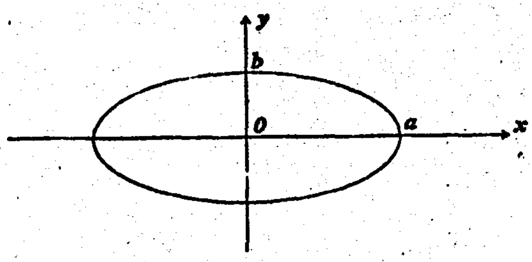
А.І. Тузік, Т.А. Тузік

АСНОВЫ ЛІНЕЙНАЙ АЛГЕБРЫ І АНАЛІТЫЧНАЙ ГЕАМЕТРЫІ



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Мінск - Брэст, БрПІ, 1994

Падручнікі і вучэбныя дапаможнікі для вышэйшых вучэбных устаноў

А.І. Тузік, Т.А. Тузік

АСНОВЫ ЛІНЕЙНАЙ АЛГЕБРЫ І АНАЛІТЫЧНАЙ ГЕАМЕТРЫІ

Выданне першае

Рэкамендавана Навукова-метадычным цэнтрам вучэбнай кнігі і сродкаў навучання Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь у якасці вучэбна-метадычнага дапаможніка па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў электронна-механічных спецыяльнасцяў тэхнічных вышэйшых навучальных устаноў

Мінск- Брэст, БрПІ, 1994

ББК 22.11я73
Т 81
УДК 51(075.8)

Тузік А.І., Тузік Т.А. Асновы лінейнай алгебры і аналітычнай геаметрыі: Вучэбны дапаможнік па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў электронна-механічных спецыяльнасцяў тэхнічных ВНУ. - Брэст. : Брэсцкі політэхнічны інстытут, 1994. - 73 с.: з іл.

Дапаможнік складзены ў адпаведнасці з дзейнічаючай праграмай па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў I курса тэхнічных ВНУ. Тэарэтычны матэрыял ілюструецца рашэннем задач, а частка яго ў выглядзе тэарэтычных практыкаванняў сфармулявана для самастойнага разгляду.

к.ф.-м. н., дацэнт Тузік Альфрэд Іванавіч
дацэнт Тузік Таццяна Аляксандраўна

Рэцэнзенты: Кафедра алгебры і геаметрыі БрГПІ імя А.С. Пушкіна;
Прафесар Беларускага дзяржаўнага універсітэта інфарматыкі і радыёэлектронікі Р.М. Жаўняк

Навуковы рэдактар: А.І. Тузік
Тэхнічны рэдактар: Т.М. Аверына

1. ДЭТЭРМІНАНТЫ І ІХ УЛАСЦІВАСЦІ. РАШЭННЕ СІСТЭМ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ УРАЎНЕННЯЎ.

1.1. ДЭТЭРМІНАНТЫ ДРУГОГА ПАРАДКУ

Разгледзім квадратную табліцу або матрыцу памеру 2x2, утвораную двума радкамі і двума слупкамі з чатырох лікаў

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Лікі a_{ij}, $i, j = 1,2$ называюцца элементамі матрыцы, пры гэтым элементы a_{11}, a_{22} утвараюць яе <u>галоўную дыяганаль</u>, а элементы a_{12}, a_{21} – пабочную.

<u>Азначэнне 1</u>. <u>Дэтэрмінантам</u> або <u>вызначнікам</u> другога парадку, адпавядаючым матрыцы (1), называецца лік

$$\det \mathcal{A} \equiv \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}. \tag{2}$$

1.2. ДЭТЭРМІНАНТЫ ТРЭЦЯГА ПАРАДКУ

Разгледзім квадратную матрыцу памерам 3x3 з дзевяці лікаў

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

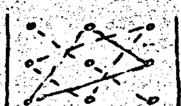
Лікі (элементы) a_{11}, a_{22}, a_{33} утвараюць <u>галоўную дыяганаль</u> матрыцы, а лікі (элементы) a_{13}, a_{22}, a_{31} – <u>пабочную</u>.

<u>Азначэнне 2</u>. <u>Дэтэрмінантам</u> або <u>вызначнікам</u> трэцяга парадку, адпавядаючым матрыцы (3), называецца лік

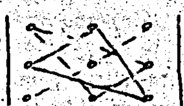
$$\det \mathcal{A} \equiv \Delta(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} +$$

$$+ a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11}. \tag{4}$$

Адным са спосабаў вылічэння дэтэрмінантаў трэцяга парадку з'яўляецца правіла трохвугольнікаў



(+)



(–)

1.3. ПАНЯЦЦЕ АБ ДЭТЭРМІНАНТАХ n-ГА ПАРАДКУ

Разгледзім квадратную матрыцу памерам $n \times n$ з n^2 лікаў

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Азначэнне 3. Дэтэрмінантам n-га парадку, адпавядаючым матрыцы (5), называецца лік, які абазначаецца

$$\det A \equiv \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Адзначым, што дэтэрмінанты 4-га і больш высокіх памераў вылічаюцца метадам зніжэння памернасці. Каб сфармуляваць гэты метад, увядзём:

Азначэнне 4. Алгебраічным дадаткам A_{ij} $(i,j = \overline{1,n})$, адпавядаючым элементу a_{ij}, называецца велічыня, вылічаемая па формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (i,j = \overline{1,n}), \tag{7}$$

дзе Δ_{ij} - мінор, г.зн. дэтэрмінант, які атрымліваецца з дэтэрмінанта (6) выкрэсліваннем радка і слупка на перасячэнні якіх знаходзіцца элемент a_{ij}.

Справядліва наступная тэарэма, якую мы прывядзем без доказу:

Тэарэма. Усякі дэтэрмінант роўны суме элементаў якога-небудзь радка або слупка, памножаных на алгебраічныя дадаткі, якія ім адпавядаюць.

Напрыклад:

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} \tag{8}$$

Роўнасць (8) з'яўляецца раскладаннем дэтэрмінанта (6) па элементах першага радка. З формулы (8) таксама вынікае, што дэтэрмінант n-га парадку зводзіцца да вылічэння n дэтэрмінантаў парадку $(n-1)$.

Заўвага. Колькасць вылічэнняў будзе найменшай, калі весці раскладанне дэтэрмінанта па радку або слупку, які змяшчае найбольшую колькасць нулёў.

Прыклад. Вылічыць дэтэрмінант, раскладаючы яго па элементах якога-небудзь радка або слупка. Выберам для гэтага першы радок

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -38 - 12 + 0 = -50.$$

1.4. УЛАСЦІВАСЦІ ДЭТЭРМІНАНТАЎ.

Разглядзець самастойна.

1.5. РАШЭННЕ СІСТЭМ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ УРАЎНЕННЯЎ МЕТАДАМ ДЭТЭРМІНАНТАЎ (МЕТАДАМ КРАМЕРА).

Разгледзім гэтае пытанне на прыкладзе сістэмы трох лінейных ураўненняў з трыма невядомымі:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = d_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = d_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = d_3 \end{cases} \tag{9}$$

Рашэннем сістэмы (9) называецца упарадкаваная тройка лікаў (x_1 , x_2 , x_3), якая **кожнае** ураўненне сістэмы ператварае ў тоеснасць.

Сістэма, якая мае хаця б адно рашэнне, называецца **сумяшчальнай**, а не маючая ніводнага рашэння - **несумяшчальнай**.

Уведзем дэтэрмінанты:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

Пры гэтым Δ называецца **асноўным** дэтэрмінантам сістэмы (9), а Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} - **дапаможнымі**.

На аснове уласцівасцей дэтэрмінантаў можна паказаць, што сістэма (9) эквівалентна сістэме

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1}, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2}, \\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_{x_3}. \end{cases} \quad (\mathrm{II}), \qquad (9) \Leftrightarrow (\mathrm{II}).$$

Магчымы наступныя выпадкі:

1. Калі асноўны дэтэрмінант сістэмы $\Delta \neq 0$, тады сістэма (II), а значыць і эквівалентная ей сістэма (9), мае адзінае рашэнне, якое знаходзіцца па формулах Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \qquad (12)$$

2. Няхай $\Delta = 0$, але хаця б адзін з дапаможных дэтэрмінантаў Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} не роўны нулю. У гэтым выпадку сістэма (II), а значыць і сістэма (9) рашэнняў не мае і будзе несумяшчальнай.

3. Няхай $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0$, $\Delta_{x_2} = 0$, $\Delta_{x_3} = 0$. У гэтым выпадку сістэма (9) можа аказацца несумяшчальнай або можа мець бясконцае мноства рашэнняў.

<u>Прыклад</u>: Рашыць метадам Крамера сістэму лінейных алгебраічных ураўненняў

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Упэўніцца самастойна, што

$$\Delta = 19, \quad \Delta_{x_1} = 19, \quad \Delta_{x_2} = 38, \quad \Delta_{x_3} = -19.$$

Тады

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-19}{19} = -1. \qquad (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1).$$

Азначэнне 5. Лінейная сістэма (9) называецца аднароднай, калі усе яе правыя часткі роўны нулю ($d_1 = d_2 = d_3 = 0$). У процілеглым выпадку сістэма называецца неаднароднай.

Справядліва наступная тэарэма, якую мы прывядзем без доказу:

Тэарэма. Для таго, каб аднародная сістэма лінейных алгебраічных ураўненняў (9) мела ненулявыя рашэнні, неабходна і дастаткова каб яе галоўны дэтэрмінант быў роўны нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

І.6. РАШЭННЕ СІСТЭМ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ УРАЎНЕННЯЎ МЕТАДАМ ПАСЛЯДОЎНАГА ВЫКЛЮЧЭННЯ НЕВЯДОМЫХ (МЕТАД ГАЎСА).

Разглядзець самастойна.

2. ЛІНЕЙНЫЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ. МАТРЫЦЫ І ДЗЕЯННІ НАД ІМІ.

2.І. ЛІНЕЙНЫЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ. МАТРЫЦЫ.

Разгледзім лінейнае пераўтварэнне агульнага віду

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n, \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases} \qquad (\text{I})$$

Лінейнае пераўтварэнне (І) можна інтэрпрэтаваць як пераўтварэнне n - мернага вектара $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у m - мерны вектар $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Азначэнне 1. Матрыцай лінейнага пераўтварэння (І) называецца прамавугольная табліца памеру $m \times n$ з каэфіцыентаў гэтага пераўтварэння без іх перастаноўкі

$$A = \overset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

Калі колькасць радкоў і слупкоў матрыцы супадае ($m = n$), тады яна называецца квадратнай.

Азначэнне 2. Дэтэрмінантам квадратнай матрыцы A называецца лік, які абазначаецца

$$\det A \equiv \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заўвага. Неквадратная матрыца дэтэрмінанта не мае.

Азначэнне 3. Матрыца A^T называецца транспанаванай, калі яе радкі з'яўляюцца слупкамі матрыцы A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Відавочна, што $(A^T)^T = A$.

У далейшым разам з разгорнутым запісам матрыцы A будзем выкарыстоўваць яе кароткі запіс

$$A = A_{m\times n} = \|a_{ij}\|, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}.$$

Азначэнне 4. Квадратная матрыца A называецца сіметрычнай, калі ўсе яе элементы, сіметрычныя адносна галоўнай дыяганалі, роўны паміж сабой.

$$A = \|a_{ij}\|, \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,n}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \; \forall\, i,j = \overline{1,n} \Leftrightarrow A = A^T.$$

Напрыклад,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Азначэнне 5. Сіметрычная матрыца называецца дыяганальнай, калі ў яе ўсе элементы па-за галоўнай дыяганаллю роўны нулю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv diag\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

Азначэнне 6. Дыяганальная матрыца ў якой усе элементы, якія знаходзяцца на галоўнай дыяганалі, роўны I, называецца адзінкавай і абазначаецца

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Азначэнне 7. Матрыца з аднаго радка або аднаго слупка называецца адпаведна радковай або слупковай

$$A=(a_{11}, a_{12} \dots a_{1n}), \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Радковую і слупковую матрыцы часта называюць вектарамі.

Азначэнне 8. Дзве матрыцы A і B лічацца роўнымі калі: I) яны аднолькавага памеру $m \times n$; 2) Усе іх адпаведныя элементы роўны паміж сабой.

$$A=A_{m\times n}=\|a_{ij}\|, \quad i=\overline{1,m}\,; \quad j=\overline{1,n},$$

$$B=B_{m\times n}=\|b_{ij}\|, \quad i=\overline{1,m}\,; \quad j=\overline{1,n},$$

$$A=B \iff a_{ij}=b_{ij}, \quad \forall\, i,j.$$

2.2. ДЗЕЯННІ НАД МАТРЫЦАМІ

I. СКЛАДАННЕ МАТРЫЦ.

Складаць паміж сабой можна толькі матрыцы аднолькавых памераў. Пры гэтым, каб атрымаць матрыцу сумы трэба скласці іх адпаведныя элементы.

Прыклад.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4 & -3+1 \\ 1+3 & 5+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Адыманне матрыц праводзіцца аналагічна.

2. МНОЖАННЕ МАТРЫЦЫ НА ЛІК.

Каб памножыць матрыцу на лік трэба усе яе элементы памножыць на гэты лік.

Напрыклад

$$3A=3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

3. МНОЖАННЕ МАТРЫЦ

Няхай матрыцу $B_{m\times k}=\|b_{ij}\|,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}$ з m радкоў і k слупкоў трэба памножыць злева на матрыцу $A_{k\times n}=\|a_{ij}\|,\ i=\overline{1,k};\ j=\overline{1,n}$ з k радкоў і n слупкоў. У выніку мы атрымаем матрыцу $B_{m\times k}\cdot A_{k\times n}=C_{m\times n}=\|c_{ij}\|,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$ з m радкоў і n слупкоў, элементы якой знаходзяцца па формуле

$$c_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{k} b_{i\lambda}\cdot a_{\lambda j} \qquad (1)$$

З роўнасці (1) вынікае, што элемент c_{ij} здабытка двух матрыц роўны суме здабыткаў элементаў i радка левай матрыцы B на адпаведныя элементы j слупка правай матрыцы A.

Прыклад.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4 \\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Параўноўваючы паміж сабой атрыманыя катрыцы мы бачым, што

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Такім чынам, для здабытка матрыц уласцівасць камутатыўнасці, наогул кажучы, не выконваецца.

Заўвага. Адзначым, што існуюць матрыцы перастановачныя адносна аперацыі множання. Да іх, у прыватнасці, належыць адзінкавая матрыца E, для якой

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

2.3. УЛАСЦІВАСЦІ МАТРЫЦ

Няхай $\lambda - \forall const$, A, B, C – матрыцы

Пераканацца самастойна у справядлівасці наступных формул:

1. $\lambda \cdot A \cdot B = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$,
2. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$,
3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,
4. $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Няхай A і B квадратныя матрыцы памеру $n \times n$. Тады

1. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.
2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

3. АДВАРОТНАЯ МАТРЫЦА. РАШЭННЕ СІСТЭМ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ УРАЎНЕННЯЎ МАТРЫЧНЫМ МЕТАДАМ.

3.1. АДВАРОТНАЯ МАТРЫЦА

Разгледзім квадратную матрыцу памеру $n \times n$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (I)$$

Квадратная матрыца называецца незвыроднай, калі яе дэтэрмінант $\det \mathcal{A} \neq 0$ і асаблівай або звыроднай у процілеглым выпадку.

