УДК 539.3

Босаков С.В.

К РЕШЕНИЮ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

Введение. Осесимметричная контактная задача для круглой пластинки на различных моделях упругого основания успешно решена многими учеными [1–5]. В случае круглого штампа на упругом основании получены точные решения для его осесимметричного и неосесимметричного нагружения [2]. В [6] дано замкнутое решение в виде бесконечного ряда осесимметричной задачи для круглой гибкой пластинки на основании Винклера. Исследованию неосесимметричного нагружения гибкой пластинки на упругом основании посвящено сравнительно малое число работ [1, 2, 5].

Ниже автором предложен подход, основанный на симбиозе методов ортогональных многочленов [1] и Ритца [7]. Результаты получены для случая действия сосредоточенной силы, эксцентрично приложенной к круглой пластинке, лежащей на упругом полупространстве. Интегрирование этого решения дает возможность получить решение для произвольной нагрузки, действующей на круглую пластинку.

Решение задачи. 1. В дальнейших расчетах будем исходить из возможности представления ядра Буссинеска [1] в виде двойного ряда по угловой координате и присоединенным функциям Лежандра [8]:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2\rho r Cos(\theta-\varphi)+\rho^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}P_{2n}\left(\sqrt{1-r^2}\right)P_{2n}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}C_{2n,2m}P_{2n}^{2m}\left(\sqrt{1-r^2}\right)P_{2n}^{2m}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\cos 2m\theta\cos 2m\varphi+ \quad (1)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{2n+1,2m+1}P_{2n+1}^{2m+1}\left(\sqrt{1-r^2}\right)P_{2n+1}^{2m+1}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\times$$

$$\times\cos(2m+1)\theta\cos(2m+1)\varphi.$$

Коэффициенты C_{2n} характеризуют осесимметричную часть ядра Буссинеска, их выражение приводится в работе [9] и имеет вид

$$C_{2n}=\frac{\pi}{2}(4n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2. \quad (2)$$

Коэффициенты $C_{2n,2m}$ находятся на основании работы C.J. Bouwkamp [10] и имеют вид

$$C_{2n,2m}=\frac{\pi}{2^{4m}}\frac{\Gamma^2\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(n+m+1)}\frac{(2n+2m)!}{(2n-2m)!}. \quad (3)$$

Коэффициенты $C_{2n+1,2m+1}$ находятся на основании представления функции Бесселя [7] и интеграла

$$J_m(u\rho)=\frac{(-1)^m}{2^{m+1/2}\sqrt{u}}\sum_{k=0}^{\infty}(2m+4k+1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(m+k+1)}J_{m+2k+1/2}(u)P_{m+2k}^{m}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right),$$

$$\int_0^1 P_{2n+1}^{2m+1}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)J_{2m+1}(\lambda\rho)\frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2^{2m+3/2}\sqrt{\lambda}}\frac{\Gamma(n-m+1/2)}{\Gamma(m+n+2)}\frac{(2n+2m+2)!}{(2n-2m)!}J_{2n+3/2}(\lambda).$$

и имеют вид

$$C_{2n+1,2m+1}=\frac{\pi}{2^{4m+2}}\frac{\Gamma^2\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(n+m+2)}\frac{(2n+2m+2)!}{(2n-2m)!}. \quad (4)$$

Следует отметить, что по аналогии с представлением решения Фламана для упругой полуплоскости [2] выражение (1) можно отнести к двойному билинейному. На фиг.1 приведены графики левой и правой частей (1) при различном числе членов рядов.

2. Рассмотрим круглую пластинку радиуса a, лежащую без трения под действием внешней нагрузки, симметричной относительно полярного угла, на упругом полупространстве с постоянными E,ν. Интегральное уравнение для определения закона распределения контактных напряжений под пластинкой $p(\rho,\varphi)$ в безразмерных координатах имеет вид:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{p(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{r^2-2r\rho Cos(\theta-\varphi)+\rho^2}}=\frac{\pi E}{(1-\nu^2)a}w(r,\theta), \quad (5)$$

где $w(r,\theta)$ – прогибы пластинки, также неизвестные.

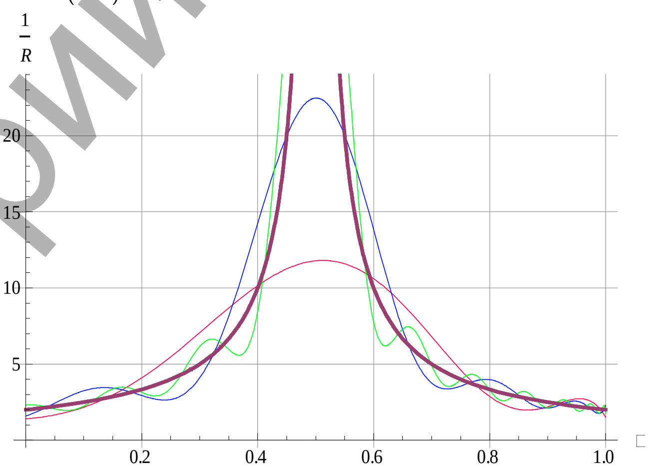

Рис. 1. Графики ядра Буссинеска для $r=0{,}5$; $\theta=0$; $\varphi=0$ при различном числе членов рядов n (1): при n=5 – красным цветом, при n=10 – синим, при n=20 – зеленым цветом; коричневым цветом – точное решение

В соответствии с представлением (1) принимаем распределение контактных напряжений под подошвой круглой пластинки

$$p(\rho,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n,0}P_{2n}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)+\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}B_{2n,2m}P_{2n}^{2m}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\cos 2m\varphi+ \quad (6)$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}B_{2n+1,2m+1}P_{2n+1}^{2m+1}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\cos(2m+1)\varphi\right],$$

где $B_{i,k}$ – неизвестные коэффициенты.

