2. Руководство по проектированию и изысканиям объектов мелиоративного и водохозяйственного строительства в Белорусской СССР (РПИ-82). Часть II. Осушительные и осушительно-увлажнительные системы. Книга 1. Осушительные системы самотечные. - Мн.: Белгипроводхоз, 1985. - 280 с.
3. СНиП 2.06.03-85. Мелиоративные системы и сооружения / Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. - 60 с.
4. Установление расстояний между дренами. Дополнение №1 к Руководству по проектированию осушительных систем сельскохозяйственного назначения. - Мн.: Ураджай, 1981. - 70 с.

НЕСОВМЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дереченник В.С.

Брестский политехнический институт

Исследованы несовместные системы линейных алгебраических уравнений, разработана программа на языке Pascal для нахождения наилучшего в смысле среднего квадратичного уклонения решения переопределенных несовместных систем по методу наименьших квадратов.

Ключевые слова: линейные уравнения, несовместная система, определитель Грама, квадратичное уклонение.

Пусть дана некоторая несовместная система линейных уравнений вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i,\quad i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

Если вместо неизвестных x_j $(j=\overline{1,m})$ подставить какие-либо числа ξ_j $(j=\overline{1,m})$, то мы получим результаты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, отличные от чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Возникает задача: при известных значениях чисел a_{jk} и b_j $(k=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ найти такие числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, чтобы квадратичное уклонение δ^2 результатов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ от нужных величин $b_1, b_2, \ldots, b_n$ оказалось наименьшим $\delta^2 = \sum_{j=1}^{n}(\gamma_j - b_j)^2$,

а также найти это минимальное уклонение.

Системы вида (1) возникают в практических задачах обработки результатов измерений, в которых коэффициенты ξ_j линейной зависимости $\mathbf{b}$ от величин $\mathbf{a}_j$ $(j=\overline{1,m})$

$$\mathbf{b} = \xi_1\mathbf{a}_1 + \xi_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \xi_m\mathbf{a}_m$$

должны быть найдены из результатов измерений величин $\mathbf{a}_j$ $(j=\overline{1,m})$ и соответствующих значений b_i

$$b_i = \xi_1 a_{i1} + \xi_2 a_{i2} + \ldots + \xi_m a_{im}, \qquad \text{где } i = \overline{1,n}.$$

Эта система, вследствие неизбежных ошибок измерений, будет чаще всего несовместной, решение которой сводится к нахождению таких коэффициентов ξ_j, чтобы каждое уравнение удовлетворилось, хотя бы и приблизительно, но с наименьшей погрешностью.

Знание величины δ^2 в этом случае полезно тем, что помогает оценить надежность измерений.

Составляя линейную комбинацию

$$\xi_1\mathbf{a}_1 + \xi_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \xi_m\mathbf{a}_m, \qquad (2)$$

мы получим вектор $\gamma = \{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m\}$. Нужно определить числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ так, чтобы вектор γ по норме имел наименьшее возможное отклонение от заданного вектора $\mathbf{b} = \{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$.

Так как для переопределенных систем $m<n$, то совокупность всех линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots, \mathbf{a}_m$ образует подпространство $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m)$. В этом подпространстве наименьшее расстояние до вектора $\mathbf{b}$ имеет проекция этого вектора на подпространство $\mathbf{L}$. Следовательно, числа $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$ должны быть выбраны так, чтобы линейная комбинация (2) привела к проекции вектора $\mathbf{b}$ на подпространство.

Подчинив вектор $\mathbf{b} - \mathbf{g} = \mathbf{h}$ условию ортогональности со всеми векторами $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$, получим систему вида

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)\xi_1 + (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1)\xi_2 + \ldots + (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_1)\xi_m = (\mathbf{b},\mathbf{a}_1), \\ (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\xi_1 + (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2)\xi_2 + \ldots + (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_2)\xi_m = (\mathbf{b},\mathbf{a}_2), \\ (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_m)\xi_1 + (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_m)\xi_2 + \ldots + (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_m)\xi_m = (\mathbf{b},\mathbf{a}_m). \end{cases} \qquad (3)$$

Главный определитель системы (3) – это определитель Грама $D=G(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m)$ [1]. Так как векторы образуют базис (линейно-независимый), то $D \neq 0$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение:

$$\xi_j = 1/D \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) \ldots (\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_1)\ (\mathbf{b},\mathbf{a}_1)\ (\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_1) \ldots (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_m) \ldots (\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_m)\ (\mathbf{b},\mathbf{a}_m)\ (\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_m) \ldots (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_m) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Оценим и само уклонение δ. Величина δ – высота $(m+1)$-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$, и равна

$$\delta = \frac{V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})}{V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)}$$

$$\delta^2 = \frac{G(a_1, a_2, \dots, a_m, b)}{G(a_1, a_2, \dots, a_m)} \qquad (5)$$

На примере несовместной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

показано, что квадратичное уклонение δ^2 действительно является наименьшим.

Также составлена программа на языке PASCAL, которая позволяет находить решение переопределенной несовместной системы с любым числом уравнений, превышающим число неизвестных, по методу наименьших квадратов, рассмотренному выше.

Литература

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. - М.: Наука, 1969.

АСФЕРИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ СООТНОШЕНИЙ ПРО-Р-ГРУПП

Шишкевич А.А.

Белорусский государственный университет

г. Минск, пр. Скорины-4, БГУ, ММФ, кафедра Высшей Алгебры

Пусть p — произвольное простое число. Все группы, встречающиеся в статье, предполагаются про-p-группами, подгруппы — замкнутыми; все модули предполагаются компактными модулями над пополненным групповым кольцом ΩG, где Ω — поле из p элементов, G — соответствующая про-p-группа; все морфизмы предполагаются непрерывными.

Следующее определение класса асферических про-p-групп и приведённые ниже факты принадлежат О. В. Мельникову. Пусть

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1 \qquad (1)$$

некоторое копредставление про-p-группы G. Группа G действует слева (с помощью сопряжения) на абелевой группе экспоненты p $\overline{N} := N/N^*$, $N^* = N^p[N,N]$ — группа Фраттини N. ΩG-модуль $\overline{N}$ называется модулем соотношений группы G. По определению, группа G асферична, если существует копредставление (1), модуль соотношений $\overline{N}$ которого изоморфен некото-