Справядлівы наступныя тэарэмы, якія мы прывядзем без доказу.

Тэарэма I. Для незвыроднай матрыцы A існуе адзінал адваротная матрыца $\mathcal{A}^{-1}$, для якой

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{A} = E, \qquad (2)$$

дзе E – адзінкавая матрыца.

З роўнасці (2) вынікае, што матрыцы A і A^{-I} узаемна адваротны і перастаноўчыя адносна аперацыі множання. Няцяжка пераканацца, што $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$, $(\mathcal{A}\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot\mathcal{A}^{-1}$, $(\mathcal{A}^{T})^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^{T}$.

Тэарэма 2. Для незвыроднай матрыцы A адваротная матрыца A^{-I} знаходзіцца па правілу

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

дзе A_{ij} алгебраічныя дадаткі да элементаў a_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$.

Заўвага I. У адваротнай матрыцы алгебраічныя дадаткі да элементаў радкоў размешчаны ў слупках.

3.2. РАШЭННЕ СІСТЭМ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ УРАЎНЕННЯЎ МАТРЫЧНЫМ МЕТАДАМ

Разгледзім гэтае пытанне на прыкладзе сістэмы трох лінейных ураўненняў з трыма невядомымі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3. \end{cases} \qquad (4)$$

Увядзем матрыцы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Выкарыстаўшы правіла множання матрыц, запішам сістэму (4) у матрычнай форме

$$A\cdot X=D \tag{5}$$

Будзем лічыць, што матрыца A незвыродная, тады для яе існуе адваротная матрыца, якая знаходзіцца па формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

дзе A_{ij} - алгебраічныя дадаткі да элементаў a_{ij}, $i,j=\overline{1,3}$.

Памножым абедзве часткі ураўнення (5) злева на матрыцу A^{-1} і ўлічыўшы, што

$$A^{-1}AX=A^{-1}D,\quad A^{-1}A=E,\quad EX=X,$$

канчаткова атрымаем

$$X=A^{-1}D \tag{6}$$

Гэта будзе рашэнне матрычнага ўраўнення (5). Падставім у (6) разгорнутыя выразы матрыц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11}d_1+A_{21}d_2+A_{31}d_3 \\ A_{12}d_1+A_{22}d_2+A_{32}d_3 \\ A_{13}d_1+A_{23}d_2+A_{33}d_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_1 = \frac{A_{11}d_1 + A_{21}d_2 + A_{31}d_3}{\det A}, \quad x_3 = \frac{A_{13}d_1 + A_{23}d_2 + A_{33}d_3}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{A_{12}d_1 + A_{22}d_2 + A_{32}d_3}{\det A} \qquad (7)$$

Формулы (7) даюць рашэнне зыходнай сістэмы (4).

Заўвага 2. Зусім аналагічна знаходзіцца рашэнне лінейнай сістэмы з адвольным лікам невядомых, матрыца якой незвыродная.

Прыклад. Рашыць матрычным метадам сістэму

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 = -5. \end{cases} \qquad (4')$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$(4') \Longleftrightarrow AX = D \qquad (5')$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-3) = 5 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -(-1) = 1, \quad A_{21} = -3, \quad A_{22} = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = A^{-1}D \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+15 \\ 1-10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 \\ -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16/5 \\ -9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ -1,8 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 3,2, \\ x_2 = -1,8. \end{matrix}$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканайцеся, што рашэннем матрычнага ўраўнення $A\cdot X\cdot B = D$, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ з'яўляецца матрыца $X = A^{-1}\cdot D\cdot B^{-1}$.

3.3. РАНГ МАТРЫЦЫ. ТЭАРЭМА КРОНЭКЕРА-КАПЭЛІ.

Разгледзець самастойна.

3.4. УЛАСНЫ ВЕКТАР МАТРЫЦЫ.

Разгледзім квадратную матрыцу памеру 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

і ненулявы вэктар-слупок

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

які будзем называць проста вектарам

і абазначаць $\vec{X} \neq \vec{0} \iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$

Падзейнічаем матрыцай A злева на вектар $\vec{X}$.
У выніку атрымаем некаторы, наогул кажучы, новы вектар

$$A\cdot\vec{x} = \vec{y} \quad (9)$$

Разгледзім выпадак, калі вектар $\vec{y}$ паралельны вектару $\vec{x}$, г. зн. $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, $\lambda = const$.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (10)$$

Азначэнне. Калі пад дзеяннем матрыцы A вектар $\vec{x}$ пераходзіць у паралельны сабе вектар $\lambda\vec{x}$, тады ён называецца уласным вектарам матрыцы A, а лік λ пры гэтым называецца уласным значэннем, якое адпавядае дадзенаму уласнаму вектару.

Перапішам роўнасць (10) у выглядзе

$$A\cdot\vec{x} = \lambda E\vec{x} \iff (A-\lambda E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \quad (11)$$

або больш падрабязна

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (11')$$

Такім чынам, каардынаты уласнага вектара $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ павінны быць рашэннем сістэмы (II'). Для таго каб лінейная аднародная сістэма (II') мела ненулявыя рашэнні, неабходна і дастаткова, каб яе галоўны дэтэрмінант быў роўны нулю.

$$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

Ураўненне (12) называецца характэрыстычным ураўненнем матрыцы А.

У выпадку матрыцы трэцяга парадку яно будзе кубічным адносна λ . Рашаючы гэта ўраўненне мы знойдзем яго карані, якія будуць уласнымі значэннямі матрыцы А. Далей, каб знайсці каардынаты уласных вектараў, якія адпавядаюць кожнаму з уласных значэнняў, трэба па чарзе кожнае з іх падставіць у сістэму (II') і рашаючы кожны раз干 нанава атрыманую сістэму, знойдзем каардынаты уласнага вектара, адпавядаючага дадзенаму уласнаму значэнню.

Заўвага 3. З роўнасці (10) вынікае, што уласны вектар матрыцы знаходзіцца з дакладнасцю да лікавага множніка.

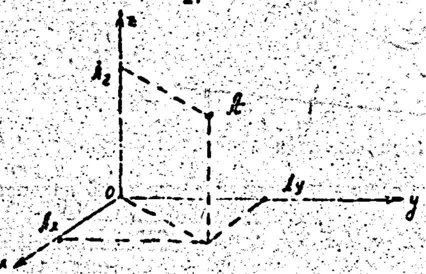
Такім чынам, кожнаму уласнаму значэнню адпавядае бясконцае мноства калінеарных уласных вектараў.

Заўвага 4. Можна даказаць, што калі рэчаісная матрыца А з'яўляецца сіметрычнай, тады ўсе яе уласныя значэнні будуць рэчаіснымі, а уласныя вектары, якія адпавядаюць розным уласным значэнням, будуць артаганальны паміж сабой.

4. ТРОХМЕРНАЯ ПРАСТОРА. ВЕКТАРЫ І ДЗЕЯННІ НАД ІМІ.

4.1. ТРОХМЕРНАЯ ПРАСТОРА R_3 . ВЕКТАРЫ.

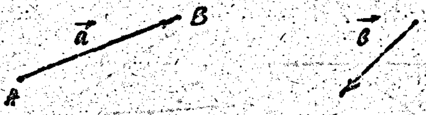
Разгледзім тры ўзаемна перпендыкулярныя восі Ox , Oy , Oz якія перасякаюцца ў пункце O.



Велічыні адрэзкаў $x = OA_x$, $y = OA_y$, $z = OA_z$, г. зн. даўжыні гэтых адрэзкаў з улікам знакаў, называюцца каардынатамі пункта A у трохмернай прасторы R_3.

Такім чынам, паміж усімі пунктамі трохмернай прасторы R_3 і ўпарадкаванымі тройкамі рэчаісных лікаў усталёўваецца ўзаемна адназначная адпаведнасць або ізамарфізм.

Азначэнне 1. Вектарам называецца накіраваны адрэзак.



Абазначаюць вектар пры дапамозе стрэлкі $\vec{a} = \vec{AB}$. Пры гэтым пункт A называецца пачаткам вектара AB, пункт B – яго канцом. Калі A = B, то $\vec{AB} = \vec{0}$ – нуль-вектар.

Два вектары называюцца калінеарнымі, калі яны належаць адной або паралельным прамым. Абазначаюць $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Пры неабходнасці адрозніваюць аднолькава накіраваныя $\uparrow\uparrow$ і процілегла накіраваныя $\uparrow\downarrow$ калінеарныя вектары.

Заўвага 1. Напрамкі некалінеарных вектараў параўноўваць нельга.

Азначэнне 2. Даўжынёй або модулем вектара $\vec{a} = \vec{AB}$ называецца даўжыня адрэзка AB.

Два вектары лічацца роўнымі, калі яны калінеарны, іх даўжыні роўны, а напрамкі супадаюць.

$$\vec{AB} = \vec{CD} \leftrightarrow \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}, \quad |\vec{AB}| = |\vec{CD}|.$$

Такім чынам, пачатак вектара можна змясціць у любы пункт прасторы з дапамогай паралельнага пераносу.

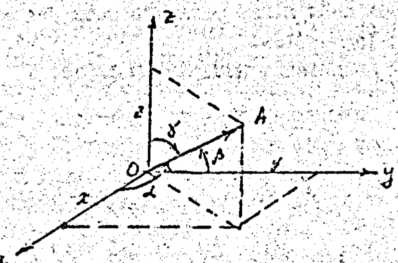
Разгледзім вектар $\vec{AB}$ і адвольную вось $\vec{u}$.

Велічыня A_1B_1 называецца праекцыяй вектара AB на вось $\vec{u}$

$$пр_{\vec{u}}\ \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$$

Вектар $\overrightarrow{OA}$, пачатак якога змешчаны ў пачатак сістэмы каардынат, называецца радыусам-вектарам пункта A.

Азначэнне 3. Каардынатамі вектара ў R_3 называюцца праекцыі гэтага вектара на адпаведныя каардынатныя восі.



Відавочна, што каардынаты радыуса-вектара OA супадаюць з каардынатамі пункта A. $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$. Даўжыня радыуса-вектара $\overrightarrow{OA}$ вылічаецца па формуле

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1)$$

Няхай A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), тады вектар $\overrightarrow{AB}$ будзе мець каардынаты $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ і яго даўжыня знойдзецца па формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2)$$

Абазначым цераз α, β, γ – вуглы, утвораныя радыусам-вектарам $\overrightarrow{OA}$ з дадатнымі напрамкамі каардынатных восей. Косінусы гэтых вуглоў маюць спецыяльную назву кіроўных косінусаў вектара OA.

Відавочна, што $x = |\overrightarrow{OA}|\cos\alpha,\ y = |\overrightarrow{OA}|\cos\beta,\ z = |\overrightarrow{OA}|\cos\gamma, \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OA}|},\quad \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OA}|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OA}|} \qquad (3)$$

Падвысім да квадрату абедзьве часткі кожнай роўнасці (3), складзем іх з улікам (1), атрымаем

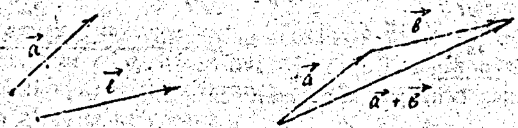
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$

Такім чынам, сума квадратаў кіроўных косінусаў любога вектара роўна адзінцы.

4.2. <u>ДЗЕЯННІ НАД ВЕКТАРАМІ.</u>

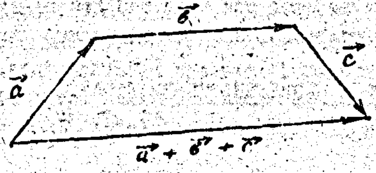
1. <u>СКЛАДАННЕ ВЕКТАРАЎ</u>

а) <u>Правіла трохвугольніка</u>



б) <u>Правіла паралелаграма</u>

в) <u>Правіла многавугольніка</u>



Разгледзім вектар $\vec a = \overrightarrow{AB}$. Вектар $\overrightarrow{BA} = -\vec a$ называецца <u>процілеглым</u> вектару $\vec a$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec a - \vec a = \vec 0 .$$

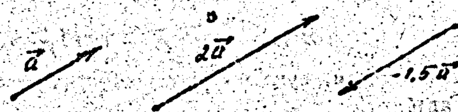
Даўжыня нулявога вектара лічыцца роўнай нулю, а яго напрамак нявызначаны.

2. <u>МНОЖАННЕ ВЕКТАРА НА ЛІК.</u>

Няхай дадзены вектар $\vec a \ne \vec 0$, і лік $\lambda \ne 0$, тады <u>здабыткам ліку λ на вектар $\vec a$</u> будзе вектар $\vec b = \lambda \vec a$ для якога:

$$|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|; \qquad \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a},\ \lambda > 0;$$

$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a},\ \lambda < 0.$



Калі $\vec{a} = \vec{O}$ або $\lambda = 0$, тады $\vec{b} = \lambda\,\vec{a} = \vec{O}$.
Няхай $\vec{a} \neq \vec{O}$. Разгледзім вектар $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}$, які $\vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a}$, бо $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ і $|\vec{a}_0| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$

Вектар $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ называюць <u>адзінкавым вектарам</u> для вектара $\vec{a}$, або <u>ортам</u> вектара $\vec{a}$.

Разгледзім два вектары, каардынаты якіх вядомы:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)\ ; \qquad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

<u>Тэарэтычнае практыкаванне</u>. Пераканацца самастойна, што

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2),$$
$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1)\ ,\quad \lambda - \forall\, const.$$

Няхай $\vec{b} = \lambda\vec{a} \iff x_2 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda y_1,\ z_2 = \lambda z_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda \iff \vec{b} \parallel \vec{a}.$$

З апошніх роўнасцей вынікае, што для таго каб два вектары былі калінеарны, неабходна і дастаткова, каб іх адпаведныя каардынаты былі прапарцыйнымі.

4.3. <u>ЛІНЕЙНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ І НЕЗАЛЕЖНАСЦЬ ВЕКТАРАЎ</u>.

У прасторы R_3 разгледзім вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.
Няхай мае месца роўнасць

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\cdot\vec{c}\ , \quad \lambda, \mu, \nu \in R \tag{5}$$

У гэтым выпадку гавораць, што вектар $\vec{d}$ з'яўляецца <u>лінейнай камбінацыяй</u> вектараў $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

<u>Азначэнне 4</u>. Вектары $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называюцца <u>лінейна залежнымі</u> калі сярод іх хаця б адзін вектар з'яўляецца лінейнай камбінацыяй астатніх. У процілеглым выпадку гэтыя вектары будуць <u>лінейна незалежнымі</u>.

Увядзем эквівалентнае паняцце лінейнай залежнасці і незалежнасці вектараў.

Азначэнне 5. Вектары $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ называюцца лінейна залежнымі, калі існуе такі набор лікаў $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$, сярод якіх хаця б адно не роўне нулю, што выконваецца роўнасць

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}. \tag{6}$$

Калі роўнасць (6) выконваецца толькі пры ўмове, што ўсе $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, тады вектары $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ будуць лінейна незалежнымі.

