$$

$$i = 2..m-1;$$

$$j = 2..n-1.$$

Относительные деформации слоя, отстоящего от нейтральной поверхности на расстоянии  $z_i$  будут равны

$$\varepsilon_{xi} = \frac{(z_0 - z_i)}{r_x}; \quad \varepsilon_{yi} = \frac{(z_0 - z_i)}{r_y}; \quad \varepsilon_{xyi} = \frac{(z_0 - z_i)}{r_{xy}}. \quad (10)$$

Далее по диаграммам деформирования с учетом найденных относительных деформаций находим секущие модули деформации и, с учетом закона Гука, напряжения в элементарном слое.

$$\sigma_{xi} = \frac{E_i}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xi} + \nu \varepsilon_{yi}); \quad \sigma_{yi} = \frac{E_i}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yi} + \nu \varepsilon_{xi}); \quad \tau_{xyi} = 2G \varepsilon_{xyi} = \frac{E_i}{1-\nu} \varepsilon_{xyi}. \quad (11)$$

Если напряжения растяжения в бетоне элементарной площадки превышают предельные значения, это свидетельствует об образовании трещины в этой площадке. В дальнейших расчетах осевая жесткость этой элементарной площадки принимается равной нулю.

Найденные модули вводятся в расчет в новом расчетном цикле. Критерием окончания процесса последовательных приближений является сравнение общих деформационных параметров на смежных этапах.

После окончания итерационного процесса по известной кривизне плиты определяем изгибающие и крутящие моменты, действующие в сечении плиты от заданных нагрузок

$$M_x = D \left( \frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right); \quad M_y = D \left( \frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right); \quad M_{xy} = D(1-\nu) \frac{1}{r_{xy}}. \quad (12)$$

**Несущая способность плиты при действии изгибающего момента.** Прочность нормальных сечений находится в зависимости от степени использования сопротивления сжатого бетона и растянутой арматуры. При работе железобетонных плит дорожного покрытия прямоугольного сечения, армированных сталью, имеющей физический предел текучести считается, что сопротивления бетона и арматуры использованы полностью.

Проверку прочности нормальных сечений производим из условия [6]:

$$M \leq M_u = 0.5 f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot \left[ (1 + \lambda) \cdot d - 0.33x \cdot (1 + \lambda + \lambda^2) \right] + \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - c') \quad (13)$$

Высоту сжатой зоны «х» находят из квадратного уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x + A_3 &= 0 \\ A_1 &= 0.5 f_{cd} \cdot (1 - \lambda^2) \cdot b \\ A_2 &= \alpha_m \cdot A_{st} - (1 - \lambda) \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \cdot A_{sc} \\ A_3 &= -\alpha_m \cdot A_{st} \cdot c \\ \alpha_m &= \frac{E_s}{E_{cd}} \\ \sigma_{sc} &= \frac{\alpha_m \cdot f_{cd} \cdot (d - x)}{(1 - \lambda) \cdot x} \\ \lambda &= 0.93 - 0.014 f_{cd} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

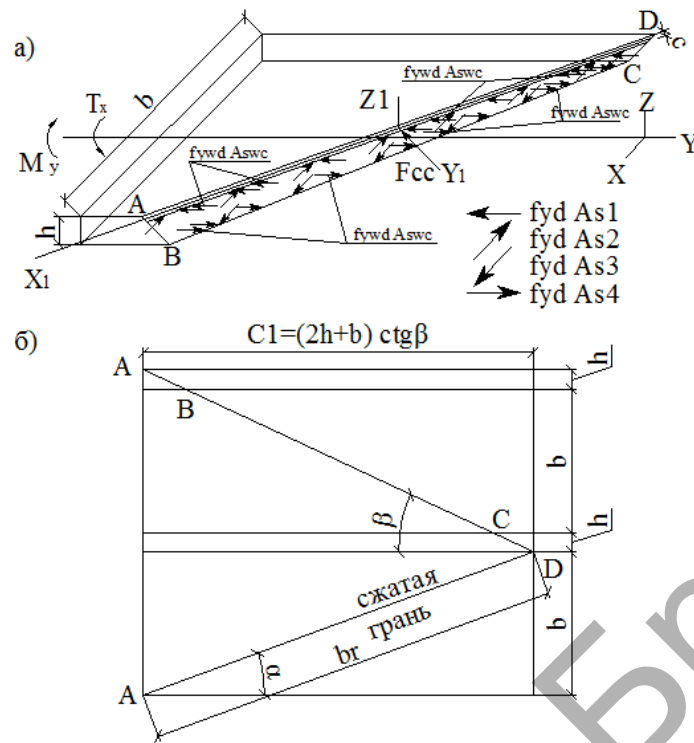
**Несущая способность плиты при совместном действии изгибающего и крутящего моментов.** При действии на плиту крутящего и изгибающего моментов разрушение происходит по пространственному сечению, образованному спиральной трещиной и замыкающей её сжатой зоной, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонтальной оси элемента.

