О МЕТОДЕ СТРЕЛЬБЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРИСТРЕЛКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Гайчук А.А., Мадорский В.М.

Брестский государственный университет

г.Брест, Бульвар Космонавтов, 12, ауд.615, кафедра ИиПМ, тел:23-01-65

Аннотация: Рассматриваются модификации методов стрельбы и параллельной пристрелки с добавлением демпфирующего множителя для расширения области их сходимости.

Задача Дуффинга

$$x''+ax'+bx+cx^n = F(\sin\omega t,\cos\omega t), \tag{1}$$

$$x(0)=x(2\pi), \tag{2}$$

относится к сравнительно хорошо изученному классу нелинейных периодических задач. Достаточно подробно изучена задача (1), (2) при $a=0; n=3$ и в случае, если функция F линейна относительно $\sin\omega t,\cos\omega t$ (см.,напр. [1] и приведенную там библиографию).

Для решения задачи Дуффинга применяют как проекционные, так и конечно-разностные методы. Применение метода Галеркина [2] часто требует привлечения 30-40 гармоник для получения приближенного решения с удовлетворительной точностью. Уравнение (1) может быть переписано в эквивалентном виде

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-ay-bx-cx^n+F(\sin\omega t,\cos\omega t). \end{cases} \tag{3}$$

Системе (3) может быть поставлена в соответствие следующая задача Коши

$$\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\Phi;\ \Phi(0)=E. \tag{4}$$

Здесь $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b-cnx^{n-1} & -a \end{pmatrix}$, (5)

где $\Phi(t)$ - так называемая фундаментальная матрица.

Если мультипликаторы системы (4) существенно отличны от единицы, решение методом Галеркина задачи (1) будет устойчивым [3]. В случае, если мультипликаторы системы (4) будут близки к единице, трудно рассчитывать на получение разумного решения с помощью метода Галеркина, так как мы сталкиваемся с некорректной задачей суммирования ряда Фурье. Результаты, полученные в [1], имеют место при специальных предположениях о параметрах задачи.

В связи с вышесказанным, представляется перспективным для решения задачи (1) использовать конечно-разностные методы с аппроксимацией производных формулами высокого порядка точности и дискретизацией всей задачи.

Получающиеся в процессе дискретизации нелинейные системы решаем с помощью следующего итерационного процесса

$$\left(\beta_{n-1}\|f(x_n)\|^2 E + \bar{f}'(\bar{x}_n) f'(x)\right)\Delta x_n = -\bar{f}'(x_n) f(x_n),$$

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 = 10^{-1} \div 10^{-4},$$

$$W_{n+1} = (1-\beta_n)W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1})\|, W_0 = \|f(x_0)\|, \beta_{n+1} = min\left(1, \frac{W_n}{2\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right).$$

Полученное в виде набора точек $(t_i, x(t_i))$ решение аппроксимируем с помощью ряда Фурье. Для того, чтобы избежать большого накопления погрешностей при суммировании ряда Фурье, применяем для аппроксимации "просеянное" по какому-нибудь правилу число точек $k \le 20$. Если физические соображения отсутствуют, точки равномерно "просеивают". Аппроксимированное приближенное решение $\bar{x}(t)$ подставляем в (1), тем самым получая невязку на всей области изменения параметра t. Для достижения разумной точности аппроксимации, рекомендуется, чтобы шаг дискретизации был не более 0,01 (лучше порядка 0,001). В этом случае, как показывают расчеты, невязка становится порядка 0,001-0,0001.

Переходим к обсуждению другого эффектного метода решения задачи (1): метода стрельбы и параллельной пристрелки. Отличие общеизвестного метода стрельбы от предлагаемого нами метода состоит в том, что за счет параметра β_n в формуле поправки, мы достигаем расширения области сходимости, при этом β_n находим, как и выше. Параллельная пристрелка используется тогда, когда интервал интегрирования велик. Рассмотренные выше процедуры оказались весьма эффективными на классе периодических задач, связанных с задачами Дуффинга.

Численный эксперимент и его обсуждение

Рассмотрим уравнения:

а) $x'' + x^3 = 25 cos t;$

б) $x''+x^3=-2\sin t+\sin^3 t$;

Результаты просчетов сведены в таблицу.

Метод	Уравн.	Входн.данные	Результат
Стрельбы	(а)	S=0.5;N=64	Не работает
Стрельбы с параметром β_n	(а)	S=0.5;N=64	Кол.ит. = 59
Параллельной пристрелки	(б)	S=1.5;a=1;b=-1;N=64	Не работает
Пар.пристр. с пар. β_n	(б)	S=1.5;a=1;b=-1;N=64	N=256
Параллельной пристрелки	(б)	S=0.9;a=-1;b=-1;N=64	Не работает
Пар.пристр. с пар. β_n	(б)	S=0.9;a=-1;b=-1;N=64	N=1024

Из таблицы видно, что введение параметра β_n расширяет область сходимости.

Литература

1. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем.М.,Машиностроение,1984.
2. Urabe M/ Galerkin procedure for non-linear periodic systems. Arch. Rational Mech.Anal,1965,v.20,p.120-152.
3. Stokes A. On the approximation of non-linear oscilations. - J.Differ Equat.,1972,v.12,№3,p.535-558.

ОБ ОДНОМ НЕЛОКАЛЬНОМ СВЕРХЛИНЕЙНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Кот А.В., Мадорский В.М.

Брестский государственный университет

г. Брест, Бульвар Космонавтов, 12, ауд.615, кафедра ИиПМ, тел.23-01-65

Аннотация: Приводится гибридная стратегия сочетания метода минимальных ошибок с методом построенным на основе метода типа Ньютона-Рафсона для решения нелокальных нелинейных уравнений.

Ключевые слова: метод-гибрид, сверхлинейная сходимость.

Для решения уравнения

$$f(x)=0;\ f\left(D\subset R^n\to R^n\right) \tag{1}$$

часто применяют следующий итерационный процесс [1]:

$$f'(x_n)\Delta y_n=-f(x_n); \tag{2}$$

$$y_n=x_n+\Delta y_n; \tag{3}$$

$$f'(x_n)\Delta x_n=-(f(x_n)+f(y_n)), \tag{4}$$

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n, \tag{5}$$