Тэарэтычныя практыкаванні. Дакажыце што:

1) Вектары $\vec{0}, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ заўсёды лінейна залежныя;

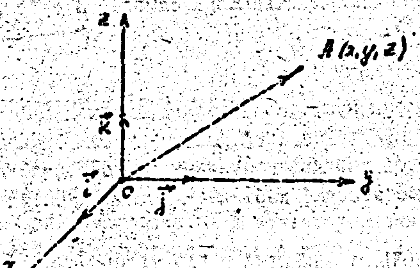
2) Калі сукупнасць вектараў лінейна незалежная, тады і любая яе частка лінейна незалежная.

3) Калі частка сукупнасці вектараў лінейна залежная, тады і ўся сукупнасць вектараў лінейна залежная.

Найбольшы лік лінейна незалежных вектараў, разглядаемых у канкрэтнай прасторы, утварае базіс гэтай прасторы. Можна даказаць, што базіс прасторы супадае з яе памернасцю. У трохмернай прасторы ў якасці базісных можна ўзяць любыя тры вектары ў поўным парадку, якія не належаць адной плоскасці (некампланарныя).

У прасторы R_3 разгледзім чатыры вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, тры з якіх $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некампланарныя, г.зн. яны могуць быць узяты за базісныя ў R_3. Тады роўнасць (5) уяўляе сабой расклад вектара $\vec{d}$ па базісу з вектараў $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, пры гэтым лікі λ, μ, ν будуць каардынатамі вектара $\vec{d}$ у дадзеным базісе.

У якасці найбольш простага і ўжывальнага базіса ў R_3 выбіраецца базіс з трох узаемна перпендыкулярных адзінкавых вектараў (ортаўнармаваны базіс), які мы і будзем разглядаць у дальнейшым



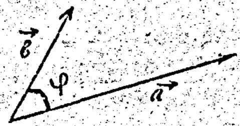
$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \iff \vec{a} = (x, y, z).$$

5. СКАЛЯРНЫ, ВЕКТАРНЫ І МЯШАНЫ ЗДАБЫТКІ ВЕКТАРАЎ.

5.1. СКАЛЯРНЫ ЗДАБЫТАК ВЕКТАРАЎ.

Разгледзім два вектары -



Азначэнне. Скалярным здабыткам вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ называецца лік, роўны здабытку даўжынь гэтых вектараў на косінус вугла паміж імі

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{I}$$

Відавочна, што

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \tag{I'}$$

5.2. УЛАСЦІВАСЦІ СКАЛЯРНАГА ЗДАБЫТКА.

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ - камутатыўнасць,
2. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \lambda\vec{b})$, $\lambda = \forall const$,
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$

Такім чынам, скалярны здабытак вектара самога на сябе ровен квадрату яго модуля (даўжыні).

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$.

Скалярны здабытак роўны нулю тады і толькі тады, калі гэтыя вектары перпендыкулярны, ці любы з іх роўны нулявому вектару.

Такім чынам, для таго, каб два ненулявых вектары былі перпендыкулярны, неабходна і дастаткова, каб іх скалярны здабытак быў роўны нулю.

5.3. ВЫРАЖЭННЕ СКАЛЯРНАГА ЗДАБЫТКА ПРАЗ КААРДЫНАТЫ ВЕКТАРАЎ-МНОЖНІКАЎ.

Няхай, як звычайна, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - артаўнармаваны базіс у R_3.

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \iff \vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \iff \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Саставім табліцу скалярных здабыткаў базісных вектараў.

$$\begin{aligned} &\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1, && \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0, \\ &\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1, && \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0, \\ &\vec{k}\cdot\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1, && \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Выкарыстоўваючы уласцівасці скалярнага здабытка і роўнасці (2), атрымаем

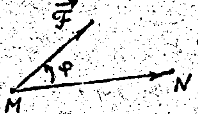
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{3}$$

Такім чынам, скалярны здабытак двух вектараў роўны суме здабыткаў аднаіменных каардынат.

З роўнасцей (I), (3) і формулы для вылічэння даўжыні вектара можна знайсці косінус вугла паміж вектарамі, а значыць і сам вугал.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{4}$$

З дапамогай скалярнага здабытка вылічаецца работа A, выкананая пад дзеяннем сілы $\vec{F}$ пры перамяшчэнні матэрыяльнай кропкі уздоўж прамалінейнага шляху $\overrightarrow{MN}$.



$$A = |\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cos\varphi = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}.$$

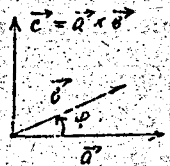
5.4. ВЕКТАРНЫ ЗДАБЫТАК ВЕКТАРАЎ.

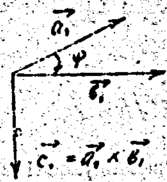
Азначэнне. Вектарным здабыткам двух вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ называецца трэці вектар $\vec{c}$, даўжыня якога роўна плошчы паралелаграма, пабудаванага на вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вектар $\vec{c}$ накіраван перпендыкулярна плоскасці з вектараў-множнікаў такім чынам, што найкарацейшы паварот ад першага вектара да другога будзе бачны супраць гадзіннікавай стрэлкі, калі глядзець з канца вектара $\vec{c}$.

Выкарыстоўваюцца наступныя абазначэнні:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

З азначэння вынікае, што:





$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi = S_{\square}$$

5.5. УЛАСЦІВАСЦІ ВЕКТАРНАГА ЗДАБЫТКУ.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – антыкамутатыўнасць,
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
3. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$, $\lambda - \forall\ const$,
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
   $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Тэарэма. Для таго, каб два ненулявых вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ былі калінеарнымі, неабходна і дастаткова, каб

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Доказ: 1) Неабходнасць: Вядома, што $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow$

$$\varphi = 0 \text{ ці } \varphi = \pi \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}| =$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

2) Дастатковасць: Вядома, што $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| =$

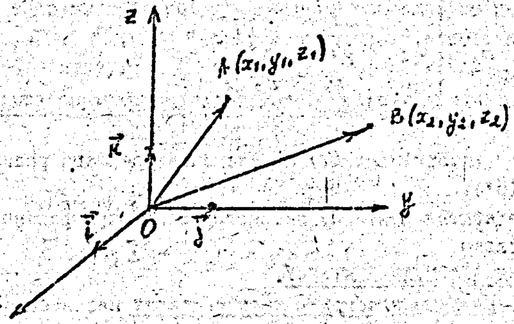
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ці } \varphi = \pi$$

$$\iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Тэарэма даказана.

5.6. ВЫРАЖЭННЕ ВЕКТАРА ВЕКТАРНАГА ЗДАБЫТКА ЦЕРАЗ КААРДЫНАТЫ ВЕКТАРАЎ-МНОЖНІКАЎ

Няхай



$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\cdot\vec{j} + z_1\vec{k} \iff \vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\cdot\vec{j} + z_2\vec{k} \iff \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Саставім табліцу вектарных здабыткаў базісных вектараў

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i} = \vec{0} & \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} & \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k} & \vec{j}\times\vec{j} = \vec{0} & \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} & \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i} & \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0} \end{array} \tag{5}$$

Выкарыстоўваючы ўласцівасці вектарнага здабытка і роўнасці (5), атрымаем

$$\vec{a}\times\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}. \tag{6}$$

З дапамогай дэтэрмінантаў другога парадку роўнасць (6) запішам у выглядзе

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \tag{6'}$$

Вектар вектарнага здабытка двух вектараў зручна запісваць і запамінаць у выглядзе сімвалічнага дэтэрмінанта трэцяга парадку

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Раскладаючы дэтэрмінант (7) па элементах першага радка, атрымаем роўнасць (6').

Вектарны здабытак вектараў скарыстоўваецца пры рашэнні шматлікіх тэхнічных задач.

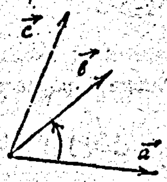
5.7. МЯШАНЫ ЗДАБЫТАК ВЕКТАРАЎ.

Азначэнне. Мяшаным здабыткам трох вектараў называецца лік, які атрымаецца, калі два вектары памножыць паміж сабой вектарна, а затым атрыманы вектар памножыць скалярна на трэці вектар.

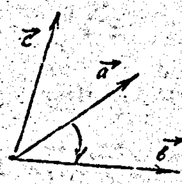
Абазначаецца $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = [\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}$.

Тры вектары называюцца кампланарнымі, калі яны належаць адной плоскасці.

Увядзём паняцце адной плоскасці правай і левай тройкі вектараў. Упарадкаваная тройка некампланарных вектараў $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называецца правай, калі найкарацейшы паварот ад першага вектара да другога бачны супраць гадзіннікавай стрэлкі (↖), калі глядзець з канца трэцяга вектара. У адваротным выпадку гэта тройка левая.



правая



левая

Геаметрычны сэнс мяшанага здабытку вызначаецца наступнай тэарэмай.

Тэарэма. Мяшаны здабытак трох вектараў $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ роўны аб'ёму паралелепіпеда, пабудаванага на гэтых вектарах, узятаму са знакам "+" калі тройка вектараў $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая і са знакам "-", калі яна левая.

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \pm V.$$

Доказ тэарэмы правесці самастойна, пабудаваўшы паралелепіпед на вектарах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і скарыстаўшы ўласцівасці вектарнага і скалярнага здабыткаў.

5.8. ВЫРАЖЭННЕ МЯШАНАГА ЗДАБЫТКА ПРАЗ КААРДЫНАТЫ ВЕКТАРАЎ-МНОЖНІКАЎ.

Няхай

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}.$$

У адпаведнасці з формулай (6')

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Памножым гэты вектар скалярна на $\vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3, \quad (8)$$

Што раўназначна

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (9).$$

Формула (8) атрымаецца, калі дэтэрмінант (9) раскласці па элементах трэцяга радка.

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца самастойна, што

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{b} \times \vec{c}] \cdot \vec{a} = [\vec{c} \times \vec{a}] \cdot \vec{b}.$$

Відавочна, што калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ кампланарны, то іх мяшаны здабытак роўны нулю.

Адваротнае сцвярджэнне таксама мае месца.

Такім чынам, неабходная і дастатковая умова кампланарнасці вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можа быць запісана ў выглядзе

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

6. ЛІНЕЙНЫЯ ПРАСТОРЫ, ІХ ПАМЕРНАСЦЬ І БАЗІС

6.1. ЛІНЕЙНЫЯ ПРАСТОРЫ

Разгледзім непустое мноства V з элементамі x, y, z, ...

1) Няхай па вызначанаму закону для любых элементаў $x, y \in V$ ім адпавядае трэці элемент мноства V, $z = x+y$, $z \in V$, тады кажуць, што на мностве V вызначана аперацыя складання яго элементаў.

2) Калі для $\forall x \in V$ і любога рэчаіснага ліку $\alpha \in R$ ім адпавядае элемент мноства V $\alpha x \in V$, тады кажуць, што на мностве V вызначана аперацыя множання элементаў гэтага мноства на рэчаісныя лікі.

Будзем лічыць, што ўведзеныя аперацыі складання элементаў і множання элемента на рэчаісны лік адпавядаюць наступным аксіёмам:

1. $x+y=y+x$, $\forall x,y \in V$.
2. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in V$.
3. На мностве V існуе нулявы элемент 0; $\exists 0 \in V$
   $x+0=0+x=x$, $\forall x \in V$
4. $\forall x \in V \Rightarrow \exists (-x) \Rightarrow x+(-x)=0$.
5. $1\cdot x = x$, $\forall x \in V$.
6. $\alpha\beta\cdot x = \alpha(\beta x)$, $\forall \alpha,\beta \in R$, $\forall x \in V$
7. $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$, $\forall \alpha,\beta \in R$, $\forall x \in V$
8. $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$, $\forall \alpha \in R$, $\forall x,y \in V$.

Азначэнне 1. Мноства V, у якім уведзены аперацыі складання элементаў і множання элемента на рэчаісны лік, адпавядаючыя аксіёмам 1-8 называецца **лінейнай прасторай**.

У дальнейшым элементы лінейнай прасторы x , y , z,... незалежна ад іх паходжання будзем называць вектарамі і абазначаць $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, ... Таму лінейная прастора іншы раз называецца <u>вектарнай прасторай</u>.

<u>Азначэнне 2.</u> Мноства V_1 , якое укладзена у V , называецца <u>падпрасторай</u> прасторы V , калі аперацыі складання элементаў і множання элементаў на лік уводзяцца таксама, як і у прасторы V . Акрамя таго:

1. $x+y \in V_1$, $\forall x,y \in V_1$

2. $\alpha x \in V_1$, $\forall \alpha \in R$, $\forall x \in V_1$.

<u>Тэарэтычнае практыкаванне</u>. Пераканацца самастойна, што падпрастора лінейнай прасторы будзе лінейнай прасторай.

Для лінейных прастораў справядлівы наступныя сцвярджэнні:

1. У любой лінейнай прасторы існуе адзіны нулявы элемент.

<u>Доказ</u>. Дапусцім, што у лінейнай прасторы V існуюць два нулявых элементы $\vec{0}_1$ і $\vec{0}_2$, тады

$$\vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_1 \Rightarrow \vec{0}_2=\vec{0}$$
$$\vec{0}_2+\vec{0}_1=\vec{0}_2 \Rightarrow \vec{0}_1=\vec{0}$$

Па аксіёме I $\quad \vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_2+\vec{0}_1 \Leftrightarrow \vec{0}_1=\vec{0}_2$

2. Для любога $\vec{x} \in V$ існуе адзіны процілеглы элемент $(-\vec{x})$.

<u>Доказ</u>. Дапусцім, што для элемента $\vec{x}$ існуюць два процілеглых элементы $(-\vec{x}_1)$ і $(-\vec{x}_2)$

$$\vec{x}+(-\vec{x}_1)=\vec{0}, \quad \vec{x}+(-\vec{x}_2)=\vec{0}.$$
$$\vec{x}+(-\vec{x}_1)+(-\vec{x}_2)=(\vec{x}+(-\vec{x}_1))+(-\vec{x}_2)=\vec{0}+(-\vec{x}_2)=-\vec{x}_2$$
$$\vec{x}+(-\vec{x}_1)+(-\vec{x}_2)=(\vec{x}+(-\vec{x}_2))+(-\vec{x}_1)=\vec{0}+(-\vec{x}_1)=-\vec{x}_1$$
$$\Rightarrow (-\vec{x}_1)=(-\vec{x}_2).$$

3. $0\cdot\vec{x}=0$, $\forall x \in V$

<u>Доказ</u>. $0\cdot\vec{x}+\vec{x}+(-\vec{x})=(0+1)\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$.

Наступныя простыя уласцівасці прывядзем без доказу.

4. $(-1)\vec{x} = (-\vec{x})$, $\forall x \in V$.
5. $-(-\vec{x}) = \vec{x}$.
6. $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{O}$, $\vec{x} \neq \vec{O} \Rightarrow \alpha = 0$
7. $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{O}$, $\alpha \neq 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{O}$.

6.2. ЛІНЕЙНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ І НЕЗАЛЕЖНАСЦЬ ВЕКТАРАЎ.

Разгледзім у лінейнай прасторы $V(n+1)$ вектар $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}, \vec{y}$. Няхай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$. Тады, калі $\vec{y} = \alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + \dots + \alpha_n\vec{x_n}$, то гавораць, што $\vec{y}$ з'яўляецца лінейнай камбінацыяй вектараў $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$

Азначэнне 3. Вектары $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ называюцца лінейна незалежнымі, калі роўнасць

$$\alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + \dots + \alpha_n\vec{x_n} = O \qquad (I)$$

выконваецца толькі пры $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
Калі ў роўнасці (I) хаця б адзін з лікавых каэфіцыентаў не роўны нулю, тады вектары $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ будуць лінейна залежнымі.