Положение сжатой зоны в пространстве определяются параметром  $C_1$  – проекцией отрезка нейтральной оси на продольную ось элемента. По нормали к косому сечению действуют проекции внешних расчётных моментов  $M_y \cdot \sin \alpha$  и  $T_x \cdot \cos \alpha$ , где  $\sin \alpha = \frac{b}{b_T}$ ;  $\cos \alpha = \frac{C_1}{b_T}$ ;

$$b_T = \sqrt{b^2 + C_1^2}; \quad C_1 = (2h + b) \cdot \operatorname{ctg} \beta \quad [6].$$

Из положения ограничения деформаций с учётом упругопластических характеристик бетона вычисляют граничную высоту сжатой зоны:

$$x_{\lim} = \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot d \cdot \sin \alpha}{d \cdot f_{cd} + f_{yd} \cdot (1 - \lambda)} \quad (15)$$



а) схема внешних и внутренних усилий; б) развертка граней пространственного сечения  
 Рисунок 5 – Расчётная схема пространственного сечения при совместном действии крутящего и изгибающего моментов

Так как арматурные стержни расположены не в одном уровне, то приведение их к сосредоточенному армированию даёт погрешность. Поэтому расчёт производим полагая, что  $\sigma_{s1} \geq f_{yd}$ ;  $\sigma_{s2} \leq f_{yd}$ ;  $\sigma_{s3} \geq f_{yd}$ , тогда получаем следующие зависимости при кручении с изгибом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{s1} = \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_1 - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \sin \alpha \\ \sigma_{s2} = \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_2 - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \cos \alpha \\ \sigma_{s3} = f_{yd} \cdot \cos \alpha \\ \sigma_{s4} = f_{yd} \cdot \sin \alpha \\ \sigma_{sw1} = \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_{sw1} - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \sin \alpha \\ \sigma_{sw2} = f_{ywd} \cdot \sin \alpha \end{array} \right. \quad (16)$$

Высоту сжатой зоны «х» определяют из уравнения проекций всех сил, действующих в рассматриваемом пространственном сечении на нормаль к плоскости сжатой зоны.

$$\begin{aligned} 0.5 \cdot (1 + \lambda) \cdot f_{cd} \cdot b_T \cdot x &= f_{yd} \cdot A_{s3} \cdot \cos \alpha + f_{yd} \cdot A_{s4} \cdot \sin \alpha + \\ &+ f_{ywd} \cdot A_{sw2} \cdot \sin \alpha + A_{s1} \cdot \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_1 - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \sin \alpha + \\ &+ A_{s2} \cdot \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_2 - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \cos \alpha + A_{sw1} \cdot \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_{sw1} - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

Плечо внутренней пары сил для каждого арматурного ряда определяют из выражения:

$$z_i = d_i - \frac{x \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1)}{3 \cdot (\lambda + 1)} \quad (18)$$

Условие прочности в расчётном предельном состоянии выводится из соотношения внешних и внутренних сил относительно оси, проходящей через центр тяжести сжатой зоны. При этом, учитывая упругопластическую работу бетона, эпюру напряжения в сжатой зоне принимаем в виде прямоугольной трапеции. При симметричном армировании плиты:

$$\sigma_{s1} \cdot A_{s1} \cdot z_{s1} \cdot \sin \alpha + \sigma_{s2} \cdot A_{s2} \cdot z_{s2} \cdot \cos \alpha - \sigma_{s3} \cdot A_{s3} \cdot z_{s3} \cdot \cos \alpha - \sigma_{s4} \cdot A_{s4} \cdot z_{s4} \cdot \sin \alpha + f_{ywd} \cdot A_{sw1} \cdot z_{sw1} \cdot \sin \alpha - f_{ywd} \cdot A_{sw2} \cdot z_{sw2} \cdot \sin \alpha, \quad (19)$$

где  $\sigma_{s1} = \sigma_{s4} = \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_i - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \sin \alpha$ ;

$$\sigma_{s2} = \sigma_{s3} = \frac{\alpha \cdot f_{cd} \cdot (d_i - x)}{x \cdot (1 - \lambda)} \cdot \cos \alpha.$$

**Результаты численных исследований.** С целью подтверждения методики статического расчета были проведены полевые испытания железобетонной плиты 2ПП30.18-30 серии Б3.503.1-1 на различные варианты загрузки (центральные и краевые). Максимальная нагрузка на плиту в одной точке составила 100 кН [7].