***Босаков Сергей Викторович,** д.т.н., профессор кафедры строительной механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267, e-mail: sevibo@yahoo.com.

Прогибы круглой пластинки представим в виде двойного ряда по угловой координате и собственным функциям дифференциального оператора изгибных колебаний круглой пластинки со свободными гранями [11]:

$$w(r,\theta) = A_{0,0} + A_{1,0}\, r\, \cos\theta + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}\left[J_n(\lambda_m r) + \mu(\nu_p,n,m) I_n(\lambda_m r)\right]\cos n\theta, \quad (7)$$

где собственные числа λ_m находятся из решения нелинейного уравнения, полученного выполнением статических граничных условий для радиального момента и приведенной поперечной силы [11] на краю круглой пластинки:

$$\mu(\nu_p,0,m) = \frac{J_1(\lambda_m)}{I_1(\lambda_m)};$$

$$\mu(\nu_p,1,m) = \frac{\lambda_m(1+2\lambda-\nu_p)J_0(\lambda_m) - \lambda_m(2+2\lambda-2\nu_p)J_1(\lambda_m)}{\lambda_m(\nu_p-1+2\lambda_m)I_0(\lambda_m) - \lambda_m(2\lambda_m+2\nu_p-2)I_1(\lambda_m)};$$

$$\mu(\nu_p,2,m) = \frac{2\lambda_m(6+2\lambda_m-6\nu_p)J_0(\lambda_m) + (4\lambda_m-24+24\nu_p-8\lambda_m\nu)J_1(\lambda_m)}{2\lambda_m(6-2\lambda_m-6\nu_p)I_0(\lambda_m) + (4\lambda_m-24+24\nu_p+8\lambda_m\nu)I_1(\lambda_m)}.$$

Здесь ν_p – коэффициент Пуассона материала пластинки.

Подставим (6) и (7) в (5) и используем представление (1). После интегрирования по φ и ρ с использованием свойств ортогональности тригонометрических функций и присоединенных функций Лежандра [8] (n и k одновременно четные или одновременно нечетные)

$$\int_0^1 \frac{P_n^m\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)P_k^m\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\, d\rho = 0, \quad \textit{при} \quad n \neq k$$

$$= \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, \quad \textit{при} \quad n = k$$

получим уравнение, связывающее неизвестные коэффициенты $B_{n,k}, A_{i,l}$ между собой. Приравнивая в этом уравнении коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему раздельных уравнений для $n = 0;\, 1;\, 2;\, \ldots$. Умножая обе части каждого из полученных уравнений на $P_n^m\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\dfrac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$ и выполняя интегрирование по ρ на отрезке (0,1), получим систему уравнений, выражающих каждый из коэффициентов представления (6) через совокупность коэффициентов представления (7).

Рассмотрим дифференциальное уравнение изгиба круглой пластинки на упругом основании

$$\Delta^2 w(r,\theta) = \frac{q(r,\theta) - p(r,\theta)}{D},$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ – гармонический оператор; $q(r,\theta)$ – внешняя нагрузка на круглую пластинку; D – цилиндрическая жесткость пластинки.

Как показано С.Г. Михлиным [12], коэффициенты $A_{n,m}$ (7) должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений такого вида:

$$\begin{Vmatrix} (\Delta^2 w_0, w_0) & (\Delta^2 w_0, w_1) & (\Delta^2 w_0, w_2) & \ldots \\ (\Delta^2 w_1, w_0) & (\Delta^2 w_1, w_1) & (\Delta^2 w_1, w_2) & \ldots \\ & & & \ldots \\ (\Delta^2 w_n, w_0) & (\Delta^2 w_n, w_1) & (\Delta^2 w_n, w_2) & \ldots \\ \ldots & & & \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_{0,0} \\ A_{1,0} \\ A_{n,m} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \left(\dfrac{q-p, w_0}{D}\right) \\ \left(\dfrac{q-p, r\,Cos[\theta]}{D}\right) \\ \ldots \\ \left(\dfrac{q-p, J_n(\lambda_m r) + \mu(\nu_p,n,m) I_n(\lambda_m r)}{D}\right) \\ \ldots \end{Vmatrix} \quad (8)$$

где $(\chi,\psi) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\chi(r,\theta)\psi(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$ – скалярное произведение; $w_k = w_k(r,\theta)$ – отдельные слагаемые представления (7).

Вследствие ортогональности собственных функций (7) побочные коэффициенты в (8) обратятся в нуль и система (8) становится такой

$$\begin{Vmatrix} (\lambda_0^4 w_0, w_0) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & (\lambda_1^4 w_1, w_1) & 0 & \ldots \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & (\lambda_m^4 w_n, w_n) & \ldots \\ \ldots & & & \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_{0,0} \\ A_{1,0} \\ \\ A_{n,m} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \left(\dfrac{q-p, w_0}{D}\right) \\ \left(\dfrac{q-p, r\,Cos[\theta]}{D}\right) \\ \ldots \\ \left(\dfrac{q-p, \left[J_n(\lambda_m r) + \mu(\nu_p,n,m) I_n(\lambda_m r)\right]\cos n\theta}{D}\right) \\ \ldots \end{Vmatrix} \quad (9)$$

Система (9) выражает каждый из неизвестных коэффициентов (7) через совокупность коэффициентов (6). Полученные две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений целесообразно решать совместно способом усечения [13].