Тэарэма I. Для таго, каб вектары $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ былі лінейна залежнымі, неабходна і дастаткова, каб хаця б адзін з іх быў лінейнай камбінацыяй астатніх.

Доказ. Неабходнасць. Вядома, што вектары $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ лінейна залежныя. Гэта азначае, што выконваецца роўнасць (I), у якой хаця б адзін з лікавых каэфіцыентаў не роўны нулю. Дапусцім, што $\alpha_k \neq 0$, тады з (I) атрымаем

$$\vec{x_k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\vec{x_i} \qquad i \neq k, \qquad (2)$$

З роўнасці (2) вынікае, што вектар $\vec{x_k}$ з'яўляецца лінейнай камбінацыяй астатніх.

Дастатковасць. Вядома, што адзін з вектараў з'яўляецца лінейнай камбінацыяй астатніх. Дапусцім, што гэта $\vec{x_k}$, г.зн., што выконваецца роўнасць (2).

Перапішам гэтую роўнасць, пераносячы ўсе ў левую частку.

$$\vec{x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\vec{x_i} = \vec{O}, \; i \neq k.$$

Апошняя роўнасць з'яўляецца частковым выпадкам (I), у якім каэфіцыент $\alpha_k = 1 \neq 0$

Значыць вектары $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ лінейна залежныя.

6.3. ПАМЕРНАСЦЬ І БАЗІС ЛІНЕЙНАЙ ПРАСТОРЫ. КААРДЫНАТЫ ВЕКТАРА.

Разгледзім лінейную прастору V, адносна якой дапусцім наступнае:

1. У прасторы V існуе n лінейна незалежных вектараў.
2. Любые $(n+1)$ вектар прасторы V лінейна залежныя.

У гэтым выпадку лік n называецца <u>памернасцю</u> прасторы V.

Прастору памернасці n называюць звычайна <u>n- мернай</u>.

<u>Азначэнне 4</u>. <u>Базісам</u> n-мернай прасторы V называецца любая сукупнасць з n лінейна незалежных вектараў $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$.

<u>Тэарэма 2</u>. Любы вектар $\vec{x}$, які належыць n-мернай прасторы V, можа быць выражаны адзіным вобразам у выглядзе лінейнай камбінацыі базісных вектараў, г.зн.

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \dots + \alpha_n \vec{e_n} \qquad (3)$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$.

<u>Доказ</u>. Разгледзім вектары $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}, \vec{x}$. Так як па дапушчэнню прастора V n-мерная, то любые $n+1$ вектары будуць лінейна залежнымі, г.зн. будзе выканана роўнасць

$$\beta_1 \vec{e_1} + \beta_2 \vec{e_2} + \dots + \beta_n \vec{e_n} + \beta_{n+1} \vec{x} = \vec{0}. \qquad (1')$$

Пакажам, што $\beta_{n+1} \neq 0$. Калі дапусціць, што $\beta_{n+1} = 0$, то мы атрымаем роўнасць нулявому вектару з n лінейна незалежных вектараў пры ўмове, што адзін з каэфіцыентаў пры іх не роўны нулю, што супярэчыць умове лінейнай незалежнасці гэтых вектараў. Значыць $\beta_{n+1} \neq 0$, тады з (1') вынікае, што

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}, \quad \alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_{n+1}} \qquad (3')$$

Дакажам цяпер адзінкавасць выяўлення (3'). Няхай існуе другое выяўленне

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \vec{e_i}, \quad \gamma_i \in R \qquad (4)$$

Адымем цяпер роўнасць (4) з роўнасці (3'), атрымаем

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_i) \vec{e_i}. \qquad (5)$$

Так як вектары $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ базісныя, а значыць лінейна незалежныя, то ў роўнасці (5) усе каэфіцыенты пры іх роўны нулю. Значыць $\alpha_i = \gamma_i$, $i = \overline{1,n}$. Роўнасць (3) называецца раскладам вектара $\vec{x}$ па базісу з вектараў $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$.

При гэтым лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будуць каардынатамі вектара у выбраным базісе.

$$\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Адзначым, што над n -мернымі вектарамі арыфметычныя аперацыі складання вектараў і множання вектара на лік аналагічныя як, і над трохмернымі вектарамі.

7. ЕЎКЛІДАВА ПРАСТОРА. НЕКАТОРЫЯ ВАЖНЫЯ НЯРОЎНАСЦІ.

7.1. ЕЎКЛІДАВА ПРАСТОРА.

Азначэнне 1. Лінейная прастора V называецца еўклідавай, калі для $\forall x, y \in V$ уводзіцца аперацыя скалярнага здабытка, адпавядаючая аксіёмам:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.
2. $((\vec{x}+\vec{y}), \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$.
3. $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$, $\forall \alpha \in R$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Такім чынам, для таго каб лінейная прастора была еўклідавай, патрэбна каб акрамя васьмі аксіем лінейнай прасторы выконваліся яшчэ чатыры аксіемы скалярнага здабытка.

7.2. ЛІНЕЙНАЯ ПРАСТОРА R_n .

Абагульненнем трохмернай прасторы R_3 з'яўляецца арыфметычная n -мерная прастора R_n , $n \in N$, элементамі якой з'яўляюцца n -мерныя вектары або n -мерныя пункты.

$$\vec{x} \in R_n \Leftrightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ x_i \in R, \ i = \overline{1,n}.$$

Няхай $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$, $\alpha \in R$. У прасторы R_n аперацыі складання элементаў і множання элемента на лік уводзяцца наступным чынам:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$,

$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца самастойна, што для R_n, выконваюцца усе восем аксіём лінейнай прасторы.

Азначэнне 2. Даўжыней або нормай вектара $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$ называецца неадмоўны лік, які вызначаны формулай

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \qquad (1)$$

Азначэнне 2. Адлегласць паміж двумя n -мернымі пунктамі $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x, y \in R_n$ вызначаецца роўнасцю

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \qquad (2)$$

Азначэнне 3. Скалярны здабытак n -мерных вектараў $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$ вызначаецца формулай

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n . \qquad (3)$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца самастойна, што для $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$ выконваюцца усе чатыры аксіемы скалярнага здабытку.

Такім чынам, лінейная прастора R_n, у якой аперацыя скалярнага здабытку ўведзена роўнасцю (3), будзе еўклідавай.

7.3. НЕКАТОРЫЯ ВАЖНЫЯ НАРОЎНАСЦІ.

I. Для любых элементаў $\vec{x}$, $\vec{y}$ лінейнай прасторы V справядлівы няроўнасць Кашы-Бунякоўскага

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \le \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} . \qquad (4)$$

Доказ. Разгледзім скалярны здабытак вектара $\vec{x} + \lambda\vec{y}$, $\lambda \in R$ самога на сябе. З аксіем скалярнага здабытка еўклідавай прасторы вынікае, што

$$(\vec{x} + \lambda\vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda\vec{y}) \ge 0$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) + \lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda(\vec{y}, \vec{x}) + \lambda^2(\vec{y}, \vec{y}) =$$

$$= (\vec{x}, \vec{x}) + 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2(\vec{y}, \vec{y}) \ge 0$$

Атрыманая няроўнасць з'яўляецца квадратнай адносна λ і паколькі квадратны трохчлен неадмоўны пры любых λ, то яго дыскрымінант $\mathcal{D} \le 0$.

$$\mathcal{D} \equiv 4(\vec{x},\vec{y})^2 - 4(\vec{x},\vec{x})\cdot(\vec{y},\vec{y}) \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |(\vec{x},\vec{y})| \le \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\cdot\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}.$$

Калі $V = R_n$, г. зн. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, тады няроўнасць (4) запішацца ў выглядзе

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \qquad (4')$$

Так як $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$, то няроўнасць Кашы-Бунякоўскага можа быць запісана ў выглядзе

$$|(\vec{x},\vec{y})| \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|. \qquad (4'')$$

2. Няроўнасць трохвугольніка.

З дапамогай няроўнасці Кашы-Бунякоўскага дакажам няроўнасць трохвугольніка

$$|\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|, \quad \forall\, \vec{x},\vec{y} \in V \qquad (5)$$

Доказ.

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}\cdot\vec{x}) + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + (\vec{y}\cdot\vec{y}) \le$$

$$\le |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}| + |\vec{y}|^2 \Rightarrow |\vec{x}+\vec{y}|^2 \le (|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Няхай $\vec{x} \ne 0$, $\vec{y} \ne 0$, $\vec{x},\vec{y} \in V$, V – лінейная еўклідава прастора.

З няроўнасці (4'') вынікае

$$\frac{|(\vec{x},\vec{y})|}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} \le 1 \qquad (6)$$

Паколькі $-1 \le \cos\varphi \le 1 \Rightarrow \exists\, \varphi \in [0,\pi]$, для якога

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}; \qquad (7)$$

Такім чынам, косінус вугла паміж любымі двумя элементамі лінейнай еўклідавай прасторы можна знайсці па формуле (7).

У прыватнасці, па гэтай формуле можна вызначыць косінус вугла паміж n-мернымі вектарамі ў прасторы R_n. З (7) вынікае, што

$$(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\varphi \qquad (7')$$

Два элементы лінейнай еўклідавай прасторы $\vec{x},\vec{y}\in V$ называюцца <u>артаганальнымі</u>, калі іх скалярны здабытак роўны нулю

$$(\vec{x},\vec{y})=0 \iff \vec{x}\perp\vec{y}.$$

Кожнаму элементу або вектару лінейнай еўклідавай прасторы адпавядае <u>адзінкавы вектар</u>

$$\vec{x}\to\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\vec{x}_0 \to |\vec{x}_0|=1.$$

Сукупнасць вектараў $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ лінейнай еўклідавай прасторы называецца ортаўнармаванай, калі

$$(\vec{x}_i,\vec{x}_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}, \quad i,j=\overline{1,n}.$$

<u>Тэарэтычныя практыкаванні</u>. Дакажыце самастойна, што:

I. Калі вектары $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ ортаўнармаваны, то яны лінейна незалежны паміж сабой.

2. У любой лінейнай еўклідавай прасторы V існуе базіс з лінейна незалежных ортаўнармаваных вектараў.

3. Калі вектары $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ утвараюць ортаўнармаваны базіс у лінейнай еўклідавай прасторы V, пры гэтым
$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n,\ \vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\ldots+\beta_n\vec{e}_n,\ \alpha_i,\beta_i\in R,$
тады скалярны здабытак

$$(\vec{a},\vec{b})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i.$$

У заключэнне адзначым, што ў прасторы R_n у якасці найбольш зручнага ортаўнармаванага базіса выбіраецца сукупнасць вектараў:

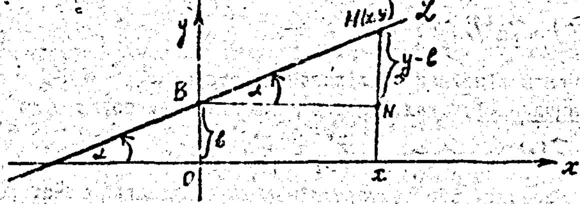
$$\vec{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \vec{e}_n=(0,0,0,\ldots,1).$$

---

8. <u>ПРАМАЯ ЛІНІЯ НА ПЛОСКАСЦІ. ЗАДАЧЫ НА ПРАМУЮ ЛІНІЮ НА ПЛОСКАСЦІ</u>.

8.I. <u>ПРАМАЯ ЛІНІЯ НА ПЛОСКАСЦІ</u>.

На плоскасці xoy разгледзім прамую лінію ($\mathcal{L}$), не паралельную восі oy, якая ўтварае з дадатным напрамкам восі Ox вугал α.



На прамой ($\mathcal{L}$) выберам пункт $M(x,y)\in(\mathcal{L})$. З $\Delta\ BMN$ атрымаем, што

$$\frac{y-b}{x}=tg\,\alpha=k \iff y=kx+b \qquad (1)$$

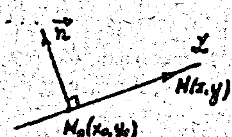
Ураўненне (1) называецца <u>ураўненнем прамой з зададзеным вуглавым каэфіцыентам</u>.

Дакажам, што ўраўненне любой прамой на плоскасці xOy можа быць запісана ў выглядзе

$$Ax+By+C=0,\quad A,B,C\in R \qquad (2)$$

Ураўненне (2) называецца <u>агульным ураўненнем прамой</u> на плоскасці xOy.

<u>Доказ</u>. Разгледзім на плоскасці xOy прамую ($\mathcal{L}$) і выберам вектар $\vec{n}=(A,B)$, артаганальны ей.



Выберам на прамой ($\mathcal{L}$) два пункты: фіксаваны пункт $M_0(x_0,y_0)$ і зменны пункт $M(x,y)$. Вектар $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0)$.

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M} \Longrightarrow (\vec{n},\overrightarrow{M_0M})=0$$

Паколькі каардынаты вектараў $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ нам вядомы, то апошняя роўнасць запішацца ў выглядзе

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (2')$$

Ураўненне (2') ёсць <u>ураўненне прамой</u>, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0,y_0)$ з нармальным вектарам $\vec{n}=(A,B)$.

$$3\ (2') \Rightarrow Ax+By-Ax_0-By_0=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow Ax+By+C=0\ ,\quad A, B,\ C=-Ax_0-By_0 \in \mathbb{R}.$$

Сцвярджэнне даказана.

Тэарэтычнае практыкаванне. Даказаць самастойна адваротнае сцвярджэнне: Усякае ўраўненне першай ступені адносна бягучых каардынат вызначае на плоскасці некаторую прамую.

Разгледзім цяпер частковыя выпадкі агульнага ўраўнення (2).

3 (2) $\Rightarrow$

1. $B\neq 0,\ y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \Longleftrightarrow y=kx+b,\ k=-A/B,\ b=-C/B$
2. $B=0,\quad Ax+C=0 \Longleftrightarrow x=-C/A=a \Longleftrightarrow \mathcal{L}\perp Ox\ (\mathcal{L}\parallel Oy).$
3. $A=0,\quad By+C=0 \Longleftrightarrow y=-C/B=b \Longleftrightarrow \mathcal{L}\perp Oy\ (\mathcal{L}\parallel Ox).$
4. $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0,\quad Ax+By+C=0 \Longleftrightarrow -A/C\,x-B/C\,y=1 \Rightarrow$

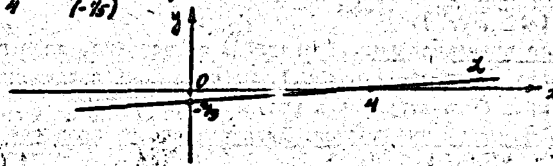
$$\Longleftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad a=-\frac{C}{A};\ b=-\frac{C}{B} \qquad (3)$$

Ураўненне (3) называецца ўраўненнем прамой у адрэзках, дзе a, b – велічыні адрэзкаў, адсякаемых гэтай прамой на адпаведных каардынатных восях.