В соответствии с серией Б3.503.1-1 плита 2ПП30.18-30 с ненапрягаемой арматурой предназначена для покрытий временных дорог – прямоугольная, размером 3000x1750x170 мм, рассчитанная на нагрузку 300 кН. Для плит временных дорог используется бетон класса С18/22.5. Плиты армированы верхней и нижней сетками (С1, С2) из стали класса S400. Сетки соединены между собой при помощи двух Г-образных каркасов (К1) из стали S500.

По выше изложенным методикам были выполнены расчеты железобетонной плиты 2ПП30.18-30 серии Б3.503.1-1 на нагрузки и загрузки, идентичные испытательным. Эквивалентный модуль деформации основания плиты, равный  $E_0^3 = 4,65 \text{ МПа}$  Результат статического расчета при центральном заружении и значения несущей способности плиты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты статического и конструктивного расчетов при центральном загрузении плиты

Результаты испытания		Статический расчет				Конструктивный расчет	
Осадка плиты	Значения	Осадка плиты	Значения	Вид напряженно-го состояния	Значения	Вид напряженно-го состояния	Несущая способность
$S_{max}$ мм	6.25	$S_{max}$ мм	8.92	$M_x$ кНм/м	26.1	Изгиб $M_x$ кНм/м	81.20
				$M_y$ кНм/м	27.8	Изгиб $M_y$ кНм/м	69.40
$S_{min}$ мм	4.23	$S_{min}$ мм	5.79	$M_{xy}$ кНм/м	$8.8 \cdot 10^{-10}$	Изгиб с кручением $M_{xy}$ кНм/м	33.10

**Заключение.** По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1 – приводится алгоритм расчета нелинейно-упругой плиты на линейно-упругом полупространстве с применением способа Жемочкина. Данный подход позволяет рассчитывать плиты на произвольном линейно-упругом деформируемом основании любой формы в плане и загруженные произвольной нормальной к срединной плоскости плиты внешней нагрузкой;



2 – результаты статического расчета при центральном загрузении плиты хорошо соотносятся с результатами полевых испытаний. Расчет плиты на упругом полупространстве способом Жемочкина позволяет довольно точно отразить общую тенденцию распределения осадок под плитой;

3 – приводится методика определения несущей способности железобетонных плит при сложном деформированном состоянии с учетом упругопластической работы железобетона;

4 – конструктивный расчет показывает, что несущая способность плиты при совместном действии изгибающего и крутящего моментов является наименьшей. Таки образом, при расчетах и проектировании плиты следует проверять по прочности пространственных сечений.

#### Список источников

1. Босаков С.В. Статические расчеты плит на упругом основании/ С.В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.

2. Жемочкин Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Сеницын. – М.: Госстройиздат, 1962. –240 с.

3. Пособие П1-98 к СНиП 2.03.01-84\* Усиление железобетонных конструкций – Минск; Минстройархитектуры, 1998. – 189 с.

4. Семенюк С.Д. Прочность и деформативность изгибаемых железобетонных элементов, усиленных наращиванием сжатой зоны, при статическом и малоцикловом нагружениях: монография/ С.Д. Семенюк, Ю.Г. Москалькова. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – 274 с.

5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки/ С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физ.-мат. изд-во, 1963. – 536 с.

6. Семенюк С.Д. Несущая и эксплуатационная способность железобетонных плит покрытия автомобильных дорог / С.Д. Семенюк, Р.В. Кумашов, Э.А. Кетнер // Наука та будівництво №3 (9) / 2016/ Киев, 2016 – с. 11-18.

7. Семенюк С.Д. Железобетонные плиты покрытия автомобильных дорог на упругом полупространстве / С.Д. Семенюк, Р.В. Кумашов. // Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2018. – с. 149-157.