3. Дальнейшие рассуждения проведем для случая действия сосредоточенной силы на круглую пластинку в точке с полярными координатами (c, 0). Рассмотрим решение для каждого слагаемого представления (7).

3.1. Случай $n = 0$ соответствует осесимметричному решению. Здесь

$$p_0(\rho,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n,0} P_{2n}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right);$$

$$w_0(\rho,\varphi) = A_{0,0} w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m}\left[J_0(\lambda_{0,m} r) - \frac{J_1(\lambda_{0,m})}{I_1(\lambda_{0,m})} I_0(\lambda_{0,m} r)\right]; \quad (10)$$

$$w_0 = 1; \quad P_0 = 1; \quad P_2 = 1 - \frac{3}{2}r^2; \quad P_4 = 1 - 5r^2 + \frac{35}{8}r^4; \quad \ldots$$

Связь между $B_{2n,0}$ и совокупностью $A_{0,m}$:

$$B_{0,0}=\frac{\pi E}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{a\,\pi^2}A_{0,0}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{0,m}\times$$

$$\times\left[\frac{J_{1/2}\left(\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{0,m}}}-\frac{J_1\left(\lambda_{0,m}\right)}{I_1\left(\lambda_{0,m}\right)}\frac{J_{1/2}\left(i\,\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{i\,\lambda_{0,m}}}\right]\Bigg\};\qquad(11)$$

$$B_{2n,0}=\frac{\pi E}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{4n+1}{a\,\pi^2}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{0,m}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{0,m}}}-\frac{J_1\left(\lambda_{0,m}\right)}{I_1\left(\lambda_{0,m}\right)}\frac{J_{2n+1/2}\left(i\,\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{i\,\lambda_{0,m}}}\right]\right\},\ n=1,2,...$$

Связь между $A_{0,m}$ и совокупностью $B_{2n,0}$:

$$\frac{(q-p,1)}{D}=P-2\pi a^2B_{0,0}=0;$$

$$\frac{2\pi}{a^2}\lambda_{0,m}^4A_{0,m}=\frac{P}{D}\left[J_0\left(\lambda_{0,m}\frac{c}{a}\right)-\frac{J_1\left(\lambda_{0,m}\right)}{I_1\left(\lambda_{0,m}\right)}I_0\left(\lambda_{0,m}\frac{c}{a}\right)\right]-$$

$$\frac{2\pi a^2}{D}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}B_{2n,0}\times\qquad(12)$$

$$\times\left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{0,m}}}-\frac{J_1\left(\lambda_{0,m}\right)}{I_1\left(\lambda_{0,m}\right)}\frac{J_{2n+1/2}\left(i\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{0,m}}}\right],\ n=0,1,2,...$$

После некоторых преобразований разрешающая система уравнений для одновременного нахождения $A_{0,m}$ и $B_{2n,0}$ записывается следующим образом:

$$\left\|\delta\right\|\vec{X}=\vec{S};$$

$$\delta=\left\|\begin{matrix}0&0&0&\dots&1&0&0&\dots\\0&\lambda_{0,1}^4&0&\dots&\beta\chi_0\left(\lambda_{0,1}\right)&\beta\chi_2\left(\lambda_{0,1}\right)&\beta\chi_4\left(\lambda_{0,1}\right)&\dots\\0&0&\lambda_{0,2}^4&\dots&\beta\chi_0\left(\lambda_{0,2}\right)&\beta\chi_2\left(\lambda_{0,2}\right)&\beta\chi_4\left(\lambda_{0,2}\right)&\dots\\\dots&&&&\dots&&&\\1&\chi_0\left(\lambda_{0,1}\right)&\chi_0\left(\lambda_{0,2}\right)&\dots&-1&0&0&\dots\\0&5\chi_2\left(\lambda_{0,1}\right)&5\chi_2\left(\lambda_{0,2}\right)&\dots&0&-1&0&\dots\\0&9\chi_4\left(\lambda_{0,1}\right)&9\chi_4\left(\lambda_{0,2}\right)&\dots&0&0&-1&\dots\\\dots&&&&\dots&&&\end{matrix}\right\|;\qquad(13)$$

$$\vec{X}^T=\left\|A_{0,0}\quad A_{0,1}\quad A_{0,2}\quad\dots\quad X_{0,0}\quad X_{2,0}\quad X_{4,0}\quad\dots\right\|;$$

$$X_{2n,0}=\left(1-\nu^2\right)\frac{\pi a}{E}B_{2n,0};\qquad\beta=\frac{Ea^3}{\pi D\left(1-\nu^2\right)};$$

$$\vec{S}^T=\beta\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{2Ea}\left\|\frac{1}{\beta}\quad\psi_0\left(\lambda_{0,1}\frac{c}{a}\right)\quad\psi_0\left(\lambda_{0,2}\frac{c}{a}\right)\quad\dots\quad0\quad0\quad0\quad\dots\right\|;\qquad(14)$$

$$\chi_{2n}\left(\lambda_{0,k}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{0,m}}}-\frac{J_1\left(\lambda_{0,m}\right)}{I_1\left(\lambda_{0,m}\right)}\frac{J_{2n+1/2}\left(i\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{0,m}}}\right];$$

$$\psi_{0,m}\left(\lambda_{0,m}\frac{c}{a}\right)=J_0\left(\lambda_{0,m}\frac{c}{a}\right)-\frac{J_1\left(\lambda_{0,m}\right)}{I_1\left(\lambda_{0,m}\right)}I_0\left(\lambda_{0,m}\frac{c}{a}\right)$$

В случае жесткого штампа показатель гибкости по М.И. Горбунову – Посадову [2] $\beta=0$ и из (13) получаем:

$$B_{0,0}=\frac{P}{2\pi a^2};\quad B_{2n,0}=0,\ A_{0,n}=0\ \ (n=1,2,...);$$

$$A_{0,0}=\frac{\pi a\left(1-\nu^2\right)}{E}B_{0,0}=\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{2Ea},$$

что соответствует решению для осесимметрично нагруженного круглого штампа [2].