Прыклад. Ад агульнага ўраўнення прамой перайсці к ураўненню прамой у адрэзках і пабудаваць яе графік.

$$(\mathcal{L}): x-20y-4=0 \Longleftrightarrow x-20y=4 \Longleftrightarrow \frac{x}{4}-5y=1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{(-1/5)}=1,\quad a=4,\quad b=-1/5$$



Становішча прамой ($\mathcal{L}$) адназначна вызначаецца, калі вядомы пункт $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{L}$ і вектар $\vec{a}=(l,m)\parallel\mathcal{L}$. Усякі ненулявы вектар $\vec{a}$, які паралельны прамой ($\mathcal{L}$), называецца накіроўваючым вектарам гэтай прамой.

З умовы калінеарнасці вектараў $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ вынікае, што

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (4)$$

Ураўненне (4) называецца кананічным ураўненнем прамой ($\mathcal{L}$).
З умовы $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \Rightarrow \exists t \in R \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \Longleftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = \ell t, \\ y - y_0 = mt. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \quad t \in R \qquad (5)$$

Ураўненні (5) называюцца параметрычнымі ўраўненнямі прамой ($\mathcal{L}$), якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0, y_0)$ з накіроўваючым вектарам $\vec{a} = (\ell, m)$

8.2. ЗАДАЧЫ НА ПРАМУЮ ЛІНІЮ НА ПЛОСКАСЦІ.

I. Саставіць ураўненне прамой з зададзеным вуглавым каэфіцыентам К, якая праходзіць праз пункт M_1 (x_1 , y_1).

Ураўненне прамой з зададзеным вуглавым каэфіцыентам К мае выгляд

$$y = kx + b \qquad (6)$$

Так як M_1 (x_1 , y_1) $\in$ ($\mathcal{L}$), то

$$y_1 = kx_1 + b \qquad (7)$$

Адымаючы з роўнасці (6) роўнасць (7) атрымаем

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (8)$$

Гэта і ёсць ураўненне адшукваемай прамой.

Заўвага. Калі мы пункт M_1 (x_1 , y_1) пакінем фіксаваным, а вуглавы каэфіцыент К будзем мяняць, то кожны раз будзем атрымліваць новую прамую, якая праходзіць праз пункт M_1, г. зн. ураўненне (8) можна разглядаць як ураўненне пучка прамых, якія праходзяць праз пункт M_1 (x_1 , y_1).

Тэарэтычнае практыкаванне. Высветліць самастойна, якая прамая праходзячая цераз пункт M_1 (x_1 , y_1), не можа быць зададзена ураўненнем (8), а можа быць атрымана з ураўнення (2').

2. Саставіць ураўненне прамой, якая праходзіць праз два пункты M_1 (x_1 , y_1), M_2 (x_2 , y_2).

Ураўненне прамой, якая праходзіць праз пункт M_1 (x_1 , y_1) мае від (8). Так як пункт M_2 (x_2 , y_2) $\in$ ($\mathcal{L}$), то яго каардынаты задавальняюць ураўненню прамой.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Longrightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Падстаўляючы К у (8), атрымаем

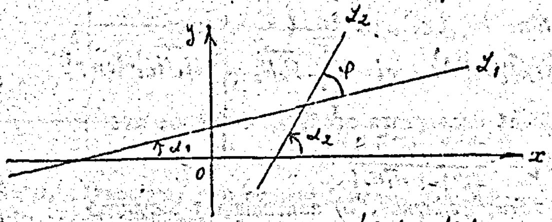
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Longleftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (9)$$

Ураўненне (9) есць ураўненне прамой, якая праходзіць праз два пункты $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

3. <u>Вугл α паміж двума прамымі. Умова паралельнасці і перпендыкулярнасці двух прамых.</u>

Няхай $(\mathcal{L}_1):\ y = k_1 x + b_1,\quad k_1 = tg\,\alpha_1,$

$(\mathcal{L}_2):\ y = k_2 x + b_2,\quad k_2 = tg\,\alpha_2.$



$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,\quad tg\,\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$\Rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right). \qquad (10)$$

Няхай: 1)

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow tg\,\varphi = tg\,0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \qquad (11)$$

$$2.\ \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\,\varphi = tg\,\frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (12)$$

Такім чынам, вуглавыя каэфіцыенты паралельных прамых роўны паміж сабой, а для перпендыкулярных прамых яны адваротны па велічыні і процілеглы па знаку.

<u>Заўвага</u>. Умовы $\parallel$ і $\perp$ прамых, заданых кананічнымі ўраўненнямі

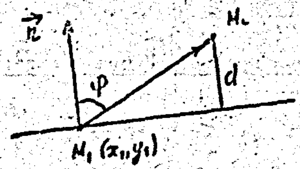
$$(\mathcal{L}_1):\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1};\quad (\mathcal{L}_2):\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$$

запішуцца ў выглядзе

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2;\quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2.$$

4. <u>Адлегласць ад пункта да прамой</u>.

Няхай патрабуецца знайсці адлегласць d ад пункта $M_0(x_0, y_0)$ да прамой $(\mathcal{L})$: $Ax + By + C = 0$.



Возьмем пункт $M_1(x_1, y_1) \in (\mathcal{L})$, тады

$$\overrightarrow{M_1M_0} = ((x_0 - x_1); (y_0 - y_1)), \quad d = np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0} = |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\cos\varphi| \tag{13}$$

З уласцівасцей скалярнага здабытку вынікае, што

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_0}|}.$$

Улічваючы гэта, формула (13) запішацца ў выглядзе

$$d = \left| \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0})}{|\vec{n}|} \right|$$

або ў каардынатнай форме

$$d = \left| \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \tag{14}$$

Так як $M_1(x_1, y_1) \in (\mathcal{L}): Ax_1 + By_1 + C = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -Ax_1 - By_1 = C$. Такім чынам, канчатковая роўнасць (14) будзе мець выгляд

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{15}$$

Пры гэтым адзначым, што ў лічніку пад знакам модуля знаходзіцца левая частка ўраўнення прамой, у якой замест бягучых каардынат падстаўлены каардынаты пункта $M_0(x_0, y_0)$.

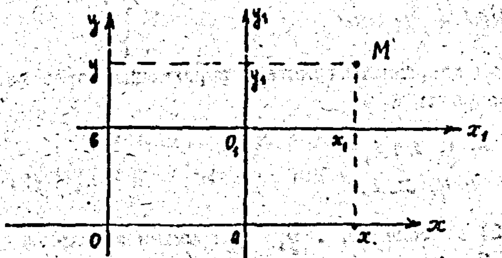
9. ПЕРАЎТВАРЭННЕ КААРДЫНАТ НА ПЛОСКАСЦІ. ЭЛІПС.

9.1. ПЕРАЎТВАРЭННЕ КААРДЫНАТ НА ПЛОСКАСЦІ.

У шматлікіх тэхнічных задачах адзін і той жа пункт аднасачова прыходзіцца разглядаць у розных сістэмах каардынат і вызначаць залежнасць паміж гэтымі каардынатамі.

9.1.1. ПАРАЛЕЛЬНЫ ПЕРАНОС.

Няхай новая сістэма каардынат $x_1O_1y_1$ адрозніваецца ад старай сістэмы xOy паралельным пераносам. Пры гэтым $O_1(a, b)$.

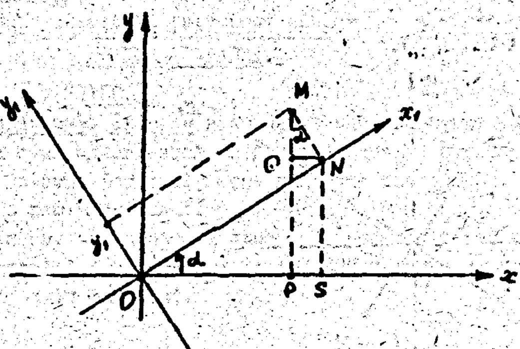


Тады, відавочна, што старыя і новыя каардынаты пункта M звязаны паміж сабой роўнасцямі:

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - a, \\ y_1 = y - b. \end{cases} \qquad (1)$$

9.1.2. ПАВАРОТ ВОСЕЙ КААРДЫНАТ.

Няхай новая сістэма x_1Oy_1 адрозніваецца ад старой сістэмы каардынат xOy паваротам на вугал α.



$x = OP = OS - PS = OS - QN;\quad OS = ON\cdot\cos\alpha = x_1\cos\alpha;$

$QN = NM\cdot\sin\alpha = y_1\sin\alpha. \Rightarrow$

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha.$$

$$y = PM = PQ + QM = NS + QM; \qquad NS = ON \cdot \sin\alpha = x_1 \sin\alpha;$$

$$QM = MN\cos\alpha = y_1 \cos\alpha \Rightarrow$$

$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

Такім чынам, старыя каардынаты пункта M выражаюцца цераз яе новыя каардынаты па формулах:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases} \qquad (2)$$

Рашаючы сістэму (2) адносна x_1, y_1, атрымаем выражэнне новых каардынат пункта M цераз яго старыя каардынаты

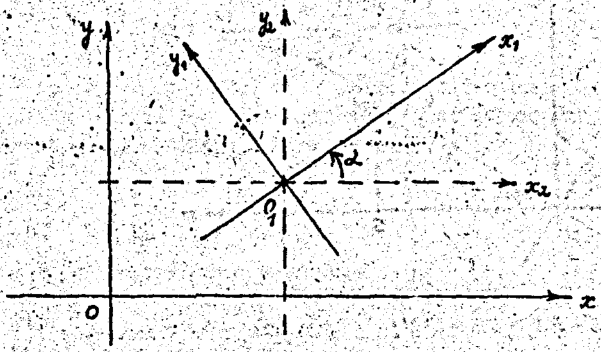
$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (2')$$

<u>Заўвага</u>. Сістэму (2') можна атрымаць з сістэмы (2), калі разглядаць сістэму каардынат $x_1 O y_1$ як старую, а сістэму xOy – атрыманую з яе паваротам на вугал "$-\alpha$".

9.1.3. <u>АГУЛЬНЫ ВЫПАДАК</u>.

Няхай цяпер новая сістэма каардынат $x_1 O_1 y_1$ можа быць атрымана са старой сістэмы каардынат xOy паралельна пераносам і паваротам на вугал α.

Пры гэтым $O_1(a, b)$.



Увядзем дапаможную сістэму каардынат $x_2 O_1 y_2$, якая адрозніваецца ад старой сістэмы паралельным пераносам, а ад новай – паваротам на вугал " $-\alpha$ ".

Таму

$$\begin{cases} x = x_2 + a, \\ y = y_2 + b. \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y_2 = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + a, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + b. \end{cases} \qquad (5)$$

Рашаючы сістэму (5) адносна x_1, y_1, атрымаем выраз новых каардынат пункта М праз яго старыя каардынаты

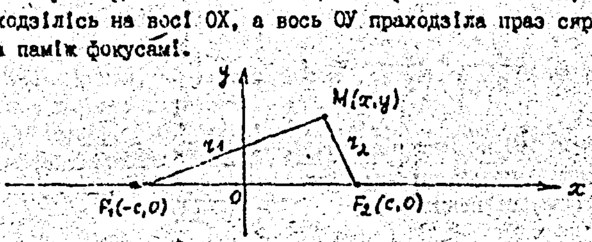
$$\begin{cases} x_1 = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y_1 = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{cases} \qquad (5')$$

9.2. КАНАНІЧНЫЯ УРАЎНЕННІ КРЫВЫХ ДРУГОГА ПАРАДКУ.

9.2.1. ЭЛІПС.

<u>Азначэнне</u>. <u>Эліпсам</u> называецца мноства пунктаў плоскасці, для каторых сума адлегласцей да двух фіксаваных пунктаў той жа плоскасці, называемых фокусамі, есць велічыня пастаянная, большая чым адлегласць паміж фокусамі.

Сістэму каардынат на плоскасці выберам такім чынам, каб фокусы знаходзіліся на восі ОХ, а вось ОУ праходзіла праз сярэдзіну адрэзка паміж фокусамі.



Тады

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad 0 < 2c < 2a \Leftrightarrow c < a,$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$r_1 + r_2 = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{6}$$

Ураўненне (6) ёсць ураўненне эліпса у выбранай сістэме каардынат. Прывядзём яго да больш простага, вызваляючысь у ім ад радыкалаў

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

З умовы $a > c$ вынікае, што $a^2 - c^2 > 0 \rightarrow$

$$a^2 - c^2 = b^2. \tag{7}$$

Таму

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Ураўненне (8) называецца <u>кананічным ураўненнем эліпса</u>.

<u>Тэарэтычнае практыкаванне</u>. Даказаць самастойна, што ўраўненне (8) раўназначна ўраўненню (6).

Высветлім цяпер форму эліпса (3).

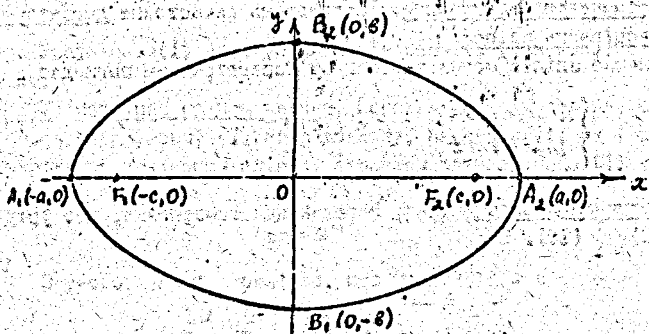
Паколькі бягучыя каардынаты ўваходзяць у ўраўненне (3) толькі ў цотных ступенях, то восі каардынат для такога эліпса будуць восямі сіметрыі.

Пункт перасячэння восей сіметрыі называецца <u>цэнтрам</u> эліпса. Для эліпса (8) цэнтр – пачатак каардынат

З (8) $\Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$



Даўжыні адрэзкаў A_1A_2 і B_1B_2 называюцца адпаведна <u>вялікай і малой восямі</u> эліпса, а даўжыні адрэзкаў OA_1 і OB_1 – вялікай і малой <u>паўвосямі</u> эліпса.

Калі $a = b$, то з (8(вынікае, што

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Г. зн. мы атрымалі акружнасць радыуса a з цэнтрам у пачатку каардынат.

Такім чынам, акружнасць можна разглядаць як часковы выпадак эліпса з роўнымі паўвосямі.

<u>Азначэнне</u>. <u>Эксцэнтрысітэтам</u> эліпса называецца лік ε, роўны адносіне адлегласці паміж фокусамі да вялікай восі:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Паколькі $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

З роўнасці (7) вынікае, што

$$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{9}$$

Паколькі эксцэнтрысітэт эліпса залежыць ад адносіны даўжынь яго паўвосей, то ён з'яўляецца характэрыстыкай формы эліпса.

Відавочна, што чым большы эксцэнтрысітэт, тым больш увогнуты эліпс.

Для эліпса $0 \le \varepsilon < 1$; $\varepsilon = 0$, калі $a = b$.

Такім чынам, чым менш эксцэнтрысітэт эліпса, тым бліжэй ён да акружнасці.

Тэарэтычнае практыкаванне. Разгледзець самастойна дырэктэрыяльную ўласцівасць эліпса.

Ураўненне эліпса можна запісаць у параметрычным выглядзе

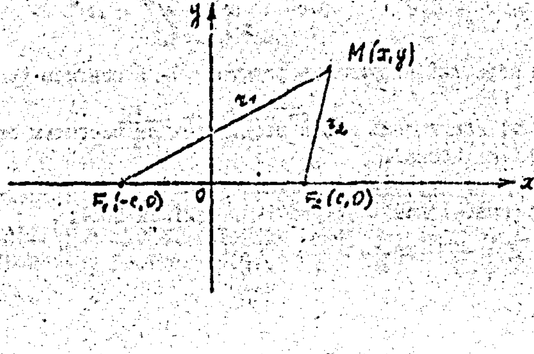
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{10}$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца самастойна, што ураўненне (8) $\Longleftrightarrow$ (10).

10. ГІПЕРБАЛА. ПАРАБАЛА.

10.1. ГІПЕРБАЛА.

Сістэму каардынат на плоскасці выберам таксама, як і пры вывадзе кананічнага ўраўнення эліпса



Азначэнне. Гіпербалай называецца мноства пунктаў плоскасці для якіх абсалютная велічыня рознасці адлегласцей да двух фіксаваных пунктаў той жа плоскасці, называемых фокусамі, ёсць велічыня пастаянная, меншая, чым адлегласць паміж фокусамі.

Тады
$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad 0 < 2a < 2c \iff a < c,$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$|r_1 - r_2| = 2a \iff \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a \iff$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (1)$$

Ураўненне (1) ёсць ураўненне гіпербалы ў выбранай сістэме каардынат.

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца самастойна, што вызваляючысь у ураўненні (1) ад радыкалаў, па аналогіі, як і пры вывадзе кананічнага ўраўнення эліпса, атрымаем раўназначнае (1) ураўненне
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad (2)$$

З умовы $a < c$ вынікае, што $c^2 - a^2 > 0 \implies$
$$c^2 - a^2 = b^2. \qquad (3)$$

Таму
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Ураўненне (4) называецца кананічным ураўненнем гіпербалы.

Высветлім цяпер форму гіпербалы (4).

Паколькі бягучыя каардынаты ўваходзяць у ураўненне (4) толькі ў цотных ступенях, то восі каардынат для такой гіпербалы будуць восямі сіметрыі, а пачатак каардынат - яе цэнтрам.

Таму разгледзім графік гіпербалы толькі ў першай чвэрці, а затым распаўсюдзім яго на астатнія чвэрці па сіметрыі.

Ураўненне (4) $\iff \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} - 1 \iff y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \iff$

$$\iff \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Для I чвэрці $$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,,\quad a\le x<+\infty$$

$$x=0\Rightarrow y=0,\quad a<x\to+\infty\ \Longrightarrow\ y\to+\infty\ (\uparrow)\qquad(5)$$

або

$$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\,,\quad a\le x<+\infty\qquad(5')$$

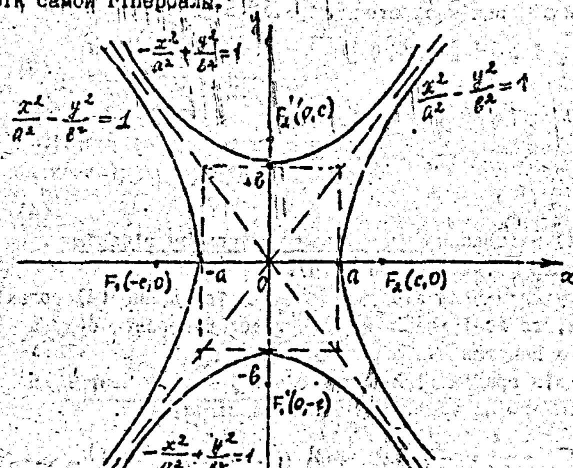
$(5)\Leftrightarrow(5')$.

Паколькі пры $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\to 1$, то гіпербала (5), або (5') пры $x\to+\infty$ будзе неабмежавана блізка набліжацца да прамой $y=b/a\,x$, якая называецца <u>асімптотай</u> гіпербалы.

Прамавугольнік са старанамі $2a$ і $2b$ называецца <u>асноўным прамавугольнікам</u> гіпербалы (4). Пры гэтым лікі a і b называюцца яе <u>паўосямі</u>.

Няцяжка пераканацца, што гіпербала (4) перасякае вось ОХ у двух пунктах $A_1(-a,0)$ і $A_2(a,0)$, якія называюцца яе <u>вяршынямі</u> і не перасякае вось OY.

Адзначым, што пры пабудове графіка гіпербалы, спачатку будуюць асноўны прамавугольнік, праводзяць асімптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$ і затым графік самой гіпербалы.



Калі $a=b$, тады ўраўненне гіпербалы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \iff x^2-y^2=a^2$$

Такая гіпербала называецца роўнастаронняй, асноўны прамавугольнік для яе будзе квадратам са стараной $2a$, яе асімптоты $y=\pm x$ будуць перпендыкулярны паміж сабой.

Гіпербала

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (6)$$

дзе a і b тыя ж лікі, што і ў гіпербалы (4) называецца спалучанай да гіпербалы (4). Гіпербала (6) перасякае вось ОУ у пунктах $B_1(0,-b)$ і $B_2(0,b)$.

Тэарэтычнае практыкаванне. Даказаць самастойна, што спалучаныя гіпербалы маюць агульныя асімптоты і аднолькавыя адлегласці паміж фокусамі.

Азначэнне. Эксцэнтрысітэтам гіпербалы называецца лік ε, роўны адносіне адлегласці паміж фокусамі к адлегласці паміж яе вяршынямі

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

Паколькі $a<c$, то $\varepsilon>1$.

З роўнасці (3) вынікае, што

$$c^2=a^2+b^2 \to \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Паколькі эксцэнтрысітэт гіпербалы залежыць ад адносіны старон асноўнага прамавугольніка, то ён характарызуе форму гіпербалы. Тэарэтычнае практыкаванне. Разгледзець самастойна дырэктарыяльную ўласцівасць гіпербалы.

Ураўненне гіпербалы можна запісаць у параметрычным выглядзе

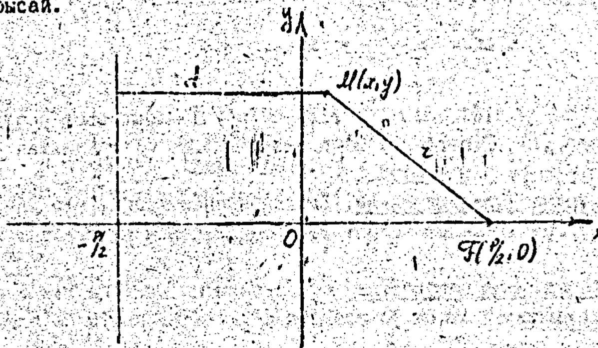
$$\begin{cases} x=a\cdot ch\,t=a\,\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \\ y=b\,sh\,t=b\,\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}. \end{cases} \quad -\infty<t<\infty \qquad (7)$$

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\approx 2{,}718\ldots, \qquad (4)\iff(7).$$

10.2. ПАРАБАЛА.

Азначэнне. Парабалай называецца мноства пунктаў плоскасці, для каторых адлегласць да фіксаванага пункта той жа плоскасці, называемага фокусам, роўна адлегласці да фіксаванай прамой, называемай дырэктрысай.

Сістэму каардынат на плоскасці выберам такім чынам, каб адна з восей каардынат была паралельна дырэктрысе, фокус належаў другой восі, пачатак каардынат дзяліў папалам адлегласць паміж фокусам і дырэктрысай.



$$r = d, \quad r = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = x + \frac{p}{2}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \tag{8}$$

Гэта і есць адшукваемае ураўненне. Узвядзем у квадрат абедзьве яго часткі

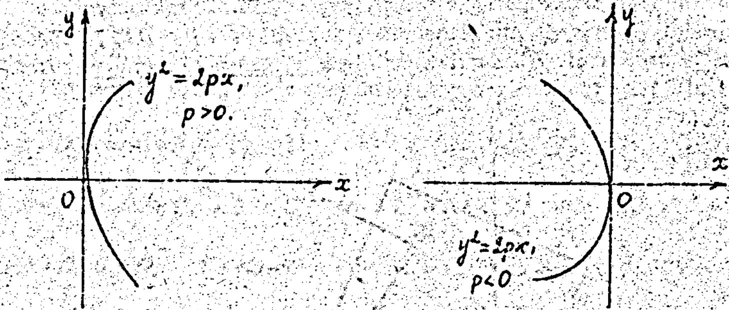
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px \tag{9}$$

Ураўненне (2) называецца кананічным ураўненнем парабалы, пры гэтым (9)$\Leftrightarrow$(8).

Графік парабалы (2) пры $p > 0$ размешчан у правай паўплоскасці, а пры $p < 0$ – у левай.



Аналагічна парабала $x^2 = 2py$ пры $p > 0$ размешчана ў верхняй паўплоскасці, а пры $p < 0$ – у ніжняй.

Заўвага. Адзначым, што эліпс, гіпербала і парабала называюцца кананічнымі крывымі, паколькі іх можна атрымаць пры сячэнні кругавога конуса плоскасцямі. (высветліць самастойна, як пры гэтым павінны размяшчацца сякучыя плоскасці адносна конуса).

10.3. УЯЎЛЕННЕ АБ АГУЛЬНЫМ УРАЎНЕННІ КРЫВОЙ ДРУГОГА ПАРАДКУ.

На плоскасці XOY разгледзім ураўненне

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D\cdot 2x + 2Ey + F = 0, \qquad (10)$$

дзе ўсе каэфіцыенты – рэчаісныя лікі.

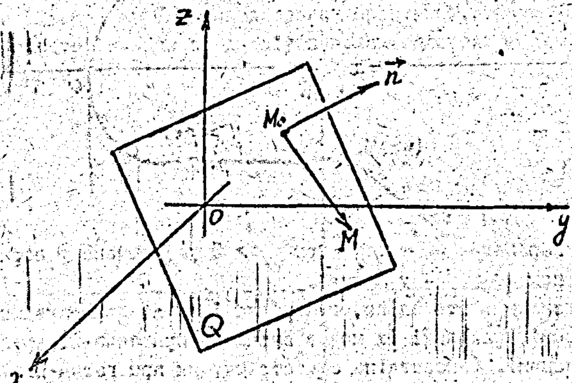
Пры гэтым $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, тады ураўненне (10) называецца агульным ураўненнем крывой другога парадку.

У прыватнасці, калі ў гэтым ураўненні $B = 0$, г.зн. адсутнічае здабытак бягучых каардынат, то яно можа быць пераўтворана ў кананічнае ўраўненне шляхам вылучэння поўных квадратаў па кожнай зменнай і паралельнага пераносу сістэмы каардынат. Пры $B \neq 0$ пераўтварэнне ўраўнення (10) да кананічнага выгляду патрабуе больш складаных намаганняў.

11. УРАЎНЕННЕ ПЛОСКАСЦІ Ў ТРОХМЕРНАЙ ПРАСТОРЫ. ГЕАМЕТРЫЧНЫ СЭНС ЛІНЕЙНЫХ НЯРОЎНАСЦЯЎ.

11.1. УРАЎНЕННЕ ПЛОСКАСЦІ Ў ТРОХМЕРНАЙ ПРАСТОРЫ R_3.

Выберам у R_3 прамавугольную сістэму каардынат. Станоўчыя плоскасці Q ў прасторы цалкам вызначаецца, калі вядомы пункт $M_0(x_0, y_0, z_0) \in Q$ і ненулявы вектар $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендыкулярны плоскасці Q, які называецца нармальным вектарам гэтай плоскасці.



Тэарэма. Усякая плоскасць Q ў трохмернай прасторы вызначаецца ураўненнем першай ступені адносна бягучых каардынат.

Доказ. Выберам на плоскасці Q два пункты: фіксаваны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і зменны $M(x, y, z)$. Разгледзім вектар $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Паколькі $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то іх скалярны здабытак $(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}) = 0$, або цераз каардынаты вектараў-множнікаў

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (1)$$

Ураўненне (1) есць ураўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0, y_0, z_0)$, з нармальным вектарам $\vec{n} = (A, B, C)$.

Перапішам ураўненне (1) у выглядзе

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

дзе $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Тэарэма даказана.

Ураўненне (2) называецца агульным ураўненнем плоскасці ў трохмернай прасторы.

Падкрэслім пры гэтым, што каэфіцыенты пры бягучых каардынатах ва ўраўненні (2) есць адпаведныя каардынаты нармальнага вектара $\vec{n} = (A, B, C)$.

<u>Тэарэтычнае практыкаванне</u>. Даказаць самастойна адваротную тэарэму: Усякае ўраўненне першай ступені адносна бягучых каардынат вызначае ў трохмернай прасторы некаторую плоскасць.

Разгледзім цяпер частковыя выпадкі ўраўнення (2). З (2) $\Longrightarrow$

1. $D=0,\quad Ax+By+Cz=0 \iff O(0,0,0)\in Q.$

2. $A=0,\quad By+Cz+D=0 \iff \vec{n}=(0,B,C) \iff Q \parallel Ox.$

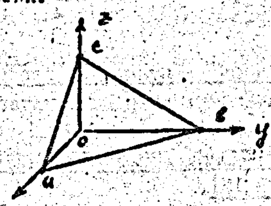
3. $A=0,\ B=0,\quad Cz+D=0 \iff \vec{n}=(0,0,C) \iff Q \parallel xOy \iff Q \perp Oz.$

4. $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0,\quad Ax+By+Cz=-D \iff$

$$\iff -\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z=1,\quad a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}\Longrightarrow$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

Ураўненне (3) называецца <u>ураўненнем плоскасці ў адрэзках</u>, дзе a, b, c – <u>велічыні адрэзкаў</u>, адсякаемых гэтай плоскасцю на адпаведных каардынатных восях.



II.2. <u>НАРМАЛЬНАЕ ЎРАЎНЕННЕ ПЛОСКАСЦІ. АДЛЕГЛАСЦЬ АД ПУНКТА ДА ПЛОСКАСЦІ</u>.

Калі ў якасці нармальнага вектара плоскасці ўзяць адпаведны яму адзінкавы вектар, або орт вектара $\vec{n}=(A,B,C)$,

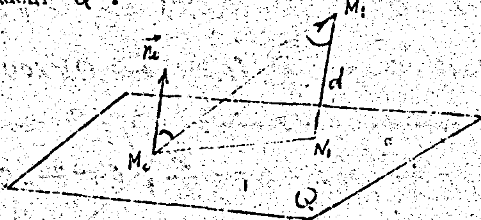
$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

то ў гэтым выпадку мы атрымаем <u>нармальнае ўраўненне плоскасці</u> $\vec{n}_0\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, якое праз каардынаты вектараў-множнікаў запішацца

$$(\vec{n}_0, \overrightarrow{M_0M}) = \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0, \tag{4}$$

дзе $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Нармальнае ураўненне плоскасці (4) зручна выкарыстоўваць пры знаходжанні адлегласці d ад пункта $M_1(x_1, y_1, z_1)$ да плоскасці Q.



Відавочна, што

$$d = \left| пр_{\vec{n}_0} \overrightarrow{M_0M_1} \right| = \left| (\vec{n}_0, \overrightarrow{M_0M_1}) \right| = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5}$$

Такім чынам, <u>адлегласць ад пункта да плоскасці</u> роўна абсалютнай велічыні выніка падстаноўкі каардынат гэтага пункта ў левую частку нармаванага ўраўнення плоскасці.

II.3. УЗАЕМНАЕ РАЗМЯШЧЭННЕ ДЗВЮХ ПЛОСКАСЦЯЎ. ВУГАЛ ПАМІЖ ІМІ.