3.2. Случай $n=1$. Здесь $A_{1,0}$ характеризует угол поворота круглого штампа

$$p_1(\rho,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1,1}P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\cos\varphi;$$

$$w_1(\rho,\varphi)=A_{1,0}r\cos\varphi+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}A_{1,m}\left[J_1\left(\lambda_{1,m}r\right)+\mu\left(\nu_p,1,m\right)I_1\left(\lambda_{1,m}r\right)\right]\cos\varphi;\qquad(15)$$

$$P_1^1=-r;\quad P_3^1=\frac{3}{2}r\left(5r^2-4\right);$$

$$P_5^1=-\frac{15}{8}r\left(8-28r^2+21r^4\right);\quad\dots$$

Связь между $B_{2n+1,1}$ и совокупностью $A_{1,m}$:

$$\frac{1}{4}\frac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma^2(2)}\frac{2!}{1!}B_{1,1}=$$

$$\frac{E}{a\left(1-\nu^2\right)}\left\{-A_{1,0}-\frac{3\Gamma(1/2)}{2^{3/2}\Gamma(2)}\sum_{m=1}^{\infty}A_{1,m}\times\right.\qquad(16)$$

$$\left.\left[\frac{J_{3/2}\left(\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{1,m}}}-i\mu\left(\nu_p,1,m\right)\frac{J_{3/2}\left(i\,\lambda_{0,m}\right)}{\sqrt{i\,\lambda_{1,m}}}\right]\right\};$$

$$B_{2n+1,1}=-\frac{E}{a\left(1-\nu^2\right)}\frac{2\sqrt{2}\,\Gamma(n+2)(4n+3)(2n)!}{\Gamma(n+1/2)(2n+2)!}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}A_{1,m}\left[\frac{J_{2n+3/2}\left(\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{1,m}}}-i\mu\left(\nu_p,1,m\right)\frac{J_{2n+3/2}\left(i\,\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{i\,\lambda_{1,m}}}\right],n=0,1,...$$

Связь между $A_{1,m}$ и совокупностью $B_{2n+1,1}$:

$$\frac{(q-p_1,r\,Cos\varphi)}{D}=\frac{P\,c}{a}+\frac{2}{3}\pi a^2B_{1,1}=0;\quad B_{1,1}=-\frac{3Pc}{2\pi a^3};$$

$$\frac{\pi}{a^2}\lambda_{1,m}^4A_{1,m}=\frac{P}{D}\left[J_{2n+1}\left(\lambda_{1,m}\frac{c}{a}\right)+\mu\left(\nu_p,1,m\right)I_{2n+1}\left(\lambda_{1,m}\frac{c}{a}\right)\right]-$$

$$\frac{\pi a^2}{D}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^{3/2}(2n)!}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+2)}B_{2n+1,1}\times\qquad(17)$$

$$\times\left[\frac{J_{2n+3/2}\left(\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{1,m}}}-i\mu\left(\nu_p,1,m\right)\frac{J_{2n+3/2}\left(i\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{1,m}}}\right].$$

После некоторых преобразований разрешающая система уравнений для одновременного нахождения $A_{1,m}$ и $B_{2n+1,1}$ записывается следующим образом:

$$\left\|\delta_1\right\|\vec{X}_1=\vec{S}_1;$$

$$\delta_1=\left\|\begin{matrix}0&0&0&\dots&-1&0&0&\dots\\0&\lambda_{1,1}^4&0&\dots&\beta\chi_1\left(\lambda_{1,1}\right)&\beta\chi_3\left(\lambda_{1,1}\right)&\beta\chi_5\left(\lambda_{1,1}\right)&\dots\\0&0&\lambda_{1,2}^4&\dots&\beta\chi_1\left(\lambda_{1,2}\right)&\beta\chi_3\left(\lambda_{1,2}\right)&\beta\chi_5\left(\lambda_{1,2}\right)&\dots\\\dots&&&&\dots&&&\\\frac{2}{\pi}&\frac{6}{\pi^2}\chi_1\left(\lambda_{1,1}\right)&\frac{6}{\pi^2}\chi_1\left(\lambda_{1,2}\right)&\dots&1&0&0&\dots\\0&\frac{56}{9\pi^2}\chi_3\left(\lambda_{1,1}\right)&\frac{56}{9\pi^2}\chi_3\left(\lambda_{1,2}\right)&\dots&0&1&0&\dots\\0&\frac{1408}{225\pi^2}\chi_5\left(\lambda_{1,1}\right)&\frac{1408}{225\pi^2}\chi_5\left(\lambda_{1,2}\right)&\dots&0&0&1&\dots\\\dots&&&&\dots&&&\end{matrix}\right\|;\qquad(18)$$

$$\vec{X}_1^T = \left\| A_{1,0} \quad A_{1,1} \quad A_{1,2} \quad \dots \quad X_{1,1} \quad X_{3,1} \quad X_{5,1} \quad \dots \right\|;$$

$$X_{2n+1,1} = \left(1-\nu^2\right)\frac{\pi a}{E} B_{2n+1,1};$$

$$\vec{S}_1^T = \beta \frac{P\left(1-\nu^2\right)}{Ea} \left\| 1 \quad \psi_1\left(\lambda_{1,1}\frac{c}{a}\right) \quad \psi_1\left(\lambda_{1,2}\frac{c}{a}\right) \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right\|; \qquad (19)$$

$$\chi_{2n+1}\left(\lambda_{1,m}\right) = \frac{\Gamma(n+1/2)(2n+2)!}{2^{3/2}\Gamma(n+2)\,(2n)!} \times$$

$$\times \left[\frac{J_{2n+3/2}\left(\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{1,m}}} - i\mu\left(\nu_p, 1, m\right) \frac{J_{2n+3/2}\left(i\lambda_{1,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{1,m}}} \right];$$

$$\psi_{1,m}\left(\lambda_{1,m}\frac{c}{a}\right) = J_1\left(\lambda_{1,m}\frac{c}{a}\right) + \mu\left(\nu_p, 1, m\right) I_1\left(\lambda_{1,m}\frac{c}{a}\right).$$

В случае жесткого штампа показатель гибкости по М.И. Горбунову – Посадову [2] $\beta = 0$ и из (18) имеем:

$$B_{1,1} = \frac{3Pc}{4\pi a^2}; \quad B_{2n+1,1} = 0,\ A_{1,n} = 0 \ \ (n = 1, 2, \dots);$$

$$A_{1,0} = \frac{\pi a\left(1-\nu^2\right)}{E} B_{1,1} = \frac{3Pc\left(1-\nu^2\right)}{4E a^3},$$

что соответствует решению для эксцентрично нагруженного сосредоточенной силой круглого штампа [2].

3.3. Случай $n = 2$.

$$p_2(\rho,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n,2} P_{2n}^2\left(\sqrt{1-\rho^2}\right) \cos 2\varphi;$$

$$w_2(\rho,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{2,m}\left[J_2\left(\lambda_{2,m} r\right) + \mu(\nu, 2, m) I_2\left(\lambda_{2,m} r\right)\right] \cos 2\varphi; \qquad (20)$$

$$P_2^2 = 3r^2; \quad P_4^2 = -\frac{15}{2} r^2\left(7r^2 - 6\right);$$

$$P_6^2 = \frac{105}{8} r^4\left(16 - 48r^2 + 33r^4\right); \quad \dots$$

Связь между $B_{2n,2}$ и совокупностью $A_{2,m}$:

$$B_{2n,2} = \frac{E}{\pi a\left(1-\nu^2\right)} \frac{\Gamma^2(n+2)(4n+1)(2n-2)!^2}{2^4\Gamma^2(n-1/2)(2n+2)!^2} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} A_{2,m}\left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{2,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{2,m}}} - \right.$$

$$\left. -\mu\left(\nu_p, 2, m\right) \frac{J_{2n+1/2}\left(i\lambda_{2,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{2,m}}}\right],\ n = 1, 2, \dots \qquad (21)$$

Связь между $A_{2,m}$ и совокупностью $B_{2n,2}$:

$$\frac{\pi}{a^2}\lambda_{2,m}^4 A_{2,m} = \frac{P}{D}\left[J_{2n}\left(\lambda_{2,m}\frac{c}{a}\right) - \mu\left(\nu_p, 2, m\right) I_{2n}\left(\lambda_{2,m}\frac{c}{a}\right)\right] -$$

$$\frac{\pi a^2}{2^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+2)!}{(2n-2)!}\right)^2 \frac{\Gamma^2(n-1/2)}{(4n+1)\Gamma^2(n+2)} B_{2,n,2} \times \qquad (22)$$

$$\times \left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{2,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{2,m}}} - \mu\left(\nu_p, 2, m\right) \frac{J_{2n+1/2}\left(i\lambda_{2,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{2,m}}}\right].$$

После некоторых преобразований разрешающая система уравнений для одновременного нахождения $A_{2,m}$ и $B_{2n,2}$ записывается следующим образом:

$$\left\|\delta_2\right\| \vec{X}_2 = \vec{S}_2;$$

$$\delta_2 =$$

$$\begin{Vmatrix}
\lambda_{2,1}^4 & 0 & 0 & \dots & \beta\chi_2(\lambda_{2,1}) & \beta\chi_4(\lambda_{2,1}) & \beta\chi_6(\lambda_{2,1}) & \dots \\
0 & \lambda_{2,2}^4 & 0 & \dots & \beta\chi_2(\lambda_{2,2}) & \beta\chi_4(\lambda_{2,2}) & \beta\chi_6(\lambda_{2,2}) & \dots \\
0 & 0 & \lambda_{2,3}^4 & \dots & \beta\chi_2(\lambda_{2,3}) & \beta\chi_4(\lambda_{2,3}) & \beta\chi_6(\lambda_{2,3}) & \dots \\
\dots & & & & \dots & & & \\
\frac{5}{9\pi^2}\chi_2(\lambda_{2,1}) & \frac{5}{9\pi^2}\chi_2(\lambda_{2,2}) & \frac{5}{9\pi^2}\chi_2(\lambda_{2,3}) & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots \\
\frac{4}{25\pi^2}\chi_4(\lambda_{2,1}) & \frac{4}{25\pi^2}\chi_4(\lambda_{2,2}) & \frac{4}{25\pi^2}\chi_4(\lambda_{2,3}) & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots \\
\frac{832}{11025\pi^2}\chi_6(\lambda_{2,1}) & \frac{832}{11025\pi^2}\chi_6(\lambda_{2,2}) & \frac{832}{11025\pi^2}\chi_6(\lambda_{2,3}) & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots \\
\dots & & & & \dots & & &
\end{Vmatrix} \qquad (23)$$

$$\vec{X}_2^T = \left\| A_{2,1} \quad A_{2,2} \quad A_{2,3} \quad \dots \quad X_{2,2} \quad X_{4,2} \quad X_{6,2} \quad \dots \right\|;$$