Няхай абедзве плоскасці Q_1 і Q_2 зададзены сваімі ўраўненнямі:

Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$,

Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Тады:

1) $$Q_1 \parallel Q_2 \iff \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{6}$$

2) $$Q_1 \perp Q_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff$$

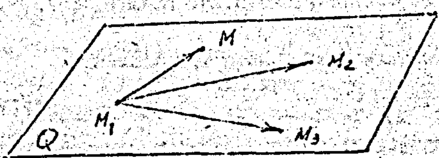
$$\iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{7}$$

3) Вугал паміж дзвюма плоскасцямі вызначаецца як вугал паміж іх нармальнымі вектарамі. Таму з уласцівасцей скалярнага здабытку вектараў атрымаем

$$\cos\varphi = \cos(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \quad (8)$$

II.4. УРАЎНЕННЕ ПЛОСКАСЦІ, ЯКАЯ ПРАХОДЗІЦЬ ПРАЗ ТРЫ ПУНКТЫ.

Няхай плоскасці Q належаць тры фіксаваных пункты $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Возьмем адвольны пункт $M(x, y, z) \in Q$.



Разгледзім вектары $\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$.
Гэтыя вектары камплапарны, таму іх мяшаны здабытак роўны нулю.

$$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Ураўненне (9) і есць ураўненне плоскасці Q, якая праходзіць праз тры пункты.

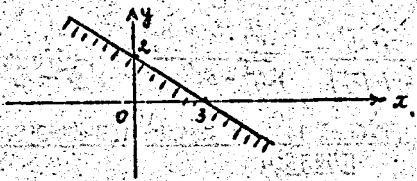
II.5. ГЕАМЕТРЫЧНЫ СЭНС ЛІНЕЙНЫХ НЯРОЎНАСЦЯЎ.

Вядома, што лінейнаму ураўненню $Ax + By + C = 0$ на плоскасці ХОУ, г.зн. у прасторы R_2, адпавядае прамая з нармальным вектарам $\vec{n} = (A, B)$, якая падзяляе плоскасць на дзве часткі, кожная з каторых называецца паўплоскасцю. Таму няроўнасці $Ax + By + C \geq 0$ (≤ 0) вызначаюць адну з дзвюх паўплаоскасцей. Напрыклад, няроўнасць

$$2x + 3y - 6 \leq 0 \quad (10)$$

вызначае паўплоскасць з гранічнай прамой

$$2x+3y-6=0 \iff \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$



Няроўнасці (10) задавальняюць каардынаты любых пунктаў, якія знаходзяцца ў заштрыхаванай вобласці, г.зн. ніжэй прамой $2x+3y-6=0$, або ёй належачых.

Вядома таксама, што лінейнаму ўраўненню з трыма зменнымі

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \text{(11)}$$

ў трохмернай прасторы R_3 адпавядае плоскасць з нармальным вектарам $\vec{n}=(A,B,C)$. Плоскасць (11) падзяляе ўсю прастору R_3 на дзве часткі, кожная з каторых называецца <u>паўпрасторай</u>.
Пры падстаноўцы ў ураўненне (11) каардынат адвольнага пункта $M(x_1,y_1,z_1)$ мы атрымаем, што або

$Ax_1+By_1+Cz_1+D<0$, або $Ax+By+Cz+D>0$.

Сама плоскасць (11) можа быць аднесена да любой паўпрасторы.

Па аналогіі, плоскасць у n -мернай прасторы R_n або <u>гіперплоскасць</u> з нармальным вектарам $\vec{n}=(A_1,A_2,\dots,A_n)$ вызначаецца роўнасцю

$$A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n+D=0 \qquad \text{(12)}$$

Гіперплоскасць (12) падзяляе n -мерную прастору R_n на дзве часткі, кожная з каторых называецца паўпрасторай.

І ў гэтым выпадку пры падстаноўцы ў ураўненне (12) каардынат пункта $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$ мы атрымаем адмоўную або дадатную велічыню ці нуль.

Такім чынам, кожная лінейная няроўнасць адносна бягучых каардынат геаметрычна ўяўляе паўпрастору адпаведнай памернасці.

12. ПРАМАЯ У ТРОХМЕРНАЙ ПРАСТОРЫ. УЗАЕМНАЕ РАЗМЯШЧЭННЕ ПРАМЫХ, ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ У ТРОХМЕРНАЙ ПРАСТОРЫ.

12.1. ПРАМАЯ У ТРОХМЕРНАЙ ПРАСТОРЫ R_3.

Выберам у трохмернай прасторы прамавугольную сістэму каардынат. У агульным выглядзе прамая у R_3 задаецца як перасячэнне двух плоскасцяў

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Будзем лічыць, што

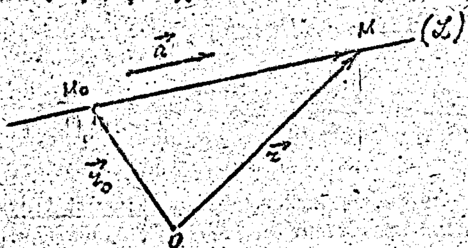
$$\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \neq \lambda \vec{n_2} = (\lambda A_2, \lambda B_2, \lambda C_2), \ \lambda = \forall const,$$

г. зн. што абедзьве плоскасці сапраўды перасякаюцца.

Выведзем другія віды ўраўнення прамой ($\mathcal{L}$) у прасторы R_3.

Азначэнне. Усякі ненулявы вектар $\vec{a} = (\ell, m, n)$, які паралельны прамой ($\mathcal{L}$), называецца накіроўваючым вектарам гэтай прамой.

Разгледзім у прасторы R_3 прамую ($\mathcal{L}$) з накіроўваючым вектарам $\vec{a} = (\ell, m, n)$.



Выберам на прамой ($\mathcal{L}$) два пункты: фіксаваны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і зменны $M(x, y, z)$

Відавочна, што

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}, \ t \in R, \ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \Longleftrightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{a}, \ t \in R. \qquad (2)$$

Ураўненне (2) называецца вектарным ураўненнем прамой ($\mathcal{L}$) у трохмернай прасторы.

Вектарнай роўнасці (2) адпавядаюць тры каардынатных роўнасці

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \qquad (3)$$

Ураўненні (3) у прасторы R_3 называюцца <u>параметрычнымі ураўненнямі прамой</u>, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з накіроўваючым вектарам $\vec{a} = (l, m, n)$.

Адзначым, што параметрычнымі ўраўненнямі (3) асабліва зручна карыстацца, калі патрабуецца знайсці пункт перасячэння дадзенай прамой з некатарай плоскасцю.

Перапішам цяпер ураўненні (3)

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{n} = t, \end{cases} \qquad (3') \Leftrightarrow (3)$$

Паколькі правыя часткі сістэмы (3') роўны, то роўны і іх левыя часткі

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (4).$$

Ураўненні (4) у прасторы R_3 называюцца <u>кананічнымі ўраўненнямі прамой</u>, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з накіроўваючым вектарам $\vec{a} = (l, m, n)$.

Пакажам цяпер, як ад агульных ураўненняў прамой у R_3, зададзеных сістэмай (I), перайсці да яе кананічных ураўненняў (4).

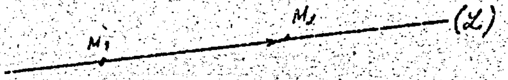
Няхай прамая $(\mathcal{L})$ задана ў агульным выглядзе сістэмай (I). Для таго, каб знайсці каардынаты пункта $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\mathcal{L})$, зробім наступнае: адной з бягучых каардынат прыдадзім фіксаванае значэнне, напрыклад $z = 0$; затым рашым сістэму двух ураўненняў з двумя невядомымі і знойдзем астатнія каардынаты пункта M_0.

У якасці накіроўваючага вектара прамой $(\mathcal{L})$ можна ўзяць вектар вектарнага здабытку нармальных вектараў перасякаючыхся плоскасцяў

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Тым самым мы ад агульных ураўненняў прамой у выглядзе (I) зможам перайсці да яе кананічных ураўненняў у выглядзе (4).

12.2. УРАЎНЕННЕ ПРАМОЙ У R_3, ЯКАЯ ПРАХОДЗІЦЬ ПРАЗ ДВА ПУНКТЫ.



Няхай $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (\mathcal{L})$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (\mathcal{L})$,

тады $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Таму кананічныя ўраўненні адшукваемай прамой запішуцца ў выглядзе

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{5}$$

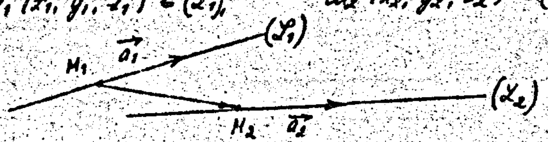
12.3. УЗАЕМНАЕ РАЗМЯШЧЭННЕ ПРАМЫХ У ТРОХМЕРНАЙ ПРАСТОРЫ.

Няхай у R_3 зададзены дзве прамые $(\mathcal{L}_1)$ і $(\mathcal{L}_2)$ сваімі кананічнымі ўраўненнямі:

$$(\mathcal{L}_1):\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \Rightarrow \vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1),$$

$$(\mathcal{L}_2):\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \Rightarrow \vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$$

$M_1(x_1, y_1, z_1) \in (\mathcal{L}_1)$, $\qquad M_2(x_2, y_2, z_2) \in (\mathcal{L}_2)$



Умовай перасячэння прамых $(\mathcal{L}_1)$ і $(\mathcal{L}_2)$ будзе кампланарнасць вектараў $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, г.зн. іх мяшаны здабытак

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a_1}\right]\cdot\vec{a_2}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Адзначым, што для паралельных прамых умова (3) таксама выконваецца.

Калі роўнасць (6) не выконваецца, то ў R_3 прамыя $(\mathcal{L}_1)$ і $(\mathcal{L}_2)$ <u>крыжаваныя</u>.

Няхай:

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \iff \vec{a_1}\parallel\vec{a_2} \iff \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \iff \vec{a_1}\perp\vec{a_2} \iff \vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0 \iff l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

12.4. <u>УЗАЕМНАЕ РАЗМЯШЧЭННЕ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ Ў R_3</u>.

Няхай прамая $(\mathcal{L})$ і плоскасць Q зададзены наступнымі ўраўненнямі:

$$(\mathcal{L}):\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Rightarrow \vec{a}=(l,m,n),\ M_0(x_0,y_0,z_0)\in(\mathcal{L}),$$

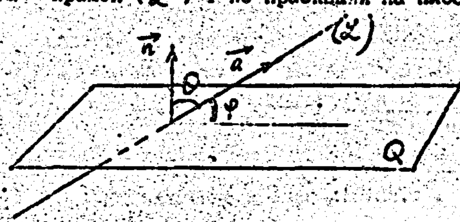
$$Q:\ Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow \vec{n}=(A,B,C).$$

Тады:

$$\mathcal{L}\parallel Q \iff \vec{a}\perp\vec{n} \iff Al+Bm+Cn=0,$$

$$\mathcal{L}\perp Q \iff \vec{a}\parallel\vec{n} \iff \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}.$$

<u>Вуглом паміж прамой $(\mathcal{L})$ і плоскасцю Q</u> называецца вугал паміж прамой $(\mathcal{L})$ і яе праекцыяй на плоскасць Q.



$$\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

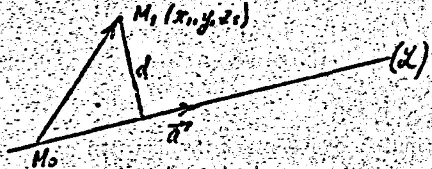
$$\cos\theta=\cos(\vec{n},\vec{a})=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi.$$

Для таго, каб прамая (L) знаходзілась у плоскасці Q , неабходна і дастаткова, каб выконваліся наступныя ўмовы:

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases} \iff L\in Q.$$

12.5. АДЛЕГЛАСЦЬ АД ПУНКТА ДА ПРАМОЙ У R_3 .



Відавочна, што

$$d=\frac{S_{\square}}{|\vec{a}|}=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}. \tag{7}$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Вывесці самастойна формулу для знаходжання адлегласці паміж дзвюма прамымі у R_3 .

---

13. КАНАНІЧНЫЯ ЎРАЎНЕННІ ПАВЕРХНЯЎ ДРУГОГА ПАРАДКУ У .

13.1. ЭЛІПСОІД.

Кананічнае ўраўненне эліпсоіда ў прамавугольнай сістэме каардынат мае від

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

Каб высветліць форму эліпсоіда і другіх паверхняў, выкарыстаем

Метад паралельных сячэнняў. Будзем разглядаць сячэнні эліпсоіда плоскасцямі, паралельнымі каардынатным плоскасцям.

Няхай $z=h \parallel xOy$, тады

$$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \end{cases}$$

Перапішам другое з ураўненняў сістэмы

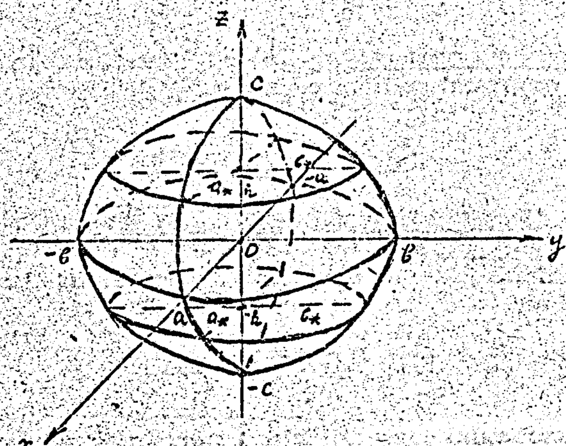
$$\frac{x^2}{a^2(1-h^2/c^2)}+\frac{y^2}{b^2(1-h^2/c^2)}=1.$$

Пры $|h|<c$ у сячэнні эліпсоіда плоскасцю $z=h$ мы атрымаем эліпс з паўвосямі $a_*=a\sqrt{1-h^2/c^2}$, $b_*=b\sqrt{1-h^2/c^2}$.

Пры $h=0$ паўвосі эліпса сячэння будуць найбольшымі $a_*=a$, $b_*=b$. Пры $\uparrow |h|\to c \Rightarrow a_*\to 0,\ b_*\to 0$, калі $|h|=c$, то ў сячэнні атрымаем эліпс з нулявымі паўвосямі, г. зн. плоскасці $z=\pm c$ датыкаюцца да эліпсоіда ў пунктах $(0,0,\pm c)$.

Аналагічная карціна будзе атрымлівацца пры сячэнні эліпсоіда плоскасцямі $y=h \parallel xOz$, $x=h \parallel yOz$.

Таму эліпсоід, які зададзены кананічным ураўненнем (I), мае ў R_3 наступную форму



При гэтым лікі a, в, c, называюцца паўвосямі эліпсоіда.

З ураўнення (I) вынікае, што $|x| \le a,\ |y| \le b,\ |z| \le c$.

Пункты $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$

належаць эліпсоіду і называюцца яго вяршынямі. Калі $a = b = c = r$, тады эліпсоід (I) ператвараецца ў сферу $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, г. зн. сфера радыуса r есць частковы выпадак эліпсоіда з роўнымі паўвосямі.

13.2. ГІПЕРБАЛОІДЫ.

13.2.1. АДНАПОЛАСЦЕВЫ ГІПЕРБАЛОІД.