$$X_{2n,2} = \left(1-\nu^2\right)\frac{\pi a}{E} B_{2n,2};$$

$$\vec{S}_2^T = \beta \frac{P\left(1-\nu^2\right)}{Ea} \left\| \psi_2\left(\lambda_{2,1}\frac{c}{a}\right) \quad \psi_2\left(\lambda_{2,2}\frac{c}{a}\right) \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right\|;$$

$$\chi_{2n}\left(\lambda_{2,m}\right) = \frac{\Gamma(n-1/2)(2n+2)!}{2^{5/2}\Gamma(n+2)\,(2n-2)!} \times$$

$$\times \left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{2,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{2,m}}} - \mu\left(\nu_p, 2, m\right) \frac{J_{2n+1/2}\left(i\lambda_{2,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{2,m}}}\right]; \qquad (24)$$

$$\psi_{2,m}\left(\lambda_{2,m}\frac{c}{a}\right) = J_2\left(\lambda_{2,m}\frac{c}{a}\right) + \mu\left(\nu_p, 2, m\right) I_2\left(\lambda_{2,m}\frac{c}{a}\right).$$

3.4. Случай $n = 3$.

$$p_3(\rho,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1,2} P_{2n+1}^3\left(\sqrt{1-\rho^2}\right) \cos 3\varphi;$$

$$w_3(\rho,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{3,m}\left[J_3\left(\lambda_{3,m} r\right) + \mu\left(\nu_p, 3, m\right) I_3\left(\lambda_{3,m} r\right)\right] \cos 3\varphi; \qquad (25)$$

$$P_3^3 = 3 - 15r^3; \quad P_5^3 = \frac{105}{2} r^3\left(9r^2 - 8\right);$$

$$P_7^3 = -\frac{315}{8} r^3\left(80 - 220r^2 + 143r^4\right); \quad \dots$$

Связь между $B_{2n+1,3}$ и совокупностью $A_{3,m}$:

$$B_{2n+1,3} = \qquad (26)$$

$$= \frac{E}{\pi a\left(1-\nu^2\right)} \frac{2^6\Gamma^2(n+3)(4n+3)(2n-2)!^2}{\Gamma^2(n-1/2)(2n+4)!^2} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} A_{3,m}\left[\frac{J_{2n+3/2}\left(\lambda_{3,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{3,m}}} + i\mu\left(\nu_p, 3, m\right) \frac{I_{2n+3/2}\left(i\lambda_{3,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{3,m}}}\right].$$

Связь между $A_{3,m}$ и совокупностью $B_{2n+1,3}$:

$$\frac{\pi}{a^2}\lambda_{3,m}^4 A_{3,m} = \frac{P}{D}\left[J_{2n+3/2}\left(\lambda_{3,m}\frac{c}{a}\right) - \mu\left(\nu_p, 3, m\right) I_{2n+3/2}\left(\lambda_{3,m}\frac{c}{a}\right)\right] -$$

$$\frac{\pi a^2}{2^{7/2} D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+4)!}{(2n)!} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n+3)} B_{2n+1,3} \times \qquad (27)$$

$$\times \left[\frac{J_{2n+3/2}\left(\lambda_{3,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{3,m}}} + i\mu(\mu, 3, m) \frac{I_{2n+3/2}\left(i\lambda_{3,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{3,m}}}\right].$$

После некоторых преобразований разрешающая система уравнений для одновременного нахождения $A_{2,m}$ и $B_{2n,2}$ записывается следующим образом

$$\left\|\delta_2\right\|\vec{X}_2=\vec{S}_2; \qquad (28)$$

;

$$\delta_2=\left\|\begin{matrix} \lambda_{2,1}^4 & 0 & 0 & \dots & & & & \beta\chi_2(\lambda_{2,1}) & \beta\chi_4(\lambda_{2,1}) & \beta\chi_6(\lambda_{2,1}) & \dots \\ 0 & \lambda_{2,2}^4 & 0 & \dots & & & & \beta\chi_2(\lambda_{2,2}) & \beta\chi_4(\lambda_{2,2}) & \beta\chi_6(\lambda_{2,2}) & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_{2,3}^4 & \dots & & & & \beta\chi_2(\lambda_{2,3}) & \beta\chi_4(\lambda_{2,3}) & \beta\chi_6(\lambda_{2,3}) & \dots \\ \dots & & & & & & & \dots & & & \\ \frac{7}{225\pi^2}\chi_2(\lambda_{2,1}) & \frac{7}{225\pi^2}\chi_2(\lambda_{2,2}) & \frac{7}{225\pi^2}\chi_2(\lambda_{2,3}) & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & & & \\ \frac{44}{1025\pi^2}\chi_4(\lambda_{2,1}) & \frac{44}{1025\pi^2}\chi_4(\lambda_{2,2}) & \frac{44}{1025\pi^2}\chi_4(\lambda_{2,3}) & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & & \\ \frac{64}{59535\pi^2}\chi_6(\lambda_{2,1}) & \frac{64}{59535\pi^2}\chi_6(\lambda_{2,2}) & \frac{64}{59535\pi^2}\chi_6(\lambda_{2,3}) & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & & & \\ \dots & & & & \dots & & & & & & \end{matrix}\right\|$$

$$\vec{X}_3^{\,T}=\left\|A_{3,1}\quad A_{3,2}\quad A_{3,3}\quad \dots\quad X_{3,3}\quad X_{5,3}\quad X_{7,3}\quad \dots\right\|;$$

$$X_{2n+1,3}=\left(1-\nu^2\right)\frac{\pi a}{E}B_{2n+1,3};$$

$$\vec{S}_3^{\,T}=\beta\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{Ea}\left\|\ \psi_3\left(\lambda_{3,1}\frac{c}{a}\right)\quad \psi_3\left(\lambda_{3,2}\frac{c}{a}\right)\quad \dots\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dots\right\|;$$

$$\chi_{2n+1}\left(\lambda_{3,m}\right)=\frac{\Gamma(n-1/2)(2n+2)!}{2^{7/2}\Gamma(n+3)\,(2n-2)!}\times$$

$$\times\left[\frac{J_{2n+1/2}\left(\lambda_{3,m}\right)}{\sqrt{\lambda_{3,m}}}+i\mu(\nu,3,m)\frac{I_{2n+1/2}\left(i\lambda_{3,m}\right)}{\sqrt{i\lambda_{3,m}}}\right];$$

$$\psi_{3,m}\left(\lambda_{3,m}\frac{c}{a}\right)=J_3\left(\lambda_{3,m}\frac{c}{a}\right)+\mu(\nu,3,m)I_3\left(\lambda_{3,m}\frac{c}{a}\right), \qquad (29)$$

$m=1,2,3,\dots;\quad n=1,2,3,\dots$

4. Рассмотрим пример для круглой пластинки с $\frac{c}{a}=0.5;\quad \beta=100;\quad \nu_p=0.2$. Получено (для $A_{i,k}$ – в долях от $\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{E\,a}$, для $B_{i,k}$ – в долях от $\frac{P}{a^2}$):

$\lambda_{0,1}=2.9617;\quad \lambda_{1,1}=4.5102;\quad \lambda_{2,1}=2.3781;\quad \lambda_{3,1}=3.6092;\quad \dots$

$\lambda_{0,2}=6.1827;\quad \lambda_{1,2}=7.7234;\quad \lambda_{2,2}=5.9430;\quad \lambda_{3,2}=7.3005;$

$\lambda_{0,3}=9.3562;\quad \lambda_{1,3}=10.8988;\quad \lambda_{2,3}=9.1833;\quad \lambda_{3,3}=10.5870;$

...

$A_{0,0}=1.0958/2;\quad A_{1,0}=0.3187;\quad A_{2,1}=0.2208;\quad A_{3,1}=0.0903;\quad \dots$

$A_{0,1}=0.3897/2;\quad A_{1,1}=0.1307;\quad A_{2,2}=0.0350;\quad A_{3,2}=0.01496;$

$A_{0,2}=-0.0205/2;\quad A_{1,2}=-0.0007;\quad A_{2,3}=0.0023;\quad A_{3,3}=0.00259;$

$A_{0,3}=-0.0033/2;\quad A_{1,3}=-0.0023;$

...

$B_{0,0}=1.0/2\pi;\quad B_{1,0}=-0.2387;\quad B_{2,1}=0.03875;\quad B_{3,1}=-0.00342;\quad \dots$

$B_{0,1}=1.5617/2\pi;\quad B_{1,1}=-0.01117;\quad B_{2,2}=0.004467;\quad B_{3,2}=-0.00033;$

$B_{0,2}=0.3053/2\pi;\quad B_{1,2}=-0.00163;\quad B_{2,3}=-0.00113;\quad B_{3,3}=-0.000076;$

$B_{0,3}=-0.0281/2\pi;\quad B_{1,3}=0.00031;$

...

На рис. 2 показаны линии равных вертикальных перемещений в пластинке, вычисленные с учетом четырех слагаемых представления (7).

5. При иных моделях упругого основания с распределительными свойствами следует [1] из ядра интегрального уравнения контактной задачи выделить сингулярное ядро Буссинеска и гладкую часть, представляемую рядом по присоединенным функциям Лежандра и угловой координате. Такое представление позволит с небольшими изменениями использовать подход, предлагаемый автором.

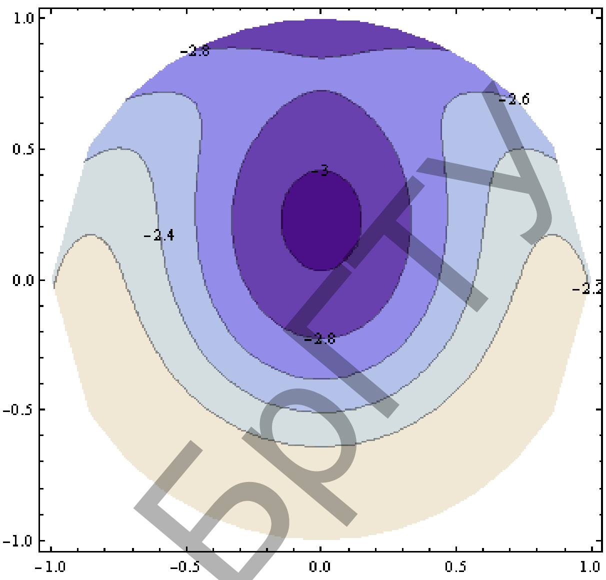

Рис. 2. Линии равных перемещений в долях $\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{E\,a}$ при загружении пластинки сосредоточенной силой

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Развитие теории контактных задач в СССР / Под редакцией Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 423 с.
2. Горбунов-Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – М.: Стройиздат,1984. – 679 с.
3. Клубин, П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инж. сб. – 1952. – № 12. – С. 95–135.
4. Selvadurai, A.P.S. The interaction between a uniformly loaded circular plate an a isotropic elastic halfspace: a variational approach // J. Struct. Mech. – 1979. – V.7(3). – P. 231–246.
5. Попов, Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
6. Босаков, С.В. Расчет конструкций на упругом основании методом Ритца // Вестник НИЦ «Строительство» ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений. – 2012. – Т. XXX, № 5. – С. 38–53.
7. Босаков, С.В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости. – Мн.: Изд-во БНТУ, 2006. – 108 с.
8. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1097 с.
9. Ворович, И.М. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.М. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974 – 455 с.
10. Bouwramp, C.J. On integrals occurring theory of diffraction of electromagnetic waves by a circular disc // Proc. Kon. Ned. Anad. V. Wet. – 1950. – Vol 53, No 5. – P. 654–661.
11. Цейтлин, А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Стройиздат, 1984. – 334 с.
12. Михлин, С.Г. Прямые методы в математической физике. – М.-Л.: Гостехтеоризддат, 1950. – 428 с.
13. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 408 с.