Кананічнае ураўненне аднапласцевага гіпербалоіда мае від

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2)$$

Разгледзім яго сячэнні плоскасцямі $z = h \parallel xOy$

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}. \end{cases}$$

Перапішам другое з ураўненняў сістэмы

$$\frac{x^2}{a^2(1 + h^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 + h^2/c^2)} = 1.$$

З гэтай роўнасці вынікае, што ў сячэнні аднапаласцевага гіпербалоіда (2) плоскасцямі $z = h$ мы атрымаем эліпсы з паўвосямі

$$a_* = a\sqrt{1 + h^2/c^2}, \quad b_* = b\sqrt{1 + h^2/c^2}.$$

При $h = 0$ у сячэнні атрымаем самы малы эліпс з паўвосямі

$$a_* = a, \quad b_* = b.$$

При $|h| \to \infty \quad a_* \to \infty, \ b_* \to \infty.$

У сячэнні паверхні (2) плоскасцю $x = 0$ атрымаем гіпербалу

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

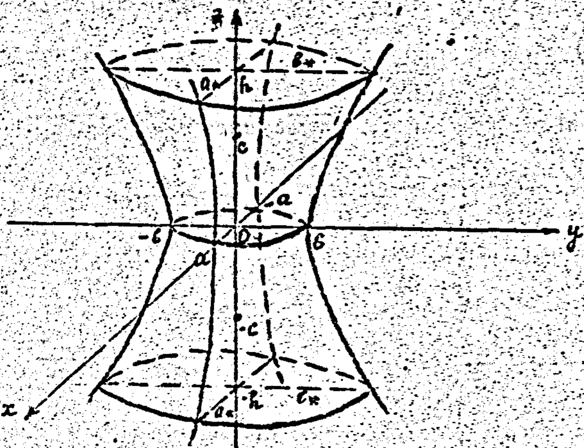
якая перасякае вось OY у пунктах $(0, \pm b, 0)$.

Аналагічна, у сячэнні паверхні (2) плоскасцю $y = 0$ атрымаем гіпербалу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

якая перасякае вось OX у пунктах $(\pm a, 0, 0)$.

Улічваючы гэта, пабудуем паверхню (2) у R_3.



Заўвага. Адзначым, што аднаполасцевы гіпербалоід з'яўляецца лінейчатай паверхняй, г. зн. ен можа быць атрыман вярчэннем адной з дзвюх прамых ліній вакол некатарай восі.

13.2.2. ДВУХПОЛАСЦЕВЫ ГІПЕРБАЛОІД.

Кананічнае ўраўненне двухполасцевага гіпербалоіда мае від

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{3}$$

Разгледзім яго сячэнні плоскасцямі $z=h$ і xOy

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1. \end{cases}$$

Перапішам другое з ураўненняў сістэмы

$$\frac{x^2}{a^2(h^2/c^2-1)} + \frac{y^2}{b^2(h^2/c^2-1)} = 1$$

З гэтай роўнасці вынікае, што пры $|h| < c$ паверхня (3) і плоскасць $z = h$ не перасякаюцца. Пры $h = \pm c \Rightarrow a_* = 0, b_* = 0$, г. зн. плоскасці $z = \pm c$ датыкаюцца да паверхні (3) у пунктах $(0, 0, \pm c)$.

Пры $|h| > c$ у сячэнні двухполасцевага гіпербалоіда (3) плоскасць $z = h$ мы атрымаем эліпс з паўвосямі $a_* = a\sqrt{h^2/c^2-1}$, $b_* = b\sqrt{h^2/c^2-1}$. Пры $|h| \to \infty \Rightarrow a_* \to \infty, b_* \to \infty$.

Разгледзім сячэнні паверхні (3) каардынатнымі плоскасцямі $x=0$ і $y=0$.

Пры $x=0$ мы атрымаем гіпербалу

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \iff \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

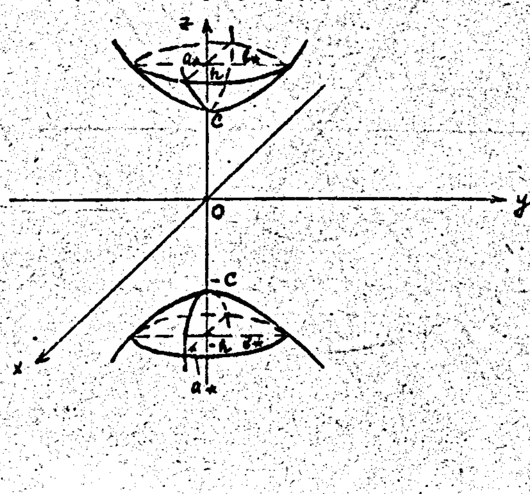
з вяршынямі $(0, 0, \pm c)$.

Пры $y=0$ гэта таксама гіпербала

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \iff \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

з вяршынямі $(0, 0, \pm c)$.

Таму аднаполасцевы гіпербалоід, які зададзены кананічным ураўненнем (3), мае ў R_3 наступную форму



13.3. КОНУСЫ.

Кананічнае ураўненне конуса мае від

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (4)$$

Разгледзім сячэнне паверхні (4) плоскасцю $x=0$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \iff y=\pm\frac{b}{c}z.$$

Гэта дзве прамыя, якія перасякаюцца ў пачатку каардынат. Аналагічна пры $y=0$

$$x^2/a^2 - z^2/c^2 = 0 \iff x=\pm\frac{a}{c}z.$$

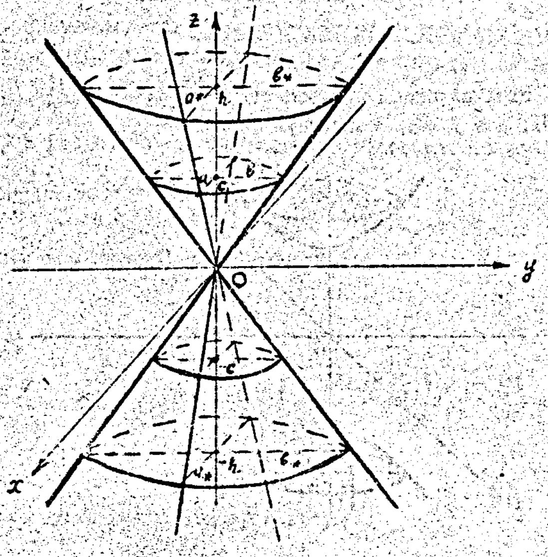
У сячэнні паверхні (4) плоскасцю $z=h$ атрымаем эліпс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$$

з паўвосямі $a_*=a\cdot|h|/c$, $b_*=b\cdot|h|/c$.

Пры $|h|\to\infty \implies a_*\to\infty,\ b_*\to\infty$.

Таму конус (4) мае ў R_3 наступную форму



Заўвага. Адзначым, што воссю сіметрыі конуса з'яўляецца тая вось, бягучая каардыната якой знаходзіцца ва ўраўненні са знакам "мінус".

13.4. ПАРАБАЛОІДЫ.

13.4.1. ЭЛІПТЫЧНЫ ПАРАБАЛОІД.

Кананічнае ўраўненне эліптычнага парабалоіда мае від

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \quad p>0, \ q>0 \tag{5}$$

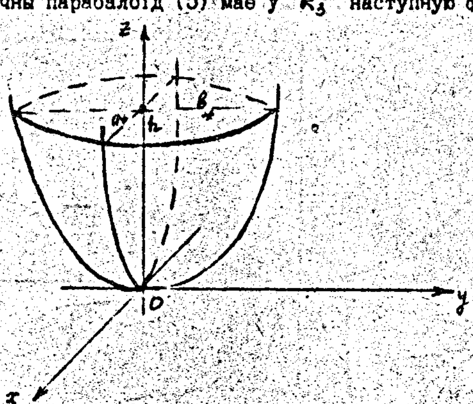
У сячэнні паверхні (5) плоскасцю $x=0$ атрымаем парабалу $z = y^2/2q$. Пры $y=0$ гэта таксама парабала $z=x^2/2p$.
У сячэнні паверхні (5) плоскасцю $z=h>0$ атрымаем эліпс

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h$$

з паўвосямі $a_* = \sqrt{2ph}$, $b_* = \sqrt{2qh}$,

$$h \to \infty \implies a_* \to \infty, \quad b_* \to \infty.$$

Пры $h<0$ плоскасць $z=h$ і паверхня (5) не перасякаюцца. Таму эліптычны парабалоід (5) мае ў R_3 наступную форму



Заўвага. Воссю сіметрыі эліптычнага парабалоіда з'яўляецца тая вось, бягучая каардыната якой знаходзіцца ва ўраўненні ў першай ступені.

13.4.2. ГІПЕРБАЛІЧНЫ ПАРАБАЛОІД.

Кананічнае ураўненне гіпербалічнага парабалоіда мае від

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \quad p>0, \ q>0. \tag{6}$$

Разгледзім сячэнні паверхні (6) каардынатнымі плоскасцямі і ім паралельнымі.

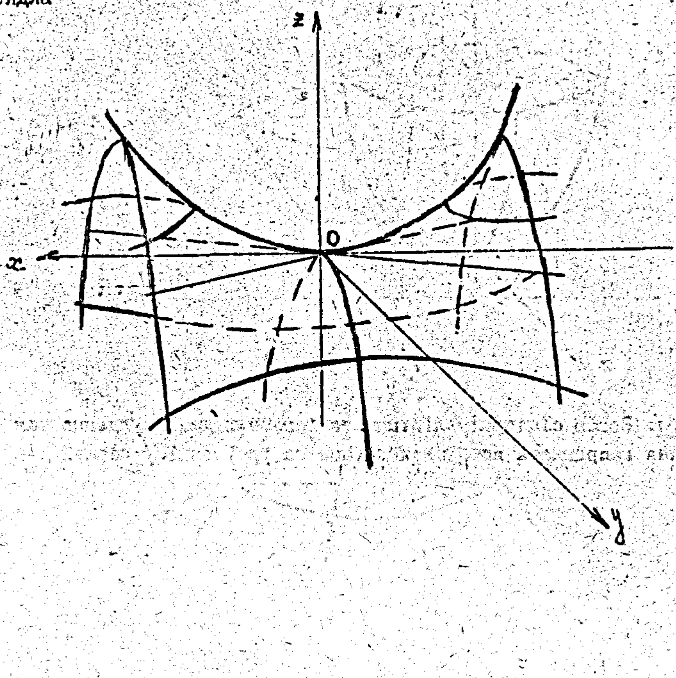
Пры $z=0$ атрымаем

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0 \iff y = \pm\sqrt{q/p}\, x$$

Гэта дзве прамыя, якія перасякаюцца ў пачатку каардынат.

Пры $y=0$; $2pz = x^2$ - гэта парабала з галінамі уверх у плоскасці xOz . Пры $x=0$ $-2qz=y^2$ - гэта парабала з галінамі уніз у плоскасці yOz . Няхай $z=h$, $h>0$, тады $h = x^2/2p - y^2/2q$ - гэта гіпербала, якая перасякае вось Ox.

Пры $z=h$, $h<0$ у сячэнні атрымаем гіпербалу $|h| = -x^2/2p + y^2/2q$, якая перасякае вось ОУ. Улічыўшы гэта, можна пераканацца, што гіпербалічны парабалоід (6) у R_3 мае выгляд сядла



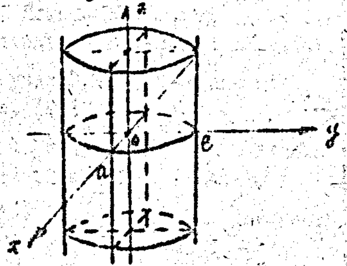
Заўвага. Адзначым, што гіпербалічны парабалоід з'яўляецца лінейчатай паверхняй, г. зн. ён можа быць атрыманы вярчэннем адной з дзвюх прамых ліній вакол некаторай восі.

13.5. Цыліндры.

13.5.1. Цыліндр эліптычны.

Кананічнае ўраўненне

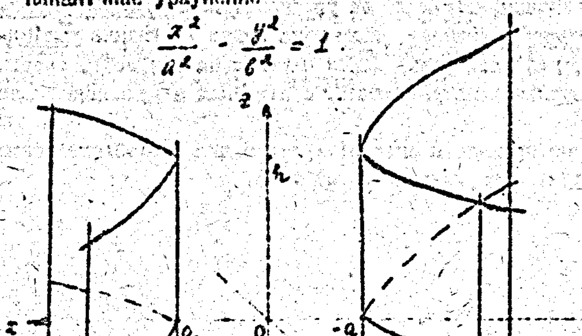
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$



13.5.2. Цыліндр гіпербалічны.

Кананічнае ўраўненне

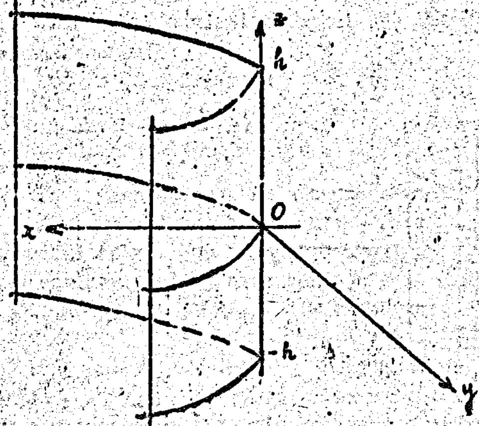
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$



13.С.2. ЦЫЛІНДР ПАРАБАЛІЧНЫ.

Біркананічнае ўраўненне

$$y^2=2px \qquad (9)$$



Заўвага. Адзначым, што калі ва ўраўненні паверхні ў R_3 адсутнічае адна з бягучых каардынат, тады гэта будзе ўраўненне цыліндрычнай паверхні, для якой утваральная паралельна той восі, каардыната каторай адсутнічае ва ўраўненні, а кіроўнай з'яўляецца дадзеная лінія.

На заканчэнне прывядзем спіс літаратуры для паглыбленай самастойнай прапрацоўкі матэрыяла па гэтай тэме.

Літаратура

1. Баврин И.Н. Курс высшей математики. - М. : Просвещение, 1992.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М. : Наука, 1988.

3. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. -Мн. : ВШ, 1982.

4. Гурский Е.И., Домашов В.П. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч.I. - Мн. : ВШ, 1989.

5. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. - Мн. : Навука і тэхніка, 1991.

6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. - Мн. : ВШ, 1992.

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. -.М. : Наука, 1986.

8. Радыно Я.В., Шуба П.П. и др. Русско-белорусский математический словарь. - Мн. : ВШ, 1993.

9. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.I. - Мн. : ВШ, 1990.

10. Сухая Т., Будакімэнка і др. Тэрміналагічны слоўнік па вышэйшай матэматыцы для ВНУ. - Мн. : Навука і тэхніка, 1993.

ЗМЕСТ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Авторы: Тузик Альфред Иванович
Тузик Татьяна Александровна

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
по высшей математике для студентов
электронномеханических специальностей
технических высших учебных заведений
/ на белорусском языке/

Ответственный за выпуск Тузик А.И.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 19.07.94 г. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Усл. п.л. 4,2. Уч. изд. л. 4,5.
Тираж 200 экз. Заказ № 408. Цена договорная.
Отпечатано на ротапринте Брестского политехнического института. 224017. Брест, ул. Московская, 267