Материал поступил в редакцию 22.02.14

***BOSAKOV S.V.* By solving the non-axisymmetric contact problem for a circular plate**

The article gives a solution of the contact problem for a circular plate on an elastic half-space under the influence of any external load. Seeking law distribution of contact stresses is sought in a double row in the angular coordinate and associated Legendre functions with weight. Displacements of plate are also presented in a double row in the angular coordinate and eigenfunctions of a differential operator of flexural vibrations of a circular plate with free edges. As a result, the set of partial solutions sought for each harmonic separately. An example of calculation of the plate under the action of a force.

УДК 691.51

Тур Э.А., Басов С.В.

ИССЛЕДОВАНИЕ МИНЕРАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ПРИ ПОСТРОЙКЕ ДВОРЦОВОГО КОМПЛЕКСА САПЕГОВ В РУЖАНАХ

Введение. Основным направлением развития современного строительства является повышение технологичности и качества вновь возводимых объектов. Однако постоянное совершенствование методов строительных работ не снимает одну из важнейших задач – сохранения архитектурного наследия прошлого с учётом старых технологий. Научный подход к вопросам реставрации памятников культуры в Республике Беларусь позволяет сохранить историко-культурное наследие Республики Беларусь.

Дворцовый комплекс в Ружанах называют Белорусским Версалем. Он был возведён в начале XVII века. Здесь была родовая резиденция могущественных Сапегов. Изначально в Ружанах в 1617 году была построена неприступная крепость. Во время Северной войны (1700–1721) каменный дворец был практически разрушен. Годами второго рождения имения стали 1784–1788 гг. Архитектор Ян Самуэль Беккер по поручению Александра Михала Сапеги (герб «Лис») создал новый комплекс в стиле классицизма с элементами барокко. Ян Беккер предал дворцу классический вид: включил башню старого оборонительного сооружения в объем здания, украсил фасад двумя парами колонн и треугольным фронтоном. К главному фасаду был пристроен накладной портик с двойными колоннами и пилястрами, завершающийся треугольным фронтоном со скульптурой. На парковом фасаде появились новые детали: монограмма владельца с буквами "AS", лепное украшение в виде выгнутого картуша с букетом цветов – типичный пасторальный мотив в стиле рококо (характерный для первой половины XVIII столетия.). По проекту дворец арками соединялся с боковыми, симметрично расположенными вдоль оси официнами. Правую официну занимал театр, в котором находилась королевская ложа. В замкнутом пространстве двора площадью 1,5 га центральное место занимал главный корпус. Он представлял собой объединение двух объемов разной величины, в большем из которых находились бальный зал, вестибюль, парадная двухсторонняя лестница, археологический кабинет-музей и огромная библиотека – самая крупная в Великом княжестве Литовском. На главной оси располагалась въездная брама с двумя двухэтажными жилыми боковыми флигелями для размещения охраны и канцелярии. Ворота имели вид триумфальной арки, в которой был центральный проезд и два боковых. Нижняя их часть была рустована, а верхняя украшена картушами и гирляндами, вырезанными из мореного дуба. Перед воротами на постаменте стояла скульптура женщины, рука которой показывала в сторону Березы Картузской, где были похоронены Сапеги. Таким образом, въездная брама, поставленная в виде трехпролетной арки с железными воротами и калитками в боковых проемах, с боковыми флигелями завершала ансамбль дворцового комплекса. Парк Ружанского дворца располагался с северной стороны ансамбля и был разбит по принципу радиально-лучевого расположения аллей. На рисунке 1 представлен дворец Сапегов на литографии с рисунка Наполеона Орды.

В конце XIX – начале XX вв. Ружанский дворец использовался как ткацкая фабрика, а в 1914 г. в результате пожара был сильно разрушен, затем частично реставрировался в 1930 г. Наибольший урон дворцовому комплексу нанесла Вторая мировая война: в 1944 г. он был разрушен во время военных действий.

До нашего времени сохранились главный и восточный корпуса, аркады, въездная брама, флигели. С 2010 г. ведется реконструкция Ружанского дворцового комплекса. Восстановление Ружанского дворца разбито на очереди. На сегодняшний день завершена реставрация въездной брамы, западного и восточного флигелей. На рисунке 2 представлен макет дворцового комплекса Сапегов (филиал «Брестреставрацияпроект»).

Рис. 1. Дворец Сапегов на литографии с рисунка Наполеона Орды

Рис. 2. Макет дворцового комплекса Сапегов (филиал «Брестреставрацияпроект»)

Методика эксперимента. При проведении реставрационных работ в Ружанском дворце использовались материалы, максимально идентичные тем, которые применялись строителями XVII века. Пар-

Басов Сергей Владимирович, *к.т.н., доцент, зав. кафедрой инженерной экологии и химии Брестского государственного технического университета.*

Тур Элина Аркадьевна, *к.т.н., доцент кафедры инженерной экологии и химии Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.